傅承义　陈运泰　祁贵仲　著

地球物理学基础

科学出版社

地球物理学基础

傅承义　陈运泰　祁贵仲　著

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书概述了固体地球物理学的基础知识和近十几年来的最重要的研究成果。全书分十二章，重点论述了地球的形状和重力场，地球的转动，地球的年龄、能源和温度，地球的磁场和电场，地震和地球内部构造等。

本书可供地球物理专业研究生、大学地球物理专业高年级学生以及有关地球和行星科学方面的工作者参考。

地球物理学基础

傅承义　陈运泰　祁贵仲 著

责任编辑　周文辅

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1985年6月第一版　　开本：787×1092 1/16

1985年6月第一次印刷　　印张：29

印数：0001—3,850　　字数：662,000

统一书号：13031·2900

本社书号：3995·13—15

定价：6.75 元

序

近二十年来，固体地球物理学有了飞跃的发展。十几年前出版的地球物理教科书，有不小一部分现在都需要重写。我国这方面的教材也是未能赶上时代。1979 年，中国科学技术大学研究生院要为地球物理专业的研究生开一门地球物理学基础课，我们借此机会将以前的讲义彻底地改写一遍，本书就是根据这份讲义加以补充而写成的。书中尽可能地介绍了最近十几年的最重要的成果。由于这是一门基础课，而科学的进展是有一定的继承性和连续性的，旧的经典性理论仍应给予应有的位置。这样，作为讲授一学年的教科书，材料就太多了。如何取舍，很大程度上避免不了作者的主观判断。如果不当，希望读者指出，以便再版时修订。

地球物理学可以看作是一门应用物理学。本书是从这个观点来写的，所以不迴避较严格的物理和数学的论证，但是我们极力避免不必要的抽象和烦琐哲学。具有我国理工科大学一般数、理知识的读者阅读本书应无困难。

本书是集体编著的，内容的安排和基本观点是一起讨论过的；但在具体编写时，为了便于分工，一、二、四、八、十二等章主要由傅承义执笔；三、九、十、十一等章主要由陈运泰执笔；五、六、七等章由祁贵仲执笔。本书在出版过程中，曾得到吴文京和铁安两同志的协助；杨晓莲同志绘制了全书的图件。谨此致谢。

傅承义

1983 年 12 月，北京

目　　录

第一章 概 论

一、什么是地球物理学

顾名思义，地球物理学就是以地球为对象的一门应用物理学。这门学科自本世纪之初就已自成体系。到了六十年代以后，发展极为迅速。它包含许多分支学科，涉及海、陆、空三界，是天文、物理、化学、地质学之间的一门边缘科学。

作为一个天体来研究地球，地球物理学和天体物理学是分不开的；研究地球本身的结构和发展时，地球物理学又和地质学有很密切的联系。但地球物理学所探讨的范围远不止此，它还包括研究地面形状的大地测量学，研究海洋运动的海洋物理学，研究低空的气象学和大气物理学，研究高空以至行星际空间的空间物理学，研究地球本体的固体地球物理学(或叫做地体学)，还有一些较小的分支，如火山学、冰川学、大地构造物理学等等。这些学科中，有的又各有独立的分支。人造卫星出现后，地球物理现象的观测扩展到了行星际空间。行星物理学是地球物理学的一个引伸，但它所要解决的问题，离地球越来越远了。

地球物理学，如果狭义地理解，指的就是固体地球物理学。这一般又可分为两大方面：研究大尺度现象和一般原理的叫做普通地球物理学，利用由此发展出来的方法来勘探有用矿床和石油的，叫做勘探地球物理学(或物理探矿学)。后者因为工业上的需要，发展极快，已经自成体系。勘探地球物理学虽然导源于普通地球物理学，但勘探地球物理学所发展的方法现在反过来又对于研究普通地球物理现象有很大的帮助。

二、固体地球物理学的发展

地球物理问题的探讨从远古就开始了。我国东汉的张衡和唐朝的僧一行都可以算是地球物理学家：前者是地震学家，后者是大地测量学家。现代物理学也可以说是从研究地球物理问题开始的。只是由于研究地球和月球的运动，牛顿才发现了万有引力定律。牛顿以后的许多数学家和物理学家都对地球物理的研究作出过重要的贡献。克雷若 (A. C. Clairaut) 研究地球的形状，拉普拉斯 (P. S. Laplace) 研究地球的起源，高斯 (C. F. Gauss) 研究地磁，开尔芬 (Lord Kelvin) 研究地球的弹性、热传导和许多其他地球物理问题。当代的诺贝尔奖金获得者有好几位都致力于地球物理问题的探讨。尤瑞 (H. C. Urey) 和阿尔芬 (H. Alfvén) 都对地球起源的研究有贡献；阿普尔顿 (E. V. Appleton) 是研究电离层的，里贝 (W. Libby) 是研究 C^{14} 的，这些人都是杰出的地球物理学家。

一门科学的中心课题在科学发展的进程中时有起伏变化，这是由生产的需要和科学本身的发展条件所决定的。有些问题只是由于新概念的提出或新技术的突破才得到长足的进展。二十世纪初叶，物理学接连出现许多引人注目的发现，但地球物理学的成就并不

突出，以致许多物理学家几乎忘记物理学中还有这一门分支。其实它在十八、十九两世纪里却是响当当的物理学科。到了三十年代，由于物理勘探方法显示出优异的效果，地球物理学才又开始为人注意。物理勘探方法原是地球物理学的一种应用，但有一个时期，物理探矿学竟成了地球物理学的代名词，直到现在，我国地学界仍有人持这种看法。这是一种误解。比如说，有这样一种说法："地质学与地球物理学最大的差别是地质学注重时间观念，而地球物理学是不管时间的。"这是混淆地球物理学与物理探矿方法的典型例子。作为一门物理学，地球物理学不但研究地球物理的时空变化，而且给予地学的时间概念以更明确的含义。

在物理探矿学大踏步发展的同时，地球内部的研究也取得稳步的进展。这是一项综合性的研究，但地震学（固体地球物理学的一个分支）起着最显著的作用。到了五十年代，根据地球物理研究的结果，人们已经对于地球内部的分层结构、物质组成和物理状态有了一个大致的了解。此时人们逐渐认识到许多地学现象，特别是地下资源分布问题，若不研究地壳深处以至地幔上部（即地球最外层约七、八百至一千公里深度）是不能完满解释的。由于问题是全球性的，所以在六十年代之初，国际间就组织了一个约有五十个国家参加的协作计划，叫做"上地幔计划"，主要研究内容包括：

① 全球性的地壳断裂系统；

② 大陆边缘地带及岛弧的构造；

③ 地幔的物质组成及地球化学过程；

④ 地壳及地幔的结构及其横向不均匀性。

所用的手段包括：地震、地磁、古地磁、重力、海上地球物理测量、地热、地质、深钻等。计划延续了约十年，其重要成果之一就是提出了一个"板块大地构造假说"。这个假说不是闭门造车的结果，而是根据多年积累的大量观测资料（海上地球物理测线长达几十万公里）提出来的。这个假说的出现是地学发展史上一个里程碑。它的意义之重大及影响之深远可以与近代科学的任何重大发现相媲美。板块假说认为地球最上层（岩石层）是由几个大的板块所组成的。这些板块不是固定不动的，而是相对地运动着。地球上各种大地构造活动就是这些大板块互相作用的结果。这个假说是 1967 年才提出来的，时间不久，还远远不够完善。它来源于实践，还需要经过更多的实践来检验和修正。但应指出，板块构造假说最重要的意义不在于地球岩石层可以分成多少个板块，而在于新假说以大量的观测事实证实了地学中"活动论"的观点。这是在基本概念上的一次重要的进展。关于这个问题，以后还要有专节讲述。

国际上地幔计划到 1970 年就结束了，但问题并未结束。板块大地构造是一个新的概念，它虽然可以解释许多地学现象，但也存在不少缺陷和困难，需要补充和改进。例如，板块的边界大部分在海洋，关于这部分边界的情况研究得比较多，但在大陆上的情况就研究得比较少。板块运动的动力来源还没有公认一致的解释。板块的活动除在其边缘外，在其内部也有所表现，而这种活动对地震成因和矿产富集都极有影响。还有一些其他的问题都是上地幔计划期间来不及解决的。针对这种情况，国际间又组织了一个"地球动力学计划"作为以前计划的继续，也约有五十个国家参加，期限为 1974—1979 年。很显然，这个计划和板块构造假说是密切相关的，其主要目的之一是要解决这个假说所遗留下来的问题，特别是板块运动的驱动力问题。如何具体实施这个计划因各国情况不同并无规

定。地球动力学计划的提出并不意味着地壳上地幔研究的终结，它只是固体地球物理长远协作的一个阶段，而这个计划在各个国家的体现是各不相同的。在动力学计划之后，国际上又提出一个八十年代岩石层研究计划，这是合乎逻辑的。这个计划的中心课题是岩石层的现状，形成、演化和动力学，重点在研究各大陆和陆缘，也包括洋底岩石层进一步的研究。

地球动力学这个词在当前国际协作这个意义上讲，是有其特殊含义的——主要是研究板块的动力学问题。但这个词的本义原不限于此。地球内部的物理过程和地球在空间的运动都和动力学密切相关，所以还有天文方面的地球动力学问题。广义地讲，地球动力学几乎涉及到全部的固体地球物理学，这就超出板块运动的问题了。在当代文献上，广义和狭义的理解都是存在的。

六十年代推动地球物理发展的另一重要事件是利用地震方法监视地下核爆炸的问题。为了提高这个方法的水平，美国拟定一个所谓"维拉-U 计划"。这个计划除了要改进美国国内的地震观测系统外，还在全球建立了一系列标准地震台网。维拉-U 计划的出发点是要通过提高固体地球物理学的全面水平来找到监视地下核爆炸的可靠方法，所以这个计划中的研究项目是极其广泛的，非但有地震学，而且也涉及到地球物理学的许多其它领域，使它们都有所提高。这个计划对推动地球物理学的发展起了积极的作用。

地震学是固体地球物理学的一个重要分支。原来的目的是为了研究和防御天然灾害，但后来却主要沿着地震波物理学这个方面大大发展起来，而对于天然地震本身的研究反而进展不大。到了六十年代，情况才有了很大的变化。我国在 1971 年成立了国家地震局，专门进行地震预测预防方面的工作。但地震不是一个孤立的现象，它和许多其他的地学现象，特别是其它的地球物理现象有内在的联系。脱离了一般的地球物理背景而去单独地解决地震预报问题是很难办到的。地球物理工作者也必须将地震预测问题作为自己的问题来对待。

三、地球物理学和其它学科的关系

此处仅限于讨论固体地球物理学。地面观测数据，一部分来自地质调查，所以地球物理工作者必须能正确理解地质学的语言。地球内部物质所处的温、压环境与地面物质不同。在短暂力的作用下，它基本上是弹性的，在长期力的作用下，它又可以发生流动。所以弹性学和流变学的知识对于地球内部物理现象的研究是需要的。地球物理现象的研究不仅涉及到力学问题，而且也涉及到所有其他物理部门和某些化学部门。

解决地球物理的理论问题，不能忽视空间和时间的条件(即数学上所谓的边值问题和初值问题)。任何地球内部构造或地球演化的假说都必须使得到的结论与现在所见到的地球相符合。即是说：现在的地球为地球演化假说提供一个时间条件；地面观测为地球内部物理过程提供一个边界条件。这些条件虽不能确定一个假说，但却可大大限制一些无边际的幻想。

地球物理学在某些研究领域内和地质学是有密切关系的，但并不相同。地质学是利用地面上直接观测到的数据来对地下浅层构造、变化过程和资源情况作出推断。百余年来，地质学家对人类的经济生活所起的作用是很大的，并仍将起重要的作用，但人类对地

下能直接观测的范围究竟有限(最深的油井不过9公里左右),而出露的矿床也越来越少了。地下情况在地面上没有直接的显示时,传统的地质方法就很难奏效,必须借助于物理的方法,如利用地震波、放射性或各种物理场(电、磁、重、热)。但物理方法所给的数据是间接性质的,还必须对它们做理论解释才能换成地质构造或矿藏,而这种解释时常是不够肯定的。间接数据比不上直接数据那样明确,但是没有什么可以选择的,不能不用,因为可能直接观测的范围太小了。由地面上的物理观测来推导地下的情况,在地球物理学上叫做反演问题。反演问题的答案一般是不单一的,但通过多种观测可以将这种不确定性缩小。可以想见,反演问题是地球物理学中一个核心的理论问题。

自然界的情况不象实验室那样可以按人意安排。对实际地球物理问题的计算常是极其复杂的。若不加简化,往往算不出结果。然而怎样简化才能既不失真,又不烦琐,确应有所考虑。一块不规则的矿石若在远处计算它的引力,就可以看做是一个圆球;在近处就不行了。一块地层,若在近处计算它的引力,就可看做是一无穷平面,远处就不行了。计算地震波的传播时,岩石可以看做是弹性体,计算冰川融化后的影响时,地球就表现有某种塑性。条件不同,计算方法大有差异。对于地球物理来说,数据固然是不可缺少的依据,但物理概念也是同样重要的。地球物理学是一门应用科学,它必须密切联系实际。但地球物理的计算有时是非常复杂的。理论地球物理工作者有时会沉湎于复杂的计算,而忘记问题的实际意义,这是应当注意的。

第二章　地球的形状和重力场

一、概　　论

地球形状和重力场的研究是地球物理学最老的两个课题。它们是大地测量学的主要研究对象，但与许多其他地球物理问题都有关系。

地球形状的概念历史上是逐渐演变的。远古的时候，人们就已意识到地球是圆的，并曾企图从测量地面一度的弧长来估计地球的大小。古代的埃及人、中国人和阿拉伯人都对这个问题有过贡献。到了十七世纪，人们才觉察出地球并非正圆，而是扁圆的，但究竟怎样扁法却无从测得准确，因为无论圆与扁都只是笼统的描述，而真实的地面却是崎岖不平、极不规则的。如何将地球形状这个概念精确化，使它能适用于定量的计算还有待于许多先驱者的努力。现代大地测量学上所谓的地球形状是指一个理论曲面的形状。这个曲面叫做大地水准面。它的定义就是与平均海洋表面最逼近的那个重力等位面。这个等位面的形状和大小是可以用天文测量、几何测量和重力测量来测定的。它是地面各点空间位置的标准。实际上，它在海洋上与平均海面重合，但在大陆地区，它的一部分可能切入地下。因此从全球来看，大地水准面并不是完全包在地球外面，而在某些地方却覆盖着少量的地球物质。这一点实际上虽影响不大，但在理论上却引起一些微妙的问题。大地水准面是大地测量学的基本概念之一，讨论很多。不过近代有人证明，地球表面可以完全由大地测量来确定而不必借助于大地水准面。然而，做为地球物理学的基础知识，以下讨论仍以大地水准面为出发点。

大地水准面虽然比较平滑，但仍是一个极不规则的曲面。要确定这样的曲面，可以分两步走：先选择一个与它同重力位而又很逼近的等位面做为参考面，这个参考面的形状简单，便于计算；然后测定大地水准面与这个简单曲面的偏离。显然最好是选一个旋转椭球面（或扁球面）了。国际间在 1924 年曾选定一个扁球面做为参考面，以后在 1967 年又修订了一次。这个选定的参考椭球面的参数是：长轴 $a = 6,378,160$ 米；扁率

$$f = (a - c)/a = 1/298.247;$$

c = 短轴。实测表明，大地水准面与参考椭球面的最大偏离不超过地球半径的十万分之一。也许有人认为，选取一个三轴椭球面做为参考面更逼近些，但这样做对实际的精度并无好处，可是计算上却复杂得多了。

参考椭球面按定义是一个重力等位面。按照位论的定理，这个面上任一点的重力值是可以计算的。这样得到的重力表达式就是所谓的国际重力公式。根据这个公式所计算的重力值是重力测量的标准，叫做正常重力值。实测的重力值减去正常重力值叫做重力异常（在小区域的相对重力测量中，常选取一个合适地点的重力值做为标准，不必按重力公式去计算）。研究重力异常在各种地球物理现象中的意义是重力学的任务。重力异常在地面上的分布和地下物质的密度分布有关系；重力异常区在地面上的大小范围和它所反映

的地下情况的深度有关系。一般说，异常的范围越大，所反映的地下情况越深。解释大范围的重力异常时，地下物质的迁移对于地面重力场所起的补偿作用必须要考虑。这种补偿作用叫做地壳均衡。在解释局部地区的重力异常时，由于地壳岩石的强度很大，地壳均衡的影响是无须考虑的。

地面上的重力是地球的引力、地球的自转离心力和地外天体的引力之和。前两种力几乎是恒定的，强度也比第三种大得多。第三种力主要是日、月的引力。因为日、月与地球的相对位置随时间而变化，所以它们对地球的引力也随时间而变化。这就使地面上的重力有一个微小的时间变化。日、月的引力不但产生重力的时间变化，而且使地球发生变形。这种变形在海洋上表现为普通的潮汐；在陆上和海底则叫做固体潮。固体潮和地球内部的性质有关系。由于它的存在，许多精密的测量都要考虑它的影响。

二、位论简述

在许多理论物理和地球物理的问题中，都要用到位论的知识，尤其在讨论地球的形状和重力场时更是如此。事实上，位论的概念最早就是克雷若（A. C. Clairaut）在他的名著《地球的形状》中提出来的。本节只介绍与地球重力场有关的一些位论基本知识。

（一）牛顿引力场和力位

根据牛顿的万有引力定律，质点 m 在距离为 r 的一点 P 所产生的引力场强度（或简称引力场，即一单位质点在 P 点所受的引力）$\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{2.1}$$

G 为万有引力常数，负号表示吸力。推广到体积分布，则上式变为

$$\boldsymbol{F}=-G\int_v\frac{\rho dv}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{2.1a}$$

ρ 是物体的密度，v 是物体的体积。定义函数 V 为

$$V=G\int_v\frac{\rho dv}{r}。 \tag{2.2}$$

V 是一个标量。显见

$$\boldsymbol{F}=\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}。 \tag{2.3}$$

V 称为 $\boldsymbol{F}$ 的位函数，或称力位。力位的定义有时也用 $\boldsymbol{F}=-\nabla V$，但负号只是一种约定，计算时是一样的。

例 1. 一均匀球体所产生的引力位　设球体的半径为 R，密度为 ρ，P 点与球心 O 的距离为 h(图 2.1)。若利用球极坐标 r', θ, φ 可将 P 点的力位写为

$$V=G\iiint\frac{\rho r'^2}{r}\sin\theta d\theta d\varphi dr'$$

但

$$r^2 = r'^2 + h^2 - 2hr'\cos\theta。$$

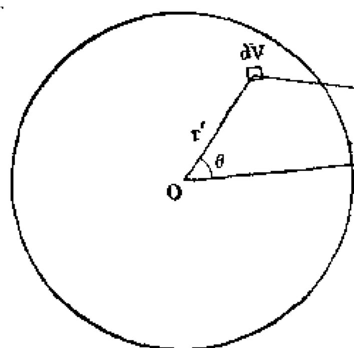


图 2.1

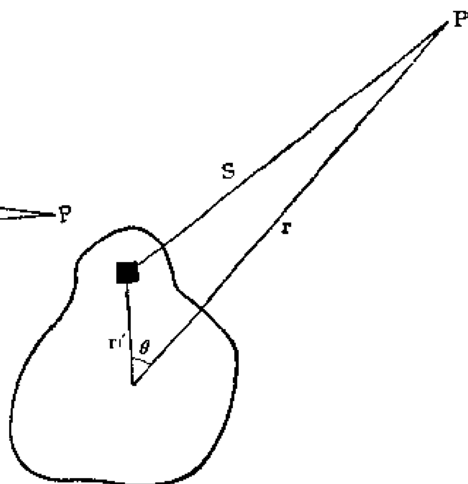


图 2.2

令 r' 不变，求微分，得

$$rdr = hr'\sin\theta d\theta。$$

于是

$$V = G\iiint \frac{\rho r'}{h}\, dr d\varphi dr'$$

若 P 在球外，

$$V = \frac{2\pi\rho G}{h}\int_0^R r'dr'\int_{h-r'}^{h+r'} dr = \frac{4\pi\rho G}{h}\int_0^R r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho G R^3}{3h} = \frac{GM}{h}。$$

M 是球体的总质量。

若球体不是实心的而是一个同心球层，其内半径为 R_1，外半径为 R_2，则上式改为

$$V = \frac{4\pi\rho G}{h}\int_{R_1}^{R_2} r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho G}{3h}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{GM}{h}。$$

此时 M 是球层的质量。以上两式表明：一均匀球体或均匀球层在其外一点所产生的引力位等于将其全部质量集中于球心所产生的引力位。若球体或球层并不均匀，但密度 ρ 只是 r' 的函数，这个结论显然仍是正确的。

以上结论十分重要，因为它说明，不同的密度分布可以产生相同的引力位。相反，按照式(2.2)，若密度分布为已知，即给定 $\rho = \rho(x', y', z')$，则 V 是确定的。

例 2: 任一有限物体在远处的力位　取任一点 O 为原点，P 为体外远处的任一点。物体在 P 点所产生的力位为

$$V = G\int_v \frac{\rho dv}{S} = G\int \frac{\rho dv}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} \approx G\int_v \rho dv\left[\frac{1}{r} + \frac{r'\cos\theta}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$$= G\left(\frac{M}{r} + \frac{A}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}\right)。$$

M 为物体的质量，A，B 均为有限值。当 r 极大时，$V \to \frac{GM}{r}$，其误差的数量级为

$$G \cdot O\left(\frac{1}{r^2}\right)。$$

若取 O 点为物体的质心，则易见 $A = G\int \rho r' \cos\theta dv = 0$，而误差降低为 $G \cdot O\left(\frac{1}{r^3}\right)$。故对一有限物体，

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} V &= 0 \\ \lim_{r\to\infty} rV &= GM。 \end{aligned} \tag{2.4}$$

位函数 V 有一些重要的性质。令 P 点的坐标为 (x, y, z)，积分变数为 (x', y', z')。$V_P = V(x, y, z)$。

① 若 P 点在物体之外，则

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

不能为零。因 ρ 为有限值，故积分(2.2)为收敛的，可在积分号下求导数，

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = G\int \frac{\rho(x'-x)}{r^3} dv, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = G\int\left[\frac{3(x'-x)}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\rho dv, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \cdots, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \cdots,$$

$$\therefore \qquad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0。 \tag{2.5}$$

上式称为拉普拉斯方程，其解称为调和函数或谐函数。若式(2.5)右端不为零而是坐标的一个函数，即

$$\nabla^2 V = f(x, y, z),$$

则称为泊松方程，其解为谐函数加一特解。

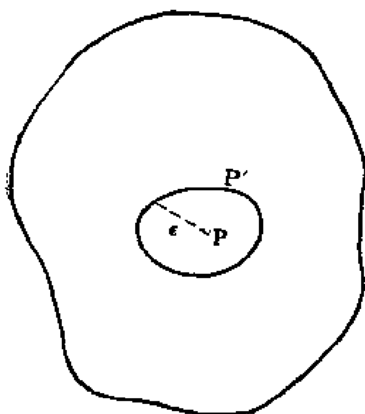


图 2.3

② 若 P 点在物体之内，则 r 可趋于零，但此时积分仍收敛。可以证明，V 及其一次导数在 P 点都连续，但其二次导数不连续。所以不能在积分号下求导数。为了求得 $\nabla^2 V$，可用以下办法：围绕 P 点作一小球面，其半径为 ε。取球面上一点 P'。令 P' 点由小球外物质所产生的力位为 V_1，则 $\nabla^2 V_1 = 0$。令 P' 点由小球所产生之力位为 V_2，则按前例，$V_2 = \frac{4}{3}\pi\rho G\varepsilon^3/r$，而当 ε 极小时，ρ 可视为常数，等于 ρ_m；

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)_{P'} &= -\frac{4}{3}\pi\rho_m G\varepsilon^3 \frac{1}{r^2}\frac{x-\xi}{r}\bigg|_{r=\varepsilon} \\ &= -\frac{4}{3}\pi\rho_m G(x-\xi), \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right)_{P'} = \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}\right)_{P'} = \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right)_{P'} = -\frac{4}{3}\pi\rho_m G。$$

当 $\varepsilon \to 0$，$P' \to P$，$V_1 \to V_P = V$，$\rho_m \to \rho_P = \rho$。故

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\rho。 \tag{2.6}$$

即在物体之内，力位满足泊松方程。

式(2.4)、(2.5)、(2.6)是位函数V的主要性质。这样的函数不仅在重力场的理论中要遇到，而且在许多物理部门中，如电磁学，流体力学，弹性力学，热传导等等问题中也是常常遇到的。位论的目的就是求解这组方程，特别是拉普拉斯方程，并讨论它们在各种物理问题中的应用。

不是所有的力都具有力位，也不是所有的力位都满足拉普拉斯方程(2.5)。地球的重力主要是地球的引力和自转离心力之和(日、月的引潮力要小得多，暂时可以忽略)。若令z坐标轴与自转轴重合，且向上为正，则单位质量所受的自转离心力为$(\omega^2x, \omega^2y, 0)$，$\omega$是地球的自转角速度。这个力有一个力位等于$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$，它显然不满足拉普拉斯方程。地球的总力位$W$称为重力位，

$$W = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)。\tag{2.7}$$

其中

$$V = G\int_v \frac{\rho dv}{r},$$

是地球的引力位。在地面上，$\nabla^2 V = 0$，但$\nabla^2 W = 2\omega^2$。地球的重力加速度g(在重力学中，常简称重力)定义为

$$g = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial n}\boldsymbol{n}\tag{2.8}$$

$\boldsymbol{n}$为向外法线。按习惯，重力向下为正，所以也可写成

$$g = -\frac{\partial w}{\partial n}。$$

式(2.2)原用于体积分布ρ，但极易推广于面积分布σ。这在重力学中虽只有理论意义，但在静电学中却是实际的。设一曲面的厚度为n。令n趋于极小，ρ趋于极大，但保持乘积ρn为一有限值σ，即$\lim\limits_{n\to 0}\rho dv = \lim\limits_{n\to 0}\rho n ds = \sigma ds$。$\sigma$称为面密度。由式(2.2)

$$V = \lim_{n\to 0} G\int_s \frac{\rho dv}{r} = G\int_s \frac{\sigma ds}{r}。\tag{2.9}$$

这种面积分布称为单层分布。当P点在S面上时，积分一致收敛，故V在空间各点均为连续，但通过一质面时，$\frac{\partial V}{\partial n}$不连续。为了说明这一点，在$S$两边取两个与$S$无限接近的面元$ds$，其面密度为$\sigma$(图2.4)，可以证明，在1边，$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 = -2\pi G\sigma$；在2边，

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 = +2\pi G\sigma。$$

故

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2 = -4\pi G\sigma。\tag{2.10}$$

设有两个符号相反的面积分布$+\sigma$，$-\sigma$彼此无限接近(图2.5)，但极限$\lim\limits_{n\to 0}(\sigma n) = \kappa$为一有限值。这就构成一个偶层分布，$\kappa$称为偶层的强度。易见偶层的力位$V$为

$$V = \lim_{n\to 0} G\int_s \sigma\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) n ds = G\int_s \chi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds。\tag{2.11}$$

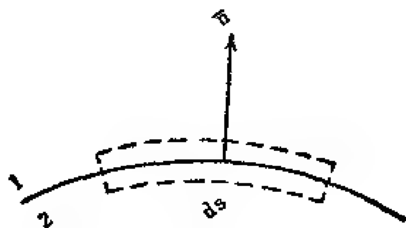


图 2.4

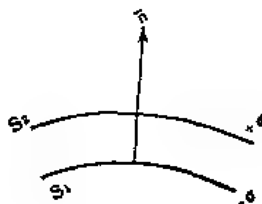


图 2.5

由 S_1 进入偶层时，$\frac{\partial V}{\partial n}$ 增加 $4\pi G\sigma$，但由 S_2 出来时，又减少 $4\pi G\sigma$；所以通过偶层时，$\frac{\partial V}{\partial n}$ 连续。相反，V 为不连续，且有

$$V_2 - V_1 = 4\pi G\kappa。\tag{2.12}$$

（二）常用的积分关系和定理

1. 格 林 定 理

设函数 $F(x, y, z)$ 在一区域 v 内是有限和连续的，则易见

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial x} dv = \int_s lF ds。\tag{2.13}$$

S 是 v 的表面，l 是 ds 的向外法线与 x 轴夹角的余弦。设 F、G、H 为三个连续函数，上式立可推广为

$$\int_v \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) dv = \int_s (lF + mG + nH) ds。\tag{2.13a}$$

l，m，n 为 ds 的向外法线的方向余弦。若 F，G，H 是一个向量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量，则上式化为

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{A} dv = \int_s \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} ds = \int_s A_n ds,\tag{2.13b}$$

A_n 是 $\boldsymbol{A}$ 在 ds 上的法向分量。此式又称为散度定理。在 (2.13a) 中，取

$$F = \phi \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ G = \phi \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ H = \phi \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ϕ，φ 为两个任意连续函数，则得

$$\int_v \phi \nabla^2 \varphi dv + \int \nabla \phi \cdot \nabla \varphi dv = \int \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds。\tag{2.13c}$$

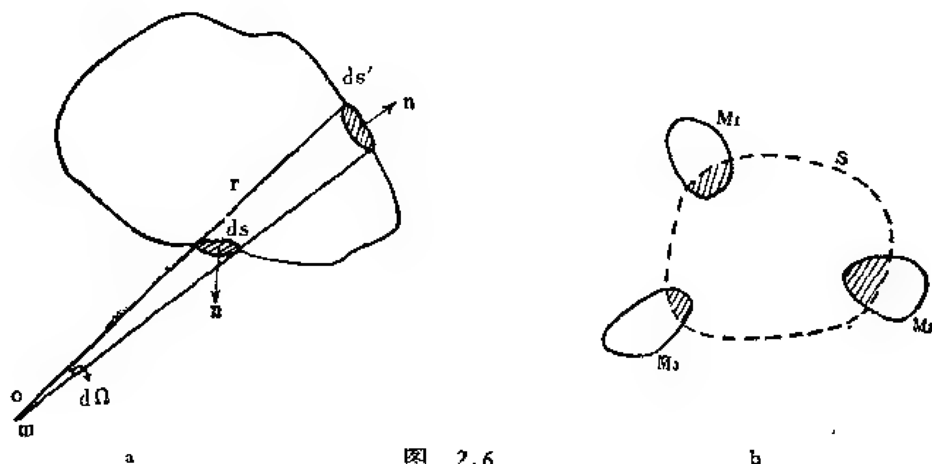
在上式中，若将 ϕ，φ 互换，并与原式相减，则得

$$\int_v (\phi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \phi) dv = \int \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) ds\tag{2.13d}$$

(2.13) 至 (2.13d) 各式都是格林定理的不同形式。

2. 高 斯 定 理

设一质点 m 位于一封闭曲面 S 之外的 O 点（图 2.6a）。求引力场对于 S 面法向分量的面积分，即求 $\oint_s F_n ds$。



a　　　　　　图　2.6　　　　　　b

$$F_n ds = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds = -Gm\frac{1}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})ds = \mp Gmd\Omega。$$

$d\Omega$ 是一束向径所张的立体角。但由 O 点出发，每一束向径都与 S 相交于两个面元 ds，ds'，它们所张的立体角符号恰好相反，相加等于零。求全 S 面的积分时，可以看做是无数相反符号立体角的叠加。所以当 S 面在质点之外时，

$$\oint_s F_n ds = \oint_s \frac{\partial V}{\partial n}ds = 0。\tag{2.14}$$

此式显然不仅适用于一质点，也适用于有限的质量分布。

当质点在 S 面之内时

$$\oint_s F_n ds = -Gm\oint_s d\Omega = -4\pi Gm。$$

m 是质点的质量，此式显然也适用于一有限的质量分布，

$$\oint_s F_n ds = \oint_s \frac{\partial V}{\partial n}ds = -4\pi GM \tag{2.15}$$

M 是 S 封闭曲面所包含的总质量。若 S 面穿过若干质量，则式(15)中之 M 仅是右图中各阴影部分之和。

其实上式极易由格林定理导出。在 (2.13c) 中，令 ϕ 为一常数，φ 为 S 中的引力位 V。于是立得

$$\int\frac{\partial V}{\partial n}ds = \int\nabla^2 V dv = -4\pi G\int\rho dv = -4\pi GM \tag{2.15a}$$

上式称为高斯定理，它不但适用于引力场，也适用于任何平方反比的力场。

牛顿的平方反比定律是由实践总结出来的物理定律，但是泊松方程(2.6)和高斯定理(2.15)则是牛顿力场的数学推论。式(2.15a)的推导曾利用泊松方程，但式(2.15)则没有用。反过来，由高斯定理也可以简捷地推导出泊松方程，因为由(2.15)，代人

$$\int\frac{\partial V}{\partial n}ds = \int\nabla^2 V dv,\quad M = \int\rho dV,$$

立得

$$\int\nabla^2 V dv = -4\pi G\int\rho dv。$$

此式适用于任何 v，故 $\nabla^2 V = -4\pi G\rho$。

作为应用泊松方程的一个例，可以试求地球的平均密度 ρ_m。由式(2.7)，

$$\nabla^2 W = \nabla^2 V + \frac{1}{2}\omega^2\nabla^2(x^2+y^2) = -4\pi G\rho + 2\omega^2,$$

$$\int_v \nabla^2 W dv = \int_s \frac{\partial W}{\partial n} ds = -4\pi G\int_v \rho dv + 2\omega^2 v。$$

v 是地球的体积。若重力 g 是向下为正，则上式可写为

$$G\rho_m = \frac{\omega^2}{2\pi} + \frac{1}{4\pi v}\int_s g ds。\tag{2.16}$$

故若测得全球地面重力值，便可计算 ρ_m。当然，计算地球的平均密度时，尚有更简便的方法，此式仅作为例证。

3. 格 林 公 式

设有一物质分布，其表面为 S 图 2.7。求面外一点 P 的力位 V_P。应用格林定理(2.13d)，令 $\varphi=V, \psi=\frac{1}{r}$，$r$ 是由 P 点到空间任一点的距离，体积分延展到 S 以外的全部空间。因在 P 点，$r=0$，故可取一小球面 σ 包围 P，取一大球面 Σ 包围 S 和 σ，积分在 Σ 之内，但在 S 与 σ 之外的空间进行，最后则令 Σ 趋于无限，σ 趋于零。代入 (2.13a)，

$$\int_v \frac{\nabla^2 V}{r} dv = \int_s \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] ds + \int_\sigma + \int_\Sigma,$$

若 V 为一位函数，则当 Σ 无限大时，$\int_\Sigma \to 0$，当 $\sigma\to 0$ 时，$\int_\sigma \to 4\pi V_P$，故化简后，得

$$V_P = \frac{1}{4\pi}\int_s V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla^2 V}{r} dv。\tag{2.17}$$

n 为 S 的向外法线。若在 S 以外，无物质分布，则 $\nabla^2 V = 0$，上式化为

$$V_P = \frac{1}{4\pi}\int_s V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) ds - \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} ds。\tag{2.17a}$$

以上两式称为格林公式。式 (2.17a) 右端第一项相当于偶层分布，其强度为 $\frac{1}{4\pi G}V$；第二项相当于单层分布，其面密度为 $\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial n}$。 故物体在其外一点所产生的力位和在其表面

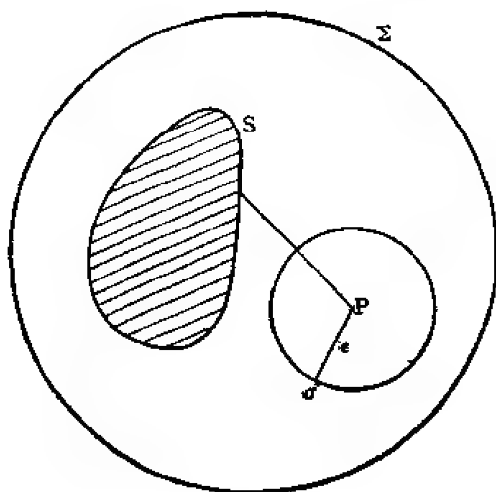


图 2.7

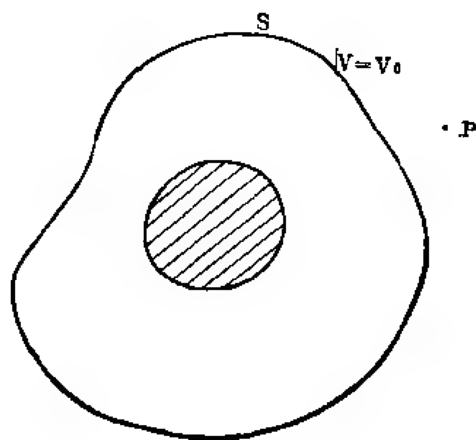


图 2.8

上取一适当的面积分布所产生的力位等效。所以格林公式也叫做等效层定理。由这个定理还可引出一个有意义的结果：

设 S 是物体之外的一个等位面：$V = V_0$，P 点在 S 之外图 2.8。由式（2.17a），

$$V_P = \frac{V_0}{4\pi}\int_s \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)ds - \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}ds,$$

但此式右端第一项等于零。故

$$V_P = -\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}ds。 \tag{2.18}$$

S 是一个等位面。此式称为沙斯尔（Chasles）定理，它表明在计算力位时，任一物体可以用它的任一外部等位面上的适当单层分布所替代。

4. 唯一性定理和狄利克雷问题

在物体之外，引力位满足拉普拉斯方程。在一定条件之下，拉普拉斯方程只有一个确定的解。因此若用任何方法得到一个解，而这个解又满足所给的条件，则这个解必然就是正确的解。讨论谐函数唯一性的条件是位论的重要课题之一。

设所有质量都位于 S 曲面之内。故在 S 外，引力位 V 是一个谐函数，即 $\nabla^2 V = 0$。代入式（2.13c），令 $\phi = \varphi = V$，则

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv = \int_s V\frac{\partial V}{\partial n}ds。 \tag{2.19}$$

现在要证明：若 S 面上的 V 值分布为已知，则 S 面外的 V 值即完全确定，即 V 只有一个解。因为如果不是如此，则可假定 V 尚有其他一个解 V'。V 和 V' 都满足拉普拉斯方程并在 S 上具有同值。令 $U = V - V'$。则在 S 上，$U = 0$，代入上式则

$$\int_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dv = 0,$$

故 $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$，$U =$ 常数。因在 S 上，$U = 0$，故 U 恒等于零，而

$$V = V'。$$

所以 V 的解是唯一的，即是说，若 V 是谐函数，它在 S 以外的解可以由它在 S 上的给定值完全确定。由谐函数的边界值来确定这个函数称为狄利克雷（Dirichlet）问题，或称为第一边界值问题。同样道理，若 S 面上的 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 是给定的，则仍有

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

$U = C$，但未必为零，故 $V - V' = C$，即 S 外的力位最多相差一常数。给定边界上的法向导数来确定一谐函数，称为第二边界值问题，或称为诺依曼（Neumann）问题。若在 S 上，给定 V 及 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 的线性组合，$hV + K\frac{\partial V}{\partial n}$，$h$ 及 K 为同号，则在 S 外，V 值完全确定；不然的话，仍令 $U = V - V'$，则在 S 上，$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{h}{K}U = 0$。代入式（2.13c）得

$$\int_v (\nabla U)^2 dv = \int_s U\frac{\partial U}{\partial n}ds = -\int \frac{h}{K}U^2 ds。$$

上式左端不能为负，右端不能为正，故 $\nabla U=0, U=0$。从而 $V=V'$。这称为混合边界值问题或称为第三边界值问题。在地球重力场的研究中，这三种边界值问题都是会遇到的。

（三）球谐函数

1. 拉普拉斯方程的解

解决重力场的问题时，常须解拉普拉斯方程。解球面问题时，以用球谐函数最为方便。用球极坐标 (r, θ, λ) 来表示，拉普拉斯方程是

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}=0。\tag{2.20}$$

用分离变数法，设

$$V=R(r)Y(\theta, \lambda).$$

代入(2.20)，得

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}=0。$$

第一项是 r 的函数而后两项则是 (θ, λ) 的函数，故只能有

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=K,\tag{2.20a}$$

$$\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}=-K,\tag{2.20b}$$

K 是一个参数。式(2.20a)的解是

$$R=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}。\tag{2.21}$$

A，B 是两个任意常数，$n(n+1)=K$。将 K 代入(2.20b)，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}+n(n+1)Y=0。\tag{2.22}$$

此式的解可以写为 Y_n。故

$$V=RY_n=\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)Y_n。\tag{2.23}$$

拉普拉斯方程的一般解可由上式叠加而成，即

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)Y_n。\tag{2.24}$$

V 称为球谐函数，写成式(2.23)的形式，则称为立体球谐函数。$V_n=r^nY_n$ 是 (x, y, z) 的 n 次多项式。Y_n 称为 n 次面谐函数，它只和球面上的坐标 (θ, λ) 有关系，与 r 无关。根据以上的定义，可以得到以下一条定理：若 V 是一个 n 次的球谐函数，则 V/r^{2n+1} 也是一个球谐函数，它的次数是 $-(n+1)$。因为 V 可以写成 Ar^nY_n 的形式，所以

$$V/r^{2n+1}=AY_n/r^{n+1}。$$

由式(2.23)可见它也是一个球谐函数。根据这个定理，若在球内某一点的力位为已知，则在同一向径上的球外一点的力位可以立刻写出来。

面谐函数的一个重要特征就是 Y_n 和 Y_m $(m\neq n)$ 是正交的，即是说

$$\int_s Y_m(\theta, \lambda) Y_n(\theta, \lambda) ds = 0, \tag{2.25}$$

S 是一个球面。按照格林定理 (2.13d)，令 $\varphi = r^n Y_n$，$\phi = r^m Y_m$，则

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \phi = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = n r^{n-1} Y_n,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = m r^{m-1} Y_m。$$

代入后，得

$$(n - m) r^{m+n-1} \int_s Y_m Y_n ds = 0。$$

因为 $n \neq m$，故得式(2.25)。将一球面函数展开成面谐函数的级数时，正交关系是极为重要的。另一个重要关系是面谐函数的归一关系。这就必须先求得面谐函数的具体函数形式。即是说要求解方程(2.22)。仍用分离变数法，代入

$$Y = \Theta(\theta) \Lambda(\lambda)。 \tag{2.26}$$

得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta = L,$$

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = -L,$$

L 是一参数。令 $L = m^2$，则上式是简谐方程，其解是

$$\Lambda = C_m \cos m\lambda + D_m \sin m\lambda。 \tag{2.27}$$

C_m，D_m 是任意常数。代入前式，得

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0。 \tag{2.28}$$

若令 $\cos\theta = \mu$，则上式化为

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta = 0。 \tag{2.28a}$$

式(2.28)或(2.28a)是 Θ 的二阶常微分方程，它有两个独立的级数解，都和参数 n，m 有关系。最重要的情况是 n，m 都是正整数或零，而且 $m \leqslant n$，其中一个解常用符号 $P_n^m(\mu)$ 或 $P_{nm}(\mu)$ 表示，称为第一类连带勒让德函数；第二类连带勒让德函数则用 $Q_n^m(\mu)$ 或 $Q_{nm}(\mu)$ 表示，但较少应用。由式(2.26)得

$$Y_{nm} = P_{nm}(C_m \cos m\lambda + D_m \sin m\lambda), \tag{2.29}$$

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} [(a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)], \tag{2.30}$$

由式(2.23)得

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A r^n + \frac{B}{r^{n+1}} \right) \sum_{m=0}^{n} [(a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)]。 \tag{2.31}$$

A，B，a_{nm}，b_{nm} 都是任意常数。这是谐函数 V 最一般的解，各常数可以由边界条件来确定。当然，V 也可以用 Q_{mn} 来表示，但此处从略。

若在上式中令 $m=0$，则由式(2.27)，Λ 等于常数，V 与 λ 无关。式（2.28a）简化为

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right]+n(n+1)\Theta=0。\tag{2.32}$$

称为勒让德微分方程，其解称为勒让德函数。因为上式是二阶的，所以有两个独立的解。当 n 是正整数时，两解各以符号 P_n 和 Q_n 表示，前者是一多项式，后者是一无穷级数。当问题具有轴对称性而对称轴为 $\theta=0$ 时，V 与 λ 无关，于是 $\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}=0$，式(2.22)直接化为式(2.32)。$P_n(\mu)=P_n(\cos\theta)=P_{n0}$，称为带谐函数，因为它与 λ 无关。当 $m\neq 0$ 时，$P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$ 或 $P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda$ 与 θ，λ 都有关系，所以称为田谐函数。

用级数法解式(2.32)，其一个解 P_n 是

$$P_n=\frac{1\cdot 3\cdots 2n-1}{n!}\mu^n-\frac{1\cdot 3\cdots 2n-3}{2\cdot(n-2)!}\mu^{n-2}+\frac{1\cdot 3\cdots 2n-5}{2\cdot 4\cdot(n-4)!}\mu^{n-4}。\tag{2.33}$$

当然，此式若乘以任意常数时，仍是一个解。当 n 是正整数时，上式是一个多项式。令 m 为一整数，等于 $\frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$，则上式可以写成

$$\begin{aligned}P_n(\mu)&=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}\mu^{n-2s}\\&=\frac{1}{2^n n!}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!}\mu^{n-2s}\\&=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\mu^{2n-2s}。\end{aligned}\tag{2.33a}$$

但是最后的连加正是 $(\mu^2-1)^n$ 的展式。所以

$$P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n。\tag{2.34}$$

勒让德多项式还可用其他方法得到。例如：设 P，Q 两点的向径各为 r_0 和 r，夹角为 ϕ。令距离 PQ 为 R，则

$$R^2=r_0^2-2r_0r\cos\phi+r^2。\tag{2.35}$$

若 $r_0>r$，则 $\frac{1}{R}$ 可展成 r 的级数，并可写成以下形式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_0}+P_1\frac{r}{r_0^2}+\cdots P_n\frac{r^n}{r_0^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_0^{n+1}}P_n(\cos\phi)。\tag{2.36a}$$

若 $r_0<r$，则 $\frac{1}{R}$ 可展成 $\frac{1}{r}$ 的级数

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+P_1\frac{r_0}{r^2}+\cdots P_n\frac{r_0^n}{r^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi)。\tag{2.36b}$$

实际由(2.35)展开的结果，此处的 P_n 恰与式(2.33)完全一致，不过须注意 ϕ 是 r_0 与 r 的夹角。若 r_0 或 r 与 z 轴重合，则 $\phi=\theta$。式(2.36)称为罗巨格公式。

式(2.36)可以写成以下形式

$$(1-2h\mu+h^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_1^\infty h^n P_n,$$

h 为 r_0 与 r 之比，$\mu=\cos\phi$。按 h 求导数，得

$$(\mu-h)(1-2h\mu+h^2)^{-3/2}=\sum_1^\infty nh^{n-1}P_n,$$

所以，

$$(\mu-h)\left(1+\sum_1^\infty h^n P_n\right)=(1-2h\mu+h^2)\sum_1^\infty nh^{n-1}P_n,$$

比较两边 h^n 的系数，得

$$(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}=(2n+1)\mu P_n。\tag{2.37}$$

这是一个极有用的相邻的勒让德多项式之间的递推关系。由(2.37)或(2.34)，可以极容易地计算出各次多项式。举例如下：

$$P_0(\mu)=1 \qquad P_3(\mu)=\frac{5}{2}\mu^3-\frac{3}{2}\mu,$$

$$P_1(\mu)=\mu \qquad P_4(\mu)=\frac{35}{8}\mu^4-\frac{15}{4}\mu^2+\frac{3}{8},$$

$$P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2} \qquad P_5(\mu)=\frac{63}{8}\mu^5-\frac{35}{4}\mu^3+\frac{15}{8}\mu,$$

按照 P_n 的定义(2.33)，(2.34)或(2.36)，不难证明以下的正交和归一关系

$$\int_{-1}^{+1}P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu=0,\ (n\neq m),\tag{2.38}$$

$$\int_{-1}^{+1}[P_n(\mu)]^2 d\mu=\frac{2}{2n+1}。\tag{2.39}$$

3. 连带勒让德函数

将勒让德方程(2.32)求 m 次导数，并令 $v=d^m\Theta/d\mu^m$，得

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2\mu(m+1)\frac{dv}{d\mu}+(n-m)(n+m+1)v=0。$$

令 $w=(1-\mu^2)^{m/2}v$，代入上式，

$$(1-\mu^2)\frac{d^2w}{d\mu^2}-2\mu\frac{dw}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]w=0。$$

此式与式(2.28a)完全相同，其解为连带勒让德函数。第一类的解以 $P_{nm}(\mu)$ 表示。由以上推导，立见

$$P_{nm}(\mu)=(1-\mu^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}。\tag{2.40}$$

同理，第二类的解 $Q_{nm}(\mu)$ 也可以写为

$$Q_{nm}(\mu)=(1-\mu^2)^{m/2}\frac{d^mQ_n(\mu)}{d\mu^m}。\tag{2.41}$$

P_{nm}，Q_{nm} 均称为 n 次 m 阶的连带勒让德函数。以下列出几个较低次的 $P_{nm}(\mu)$ 备考：

$$P_{11}=\sin\theta=(1-\mu^2)^{1/2}$$

$$P_{21} = 3\sin\theta\cos\theta = 3\mu(1-\mu^2)^{1/2}$$
$$P_{22} = 3\sin^2\theta = 3(1-\mu^2)$$
$$P_{31} = \frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1) = \frac{3}{2}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(5\mu^2-1)$$
$$P_{32} = 15\sin^2\theta\cos\theta = 15\mu(1-\mu^2)$$
$$P_{33} = 15\sin^3\theta = 15(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}。$$

为了求得 P_{nm} 的正交和归一关系，将 P_{nm} 及 $P_{n'm'}$ 代入各自的微分方程（2.28a）并相减，得

$$[n(n+1) - n'(n'+1)]P_{nm}P_{n'm'} - \frac{m^2 - m'^2}{1-\mu^2}P_{nm}P_{n'm'}$$
$$= \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\left(P_{nm}\frac{dP_{n'm'}}{d\mu} - P_{n'm'}\frac{dP_{nm}}{d\mu}\right)\right]。$$

求积分，得

$$[n(n+1) - n'(n'+1)]\int_{-1}^{+1}P_{nm}P_{n'm'}d\mu$$
$$= (m^2 - m'^2)\int_{-1}^{+1}P_{nm}P_{n'm'}\frac{d\mu}{1-\mu^2},$$

故可见

$$\int_{-1}^{+1}P_{nm}P_{n'm}d\mu = 0, \qquad 若\ n \neq n', \tag{2.42}$$

$$\int_{-1}^{+1}P_{nm}P_{nm'}\frac{d\mu}{1-\mu^2} = 0, \quad 若\ m \neq m', \tag{2.43}$$

若 $n = n'$，$m = m'$，则由式(2.40)，得

$$\int_{-1}^{1}[P_{nm}]^2d\mu = (n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{m-1}\left(\frac{d^{m-1}P_n}{d\mu^{m-1}}\right)^2d\mu$$
$$= (n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}[P_{n,m-1}]^2d\mu。$$

由此递推，得

$$\int_{-1}^{1}[P_{nm}(\mu)]^2d\mu = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{1}[P_n(\mu)]^2d\mu = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}。 \tag{2.44}$$

4. 面谐函数的正交关系和函数的展开

任一球面上的函数 $f(\theta,\lambda)$ 可以展成面谐函数 $Y_n(\theta,\lambda)$ 的级数

$$f(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[a_{nm}R_{nm}(\theta,\lambda) + b_{nm}S_{nm}(\theta,\lambda)], \tag{2.45}$$

式中

$$R_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$$
$$S_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda。 \tag{2.46}$$

a_{nm}，b_{nm} 是待定常数。在确定这些常数时，须利用球面上的正交和归一关系。在单位半径的球面上，面元 ds 等于立体角 $d\omega = \sin\theta d\theta d\lambda$，$\int_s = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}$。利用以上勒让德函数的正交及归一关系，立得

$$\left.\begin{aligned}&\int_s R_{nm}(\theta,\lambda)R_{sr}(\theta,\lambda)d\omega=0\\&\int_s S_{nm}(\theta,\lambda)S_{sr}(\theta,\lambda)d\omega=0\end{aligned}\right\}\ s\neq n\ 或\ r\neq m, \tag{2.47}$$

$$\int_s R_{nm}(\theta,\lambda)S_{sr}(\theta,\lambda)d\omega=0\quad 任何情况, \tag{2.48}$$

$$\int_s [R_{n0}(\theta,\lambda)]^2 d\omega=\frac{4\pi}{2n+1}, \tag{2.49}$$

$$\int_s [R_{nm}(\theta,\lambda)]^2 d\omega=\int_s [S_{nm}(\theta,\lambda)]^2 d\omega=\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}。 \tag{2.50}$$

根据这些关系，可得

$$\begin{aligned}a_{n0}&=\frac{2n+1}{4\pi}\int_s f(\theta,\lambda)P_n(\cos\theta)d\omega,\\a_{nm}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_s f(\theta,\lambda)R_{nm}(\theta,\lambda)d\omega,\\b_{nm}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_s f(\theta,\lambda)S_{nm}(\theta,\lambda)d\omega。\end{aligned} \tag{2.51}$$

以上各公式的系数比较复杂，且当 $m=0$ 时，公式的形式也略有不同。在重力的讨论中，时常将通用的 R_{nm} 和 S_{nm} 乘以一定的常数，这样可使其他一些关系在形式上化简，便于记忆。定义：

$$\bar{R}_{n0}(\theta,\lambda)=\sqrt{2n+1}\,R_{n0}(\theta,\lambda)=\sqrt{2n+1}\,P_n(\cos\theta)\quad m=0 \tag{2.52}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{R}_{nm}(\theta,\lambda)\\\bar{S}_{nm}(\theta,\lambda)\end{aligned}\right\}=\sqrt{2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\left\{\begin{aligned}R_{nm}(\theta,\lambda)\\S_{nm}(\theta,\lambda)\end{aligned}\right.\ m\neq 0 \tag{2.53}$$

则正交关系(2.47)，(2.48)仍适用，但归一关系(2.49)，(2.50)则化简为

$$\frac{1}{4\pi}\int_s \bar{R}^2_{nm}(\theta,\lambda)d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_s \bar{S}^2_{nm}(\theta,\lambda)d\omega=1。 \tag{2.54}$$

这个关系表明，在单位球面 ($r=1$) 上，$\bar{R}^2_{nm}$ 和 $\bar{S}^2_{nm}$ 的平均值为 1。将(2.52)，(2.53)，(2.54)代入(2.45)，得

$$f(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[\bar{a}_{nm}\bar{R}_{nm}(\theta,\lambda)+\bar{b}_{nm}\bar{S}_{nm}(\theta,\lambda)], \tag{2.55}$$

式中

$$\begin{aligned}\bar{a}_{nm}&=\frac{1}{4\pi}\int_s f(\theta,\lambda)\bar{R}_{nm}(\theta,\lambda)d\omega,\\\bar{b}_{nm}&=\frac{1}{4\pi}\int_s f(\theta,\lambda)\bar{S}_{nm}(\theta,\lambda)d\omega。\end{aligned} \tag{2.56}$$

式(2.56)比式(2.51)简单得多。实际上若将勒让德多项式重新定义为

$$\begin{aligned}&\bar{P}_{n0}(\cos\theta)=\sqrt{2n+1}\,P_{n0}(\cos\theta),\\&\bar{P}_{nm}(\cos\theta)=\sqrt{2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_{nm}(\cos\theta),\quad m\neq 0\\&\bar{R}_{nm}(\theta,\lambda)=\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda,\\&\bar{S}_{nm}(\theta,\lambda)=\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda,\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\bar{a}_{n0} = \frac{a_{n0}}{\sqrt{2n+1}},$$

$$(\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm}) = \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} (a_{nm}, b_{nm}) \quad m \neq 0,$$

则可得到(2.54)及(2.56)。

5. 加法公式和泊松积分

有时需要将相对于某一极轴的 P_n 用相对于其他极轴的面谐函数来表示。为此，设 $f(\theta, \lambda)$ 为在单位球面上一任意连续函数。由式(2.45)，f 可展成面谐函数的级数

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)]$$

代人(2.51)和(2.46)，得

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta', \lambda') [P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta) P_{nm}(\cos\theta') \cos m(\lambda' - \lambda)] \sin\theta' d\theta' d\lambda', \quad (2.58)$$

θ'，λ' 是积分的变数。相对于 z 轴，P 点的坐标是 (θ, λ)，P'点的坐标是 (θ', λ')图 2.9。两点之间的角距离 ψ 为

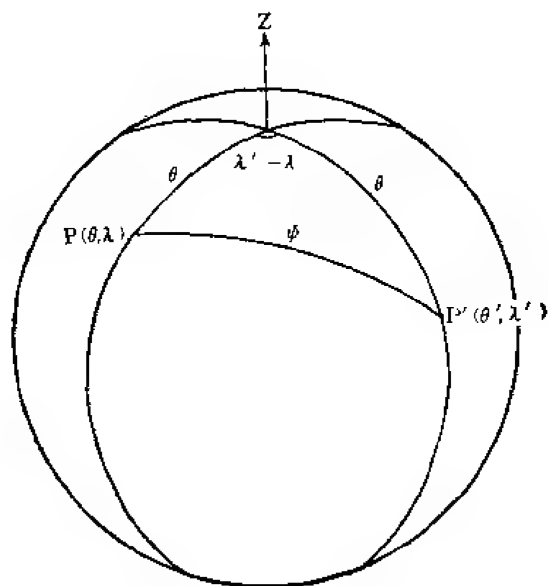


图 2.9

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)。 \quad (2.59)$$

若取 z 轴使之通过 P 点，则 $\theta = 0$，(λ 为任意，可取为0)，故

$$P_n(\cos\theta) = 1, \quad P_{nm}(\cos\theta) = 0,$$

此时若将原坐标 (θ', λ') 改写为 (θ'_1, λ'_1)，则 $\theta'_1 = \psi$，而

$$f(0, 0) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta'_1, \lambda'_1) \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\psi) \sin\theta'_1 d\theta'_1 d\lambda'_1。$$

现再将 z 轴返回原处，上式变为

$$f(\theta, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta'_1, \lambda'_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\psi) \sin\theta' d\theta' d\lambda'。 \quad (2.60)$$

将此式与(2.58)相比，立得

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta) P_{nm}(\cos\theta') \cos m(\lambda' - \lambda), \quad (2.61)$$

此式称为加法公式。

若 $f(\theta, \lambda)$ 是力位 $V(r, \theta, \lambda)$ 在一球面上的值，显然在球面之外，即当 $r > a$ 时，

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \sin\theta' d\theta' d\lambda',$$

由公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)h^n P_n(\cos\psi) = \frac{1-h^2}{(1-2h\cos\psi+h^2)^{3/2}}, \quad h < 1,$$

得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) = \frac{a(r^2-a^2)}{(a^2+r^2-2ar\cos\psi)^{3/2}},$$

$$\therefore \qquad V_e(r, \theta, \lambda) = \frac{a(r^2-a^2)}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(\theta', \lambda') \sin\theta' d\theta' d\lambda'}{(a^2+r^2-2ar\cos\psi)^{3/2}}。 \tag{2.62}$$

同理，在球面之内，即当 $r < a$ 时

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{n} P_n(\cos\psi) \sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

$$= \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(\theta', \lambda') \sin\theta' d\theta' d\lambda'}{(a^2+r^2-2ar\cos\psi)^{3/2}}。 \tag{2.63}$$

式(2.62)和(2.63)称为泊松积分，它解决了球面上的第一类边界值问题。

(四) 谐 力 位

设在半径为 a 的球体上覆盖一层，其面密度 $\sigma = Y_n(\theta, \lambda)$。求在球内或球外一点 P 所产生的引力位 V。若 P 在球内，则 $r < a$,

$$V_i = G\int_s \frac{Y_n ds}{PQ} = G\int_s \frac{Y_n ds}{\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}}$$

$$= G\int_s \frac{Y_n}{a}\left(1+\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta+\cdots)\right)ds$$

$$= \frac{4\pi Ga}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \lambda)。 \tag{2.64a}$$

若 P 在球外，则 $r > a$,

$$V_0 = \frac{4\pi Ga}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda)。 \tag{2.64b}$$

由以上二式，立见当 $r = a$,

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r} = 4\pi G Y_n(\theta, \lambda)。$$

与式(2.10)符合。由式(2.64)可得结论：若在一球体上有一面积分布 $Y_n(\theta, \lambda)$，则其所产生之力位必与 Y_n 成正比。

若面积分布为一任意连续函数 σ，则可将 σ 展成面谐函数的级数，

$$\sigma = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

其中 Y_0 为一常数。故立得

$$V_i = 4\pi Ga\left\{Y_0 + \frac{Y_1}{3}\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{Y_2}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots\right\} \quad r < a,$$

$$V_0 = 4\pi G a\left\{Y_0\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{Y_1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{Y_4}{5}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\right\},\ r > a, \tag{2.65}$$

式(2.64),(2.65)称为谐力位。

三、地球的重力场

(一) 一 级 近 似

地球近似一个扁球体，长轴为 $2a$，短轴为 $2c$，平均半径为 a_m，扁率为 e。扁率的定义为 $(a-c)/a$，或 $(a-c)/c$ 或 $(a-c)/a_m$。地球的扁率略大于三百分之一，是一个很小的数值，可以做为一级小数来对待。在一级近似的理论中，以上三个定义并无区别。

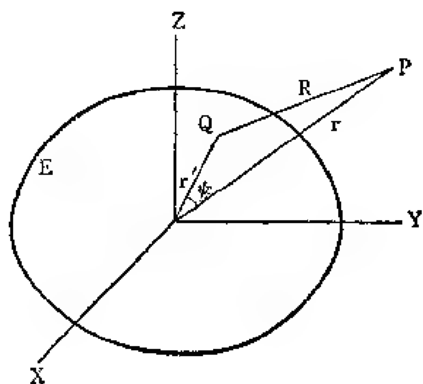


图 2.10

在扁球体 E 以外一点 P 的引力位 V 为

$$V = G\int_v \frac{\rho dv}{R} = G\int_v \rho dv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)。$$

因 $\cos\psi = (xx' + yy' + zz')/rr'$（图 2.10），上式展至 P_2 并略去以后各项，得

$$V = G\int \rho dv \cdot \frac{1}{r}\left[1 + \frac{xx'+yy'+zz'}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2r'^2 - 3(xx'+yy'+zz')^2}{r^4} + \cdots\right],$$

右端的 $\int \rho dv$ 为 E 的质量 M。按照转动惯量及惯量积的定义，

$$A = \int \rho(y'^2 + z'^2)dv,\quad B = \int \rho(z'^2 + x'^2)dv,\quad C = \int \rho(x'^2 + y'^2)dv,$$

$$D = \int \rho y'z'dv,\qquad E = \int \rho z'x'dv,\qquad F = \int \rho x'y'dv。$$

若取重心为原点，惯量主轴为坐标轴，则

$$D = E = F = 0,$$

$$\int \rho x\, dv = \int \rho y' dv = \int \rho z' dv = 0,$$

$$V = G\left(\frac{M}{r} + \frac{(B+C-2A)x^2 + (C+A-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2}{2r^5}\right)$$

$$+ \cdots = G\left(\frac{M}{r} + \frac{A+B+C-3I}{2r^3}\right) + \cdots, \tag{2.66}$$

I 是以 OP 为轴的转动惯量，$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2$，l, m, n 为 OP 的方向余弦。上式称为麦柯拉夫（MacCullagh）公式。这是一个一级近似的公式。

按式(2.7)，地球的重力位 W 为

$$W = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi,$$

$\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$ 是地心纬度。取一与海面最逼近的重力等位面 $W=W_0=$ 常数，将式(2.66)代入，化简后，得

$$W=\frac{GM}{r}\left\{1-\frac{K}{2r^2}(3\sin^2\varphi-1)+\frac{3(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{\omega^2r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right\}=W_0,$$

式中

$$K=\frac{1}{M}\left(C-\frac{A+B}{2}\right)。$$

重力加速度 g 垂直于等位面(为简便起见，g 即简称为重力)。若向下为正，则

$$g=-\frac{\partial W}{\partial n}\approx-\frac{\partial W}{\partial r},$$

因 $\cos(n,r)\approx 1$，故

$$g=\frac{GM}{r^2}\left\{1-\frac{3K}{r^2}P_2(\sin\varphi)+\frac{9(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda-\frac{\omega^2r^3}{GM}\cos^2\varphi\right\},$$

若 E 为扁球体，则 $B=A$，$K=\frac{C-A}{M}$，上二式化简为

$$W=\frac{GM}{r}\left\{1-\frac{K}{r^2}P_2+\frac{\omega^2r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right\}=W_0, \tag{2.67}$$

$$g=\frac{GM}{r^2}\left\{1-\frac{3K}{r^2}P_2-\frac{\omega^2r^3}{GM}\cos^2\varphi\right\}。 \tag{2.68}$$

P_2 是二次勒让德多项式，$P_2(\cos\theta)=P_2(\sin\varphi)$。式(2.67)为重力等位面的方程，其括弧内的后两项都是一级小数。令 $a=GM/W_0$，则(2.67)可写为

$$r=a\left\{1-\frac{K}{r^2}P_2+\frac{\omega^2r^3}{2GM}\cos^2\varphi\right\}。$$

在一级近似中，括弧中的 r 可以 a 代替。令 $J_2=K/a^2$，则上式可写为

$$r=a\left\{1-J_2P_2+\frac{\omega^2a^3}{2GM}\cos^2\varphi\right\}\approx a(1-e_1\sin^2\varphi)。 \tag{2.69}$$

其中

$$e_1=\frac{3}{2}J_2+\frac{\omega^2a}{2GM}=\frac{3}{2}J_2+\frac{m}{2}, \tag{2.70}$$

$$m=\frac{\omega^2a^3}{GM}=\omega^2a\Big/\frac{GM}{a^2}, \tag{2.71}$$

e_1 是等位面的扁率，m 是赤道离心力与引力之比，e_1，m，J_2 都是一级小量。将(2.69)代入(2.68)，只留一级小量，化简后，得

$$g=\frac{GM}{a^2}\left\{1+\frac{1}{2}J_2-2m+\left(2m-\frac{3}{2}J_2\right)\sin^2\varphi\right\}\approx g_e(1+\beta\sin^2\varphi), \tag{2.72}$$

式中

$$\beta=2m-\frac{3}{2}J_2=(g_p-g_e)/g_e, \tag{2.73}$$

g_e 和 g_p 是赤道和两极的重力加速度，β 可叫做重力的扁率。由上式立得

$$e_1 + \beta = \frac{5}{2} m_\circ \tag{2.74}$$

此式称为克雷若定理，但只是在一级近似时才是正确的。由重力测量可定 β，m 可以独立测定，于是由(2.72)便可算出扁率 e_1。

重力公式(2.70)只是在等位面为(2.69)这样简单形式时才适用。斯托克斯(G. G. Stokes)将以上计算推广，但仍取一级近似。他将引力位 V 和重力等位面的向径 r 都展开为面谐函数的级数，即

$$V = G\left[\frac{M}{r} + \frac{Y_1}{r^2} + \cdots\right] = \frac{GM}{r} + G\sum_1^n \frac{Y_n}{r^{n+1}}$$

$$r = a\left(1 + \sum_1^n u_n\right)。$$

Y_n 和 u_n 都是 n 次面谐函数，$\sum u_n$ 是一级小数，故其高级项可以略去。于是得

$$r^m = a^m(1 + \sum u_n)^m \approx a^m(1 + m\sum u_n)。$$

因

$$V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi = W_0,$$

将上式代入，得

$$\frac{GM}{a}\left(1 - \sum_1^n u_n\right) + G\sum_1^n \frac{Y_n}{a^{n+1}} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 + \omega^2 a^2\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) = W_0$$

比较两端各次面谐函数的系数，故有

$$GM = aW_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^3,$$

$$GY_1 = GMau_1,$$

$$GY_2 = GMa^2u_2 - \frac{1}{2}\omega^2 a^5\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right),$$

$$GY_n = Ga^n u_n,\quad n = 3, 4, \cdots,$$

所以

$$W = GM\left(\frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}u_1 + \cdots\right) - \frac{\omega^2 a^5}{2r^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi,$$

$$g \approx \frac{GM}{a^2}\left(1 - 2\sum_1^n u_n\right) + \frac{GM}{a^2}(2u_1 + 3u_2 + 4u_3 + \cdots)$$
$$- \frac{3}{2}\omega^2 a\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) - \omega^2 a(1 - \sin^2\varphi)。$$

令 $\dfrac{GM}{a^2} - \dfrac{3}{2}\omega^2 a = g_m$，$\omega^2 a/g_m = m$，则上式可化简为

$$g = g_m\left\{1 - \frac{5}{2}m\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) + \sum_2^n (n-1)u_n\right\}。 \tag{2.75}$$

显然 g_m 是等位面上 g 的平均值。由式(2.73)可见，若等位面的形状为已知(即各 u_n 为已知)，则可求该面上的 g 值变化。反之，若 g 值的变化可以测得，则可由上式确定 u_n。(式(2.75)不含 u_1，这是因为原点取在重心的原故)。于是便得到等位面的形状。

（二）二 级 近 似

在以上的公式中，只保留了 e，m 的一次项。若将 e^2，m^2，em 等项也保留，结果要繁得多。一般的作法是将 V 展成面谐函数的级数。由于轴对称性，Y_n 化简为 P_n；由于 V 在赤道两边是对称的，所以 n 是偶数(其实观测结果，这两点也只是几近)。于是可写

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi) - J_4\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\sin\varphi) - \cdots\right]$$

$$= \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\right]。 \quad (2.76)$$

各 J_{2n} 都是常数。可以证明

$$J_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{3\varepsilon^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(1 - n + 5n\,\frac{C-A}{M\varepsilon^2 a^2}\right), \quad (2.77)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}。$$

是椭球纵截面的偏心率。为了使物理意义更具体起见，此处不用式(2.76)而引述杰弗瑞斯(H. Jeffreys)的推导方法。

设参考等位面为一旋转椭球面，其方程为

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{c^2} = 1。$$

其纵截面的长短半轴各为 a，$c = a(1-e)$，e 为扁率。故

$$r^2 = \frac{a^2(1-e)^2}{(1 - e\cos^2\varphi)^2 + e^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

展开至二级小数，得

$$r = \frac{a(1-e)}{1 - e\cos^2\varphi}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right) + O(e^3),$$

$$\frac{a}{r} = 1 + e\sin^2\varphi + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}e^2\sin^4\varphi。$$

将 V 写成以下形式：

$$V = \frac{GM}{a}\left[\frac{a}{r} - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2(\sin\varphi) + \frac{8D}{35}\left(\frac{a}{r}\right)^5 P_4(\sin\varphi)\right],$$

J_2 和 D 均为待定常数。令

$$m = \frac{\omega^2 a^2 c}{GM} = \frac{\omega^2 a^3(1-e)}{GM} \quad (2.78)$$

(注意 m 的定义与以前略有不同)，则

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{GMm}{a^3(1-e)}\cos^2\varphi\,\frac{a^2(1-e)^2}{(1-e\cos^2\varphi)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{GMm}{a}\left[1 + e - (1+3e)\sin^2\varphi + 2e\sin^4\varphi\right] + O(e^2m),$$

故

$$W=\frac{GM}{a}\left\{1+\left(e+\frac{3}{2}e^2\right)\sin^2\varphi-\frac{1}{2}e^2\sin^4\varphi-J_2(1+3e\sin^2\varphi)P_2(\sin\varphi)\right.$$

$$+D\left(\sin^4\varphi-\frac{6}{7}\sin^2\varphi+\frac{3}{35}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{2}m[1+e-(1+3e)\sin^2\varphi+2e\sin^4\varphi]\right\}=W_0。\tag{2.79}$$

由 $\sin^2\varphi$ 和 $\sin^4\varphi$ 的系数,得

$$e+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}J_2(1-e)-\frac{6}{7}D-\frac{1}{2}m(1+3e)=0,\tag{2.80}$$

$$-\frac{1}{2}e^2-\frac{9}{2}J_2e+D+me=0。\tag{2.81}$$

代入(2.70),得

$$D=\frac{7}{2}e^2-\frac{5}{2}me。$$

再代入(2.80),得

$$\frac{3}{2}J_2=e-\frac{1}{2}m+e\left(\frac{1}{7}m-\frac{1}{2}e\right)。$$

将 D 及 J_2 代入(2.79),即可得 W。由

$$g^2=\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\Big/\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\right],$$

得

$$g=-\frac{\partial W}{\partial r}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{GM}\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right]$$

$$=\frac{GM}{a^2}\left\{1+e-\frac{3}{2}m+e\left(e-\frac{27}{14}m\right)\right.$$

$$+\left[\frac{5}{2}m-e-e\left(e-\frac{39}{14}m\right)\right]\sin^2\varphi$$

$$\left.-\frac{1}{8}e(7e-15m)\sin^2 2\varphi\right\}。\tag{2.82}$$

若 g_e 为赤道上的 g 值,则

$$\frac{GM}{a^2}=\frac{g_e}{1+e-\frac{3}{2}m}[1+O(e^2)],$$

故

$$g=g_e\left[1+\left(\frac{5}{2}m-e+\frac{15}{4}m^2-\frac{17}{14}em\right)\sin^2\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}e(7e-15m)\sin^2 2\varphi\right]。\tag{2.83}$$

以上各式是用地心纬度 φ 表示的。若用地理纬度 ϕ,则由

$$\tan(\phi-\varphi)=-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}=e\sin 2\varphi+O(e^2)$$

得

$$g = g_e\left[1 + \left(\frac{5}{2}m - e + \frac{15}{4}m^2 - \frac{17}{14}em\right)\sin^2\phi + \left(\frac{1}{8}e^2 - \frac{5}{8}em\right)\right]\sin^2 2\phi。\qquad (2.84)$$

由式(2.83)或(2.84)可见，若取二级近似，重力公式要复杂多了。

(三) 椭球坐标和索米扬那公式

除了用级数展开外，重力公式还可以写成一个闭合的形式；这是个精确式而不是近似式。为了求得这样的公式，需要用到椭球坐标。以下对此做一简单介绍。

一个椭球面 E_0 的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2。\qquad (2.85)$$

定义

$$H(\lambda) = \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 \qquad (2.86)$$

$$R(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)。\qquad (2.87)$$

方程 $H(\lambda) = 0$ 表示一个与 E_0 共焦的二次曲面，λ 是一个参数。当 λ 极大而又为正时，这个曲面是一个近于球面的椭球面。当 $\lambda = 0$ 时，它与 E_0 重合。当 λ 再减小但仍大于 $-c^2$ 时，曲面仍是椭球。当 λ 趋于 $-c^2$ 时，椭球的三个半轴趋于 $\sqrt{a^2-c^2}$，$\sqrt{b^2-c^2}$，0，而椭球面趋于一个扁的椭圆面：

$$\frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} \leqslant 1, \quad z = 0。$$

当 λ 小于 $-c^2$ 时，曲面是一个单叶双曲面，当其趋近于 $-b^2$ 时，曲面趋于 xz 面上的双曲面

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} \leqslant 1, \quad y = 0。$$

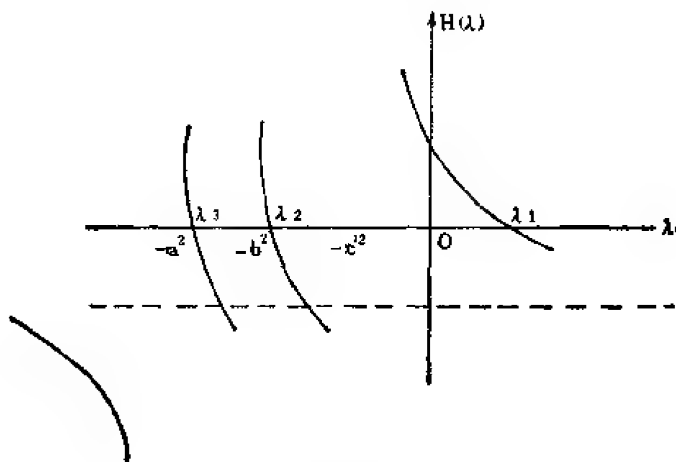


图 2.11

当 λ 由 $-b^2$ 减到 $-a^2$ 时，曲面由 xz 面上的双叶双曲面过渡到 yz 面。

当 λ 在以上各区间变化时，每一族曲面都扫过空间所有各点。因此对于任一点 (x, y, z) 都可以有一个椭球面，一个单叶双曲面和一个双叶双曲面通过，而与这三个曲面相应的参数 λ，就是方程

$$H(\lambda)R(\lambda) = 0$$

的三个实根，它们的值是按以下不等式排列的：

$$-a^2 \leqslant \lambda_3 \leqslant -b^2 \leqslant \lambda_2 \leqslant -c^2 \leqslant \lambda_1 < \infty。$$

若 (x, y, z) 是给定的，则由上式便可求 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，这就是相应于 (x, y, z) 的椭球坐标。$\lambda_i =$ 常数 $(i = 1, 2, 3)$，是三个二次曲面，特别 $\lambda_1 =$ 常数，是一个椭球，$\lambda_1 = 0$ 就是椭球 E_0。可以证明这三个曲面是彼此正交的。由 H 及 R 的定义，可以得到以下的关系：

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{1}{(c^2+\lambda)^2}\right) = -P(\lambda),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{a^2+\lambda}, \frac{2y}{b^2+\lambda}, \frac{2z}{c^2+\lambda}\right),$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{(a^2+\lambda)P(\lambda)}, \frac{2y}{(b^2+\lambda)P(\lambda)}, \frac{2z}{(c^2+\lambda)P(\lambda)}\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = R(\lambda)\left[\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right], \tag{2.88}$$

定义

$$\phi_n = \int_\lambda^\infty H^n(\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}。 \tag{2.89}$$

ϕ_n 叫做莫勒拉（Morera）函数。现证明 ϕ_n 是一个谐函数。将 (x, y, z) 写为 x_i $(i = 1, 2, 3)$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} &= \frac{\partial \phi_n}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = -\frac{2x_i H^n(\lambda)}{(a_i^2+\lambda)P(\lambda)\sqrt{R(\lambda)}} \\ &\quad + 2nx_i\int_\lambda^\infty \frac{H^{n-1}(\lambda)d\lambda}{(a_i^2+\lambda)\sqrt{R(\lambda)}} \\ &= 2nx_i\int_\lambda^\infty \frac{H^{n-1}(\lambda)d\lambda}{(a_i^2+\lambda)\sqrt{R(\lambda)}}。\end{aligned}$$

因 $H(\lambda) = 0$。

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x_i^2} = 2n\int_\lambda^\infty \frac{H^{n-1}(\lambda)d\lambda}{(a_i^2+\lambda)\sqrt{R(\lambda)}} + 4n(n-1)\int_\lambda^\infty \frac{x_i^2 H^{n-2}(\lambda)d\lambda}{(a_i^2+\lambda)^2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_n &= 2n\int_\lambda^\infty \frac{H^{n-1}(\lambda)}{[R(\lambda)]^{3/2}}dR + 4n(n-1)\int_\lambda^\infty \frac{P(\lambda)H^{n-2}(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}d\lambda \\ &= -4n\int_\lambda^\infty H^{n-1}(\lambda)d\frac{1}{\sqrt{R(\lambda)}} - 4n(n-1)\int_\lambda^\infty \frac{H^{n-2}(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}dH(\lambda) \\ &= -4n\int_\lambda^\infty H^{n-1}(\lambda)d\frac{1}{\sqrt{R(\lambda)}} - 4n\int_\lambda^\infty \frac{dH^{n-1}(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}} \\ &= -4n\left[\frac{H^{n-1}(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}\right]_\lambda^\infty = 0。\end{aligned}$$

函数 ϕ_n 在 $r \to \infty$ 时是有限的。因

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

若 $\lambda > 0$，则 $c^2 + \lambda \leqslant r^2 \leqslant a^2 + \lambda$，$\lim\limits_{r\to\infty} \frac{r}{\sqrt{\lambda}} = 1$。故

$$\lim_{r\to\infty} r\phi_n = \lim_{r\to\infty} r \int_{r^2}^{\infty} \left(\frac{r^2}{\lambda} - 1\right)^n \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} = (-1)^n \frac{n!2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}。 \tag{2.90}$$

对以后讨论最有关系的函数是 ϕ_0 和 ϕ_1。此处只讨论旋转椭球面，即 $a = b$ 的情况。

$$\phi_0 = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}} = \frac{2}{(a^2-c^2)^{1/2}} \tan^{-1}E(\lambda)。 \tag{2.91}$$

$$E(\lambda) = \left(\frac{a^2-c^2}{c^2+\lambda}\right)^{1/2}。 \tag{2.92}$$

在 E_0 上，$\lambda = 0$，

$$E(0) = \varepsilon = \frac{(a^2-c^2)^{1/2}}{c}。 \tag{2.92a}$$

ε 是纵截面的偏心率。故在 E_0 上，ϕ_0 是个常数。

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \int_{\lambda}^{\infty} \left(\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1\right) \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}} \\ &= (x^2+y^2)A_1 + z^2A_3 - \phi_0,\end{aligned} \tag{2.93}$$

式中

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}} = \frac{1}{\varepsilon^3c^3}\left(\tan^{-1}E - \frac{E}{1+E^2}\right), \\ A_3 &= \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}} = \frac{2}{\varepsilon^3c^3}(E - \tan^{-1}E)。\end{aligned} \tag{2.93a}$$

令 $x^2 + y^2 = s^2$。则 E_0 的方程可以写成 $z^2 = c^2(1 - s^2/a^2)$。

$$\phi_1 = s^2A_1 + c^2(1 - s^2/a^2)A_3 - \phi_0。 \tag{2.94}$$

故 ϕ_1 只与 s^2 成线性关系。

（四）重力公式的精确解

现在要解决的问题是要确定一个重力场使它满足以下的条件:

① 它必须等于引力场与离心力场之和。

② 它的一个等位面必须是一个旋转椭球面 E_0，其对称轴与旋转轴重合。

③ 产生引力位的所有质量都在椭球面 E_0 之内。

④ 引力位必须满足 $\lim\limits_{r\to\infty} rV = GM$。

根据这些条件，首先可以将重力位写为

$$W = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = V + \frac{1}{2}\omega^2s^2。$$

因在 E_0 上 W 是一常数，故可将 V 写成 ϕ_0 及 ϕ_1 的线性组合

$$V = K_1\phi_0 + K_2\phi_1 = 常数 - \frac{1}{2}\omega^2s^2。 \tag{2.95}$$

将(2.91)及(2.94)代入并比较两端 s^2 的系数,得

$$K_2 = \frac{a\omega^2}{2(c^2A_3 - a^2A_1)} = -\frac{\varepsilon^3c^3\omega^2(1+\varepsilon^2)}{2[(3+\varepsilon^2)\tan^{-1}\varepsilon - 3\varepsilon]}。\tag{2.96}$$

由

$$\lim_{r\to\infty} rV = \lim_{r\to\infty} r(K_1\phi_0 + K_2\phi_1) = GM,$$

得

$$K_1 = \frac{1}{2}GM + \frac{2}{3}K_2。\tag{2.97}$$

故

$$W = K_1\phi_0 + K_2\phi_1 + \frac{1}{2}\omega^2s^2 = \frac{1}{2}\left(GM + \frac{2}{3}K_2\right)\phi_0 + K_2\phi_1 + \frac{1}{2}\omega^2s^2,\tag{2.98}$$

式中的 ϕ_0, ϕ_1 及 K_2 可用式(2.91),(2 94)及(2.96)代入。

重力 g 的分量 g_s 和 g_z 可由下式计算:

$$g_s = -\frac{\partial W}{\partial s} = -K_1\frac{\partial\phi_0}{\partial s} - K_2\frac{\partial\phi_1}{\partial s} - \omega^2s,$$

$$g_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -K_1\frac{\partial\phi_0}{\partial z} - K_2\frac{\partial\phi_1}{\partial z}。$$

由 ϕ_0 及 ϕ_1 的定义,得

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial s} = \frac{-2s}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{1/2}}\frac{1}{P(\lambda)},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial s} = 2sA_1,$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial z} = \frac{-2z}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}}\frac{1}{P(\lambda)},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 2zA_3,$$

故

$$g_s = \frac{2s\left(\frac{1}{2}GM + \frac{2}{3}K_2\right)}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{1/2}}\frac{1}{P(\lambda)} - \frac{2sK_2}{(a^2-c^2)^{3/2}}\left(\tan^{-1}E - \frac{E}{1+E^2}\right) - \omega^2s,$$

$$g_z = \frac{2z\left(\frac{1}{2}GM + \frac{2}{3}K_2\right)}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}}\frac{1}{P(\lambda)} - \frac{4zK_2}{(a^2-c^2)^{3/2}}(E - \tan^{-1}E)。\tag{2.99}$$

若令 $s=(a^2+\lambda)^{1/2}$, $z=(c^2+\lambda)^{1/2}$, 则得到 g 在 E_λ 的赤道及两极的 g 值 $g_{a,\lambda}$ 及 $g_{c,\lambda}$ 并由此得出

$$\frac{2g_{a,\lambda}}{(a^2+\lambda)^{1/2}} + \frac{g_{c,\lambda}}{(c^2+\lambda)^{1/2}} = \frac{3GM}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}} - 2\omega^2。\tag{2.100}$$

此式称为庇猜梯 (Pizzetti) 定理。当 $\lambda=0$ 时,

$$\frac{2g_e}{a} + \frac{g_p}{c} = \frac{3GM}{a^2c} - 2\omega^2 = 4\pi G\rho_m - 2\omega^2。\tag{2.100a}$$

g_e 和 g_p 是地球赤道和两极的重力值, ρ_m 是地球的平均密度。

由式(2.99)还可得到

$$\frac{g_{c,\lambda}}{(c^2+\lambda)^{1/2}} - \frac{g_{a,\lambda}}{(a^2+\lambda)^{1/2}} = \frac{2K_2}{(a^2-c^2)^{3/2}}\left[3\tan^{-1}E - \frac{3+2E^2}{1+E^2}E\right] + \omega^2,$$

当 $\lambda = 0$ 时，此式可写成

$$\frac{g_p}{g_e} - \frac{c}{a} = \frac{g_p - g_e}{g_e} + \frac{a-c}{a} = \beta + e = 2q(\varepsilon)\,\frac{\omega^2 c}{g_e},$$

式中

$$q(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon - \tan^{-1}\varepsilon)}{(3+\varepsilon^2)\tan^{-1}\varepsilon - 3\varepsilon},\quad \varepsilon = E(0) = \frac{(a^2-c^2)^{1/2}}{c}。$$

与克雷若定理相比，此式可以改写成

$$\beta + e = \frac{5}{2}\,m\left[\frac{4}{5}\,(1-e)q(\varepsilon)\right],\ m = \frac{\omega^2 a}{g_e},\tag{2.101}$$

而因子 $\frac{4}{5}(1-e)q(\varepsilon) \approx 1$。克雷若定理是近似的，上式是它的修正。

E_0 是相当于 $\lambda = 0$ 的旋转椭球面。若它是一个等位面，就可以计算面上的重力值。索米扬那（C. Somigliana）首先证明在 E_0 上的任何三个重力值有一定的关系。这个关系叫做索米扬那公式。

设所有的质量都包含在 E_0 之内。取两个函数 V_0 和 V_1。它们在 E_0 之外是谐函数，但在 E_0 之上，取值

$$V_0 = 1,\quad V_1 = s^2,$$

在远处，

$$\lim_{r\to\infty} rV_0 = m_0,\quad \lim_{r\to\infty} rV_1 = m_1。$$

m_0，m_1 是两个任意常数。按照狄利克雷定理，V_0 和 V_1 是完全确定的。所以重力位可以写为

$$W = V + \frac{1}{2}\,\omega^2 s^2 = KV_0 - \frac{1}{2}\,\omega^2 V_1 + \frac{1}{2}\,\omega^2 s^2。$$

此式在 E_0 上等于常数 K。因

$$\lim_{r\to\infty} rV = GM,$$

故

$$\left\{\begin{aligned} K &= \frac{GM}{m_0} + \frac{\omega^2 m_1}{2m_0},\\ W &= \left(\frac{GM}{m_0} + \frac{\omega^2 m_1}{2m_0}\right)V_0 - \frac{1}{2}\,\omega^2 V_1 + \frac{1}{2}\,\omega^2 s^2,\\ g &= -\frac{\partial W}{\partial n} = -\left(\frac{GM}{m_0} + \frac{\omega^2 m_1}{2m_0}\right)\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{1}{2}\,\omega^2\frac{\partial}{\partial n}\,(V_1 - s^2)。\end{aligned}\right.\tag{2.102}$$

在 E_0 上取任意三点 P_i $(i = 1, 2, 3)$，则

$$g_i = -\left(\frac{GM}{m_0} + \frac{\omega^2 m_1}{2m_0}\right)\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)_i + \frac{\omega^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,(V_1 - s^2)_i,\ (i = 1, 2, 3)。$$

若以上三式不矛盾，必须有

$$\begin{vmatrix} g_1 & \left(\dfrac{\partial V_0}{\partial n}\right)_1 & \left[\dfrac{\partial}{\partial n}\,(V_1 - s^2)\right]_1 \\ g_2 & \left(\dfrac{\partial V_0}{\partial n}\right)_2 & \left[\dfrac{\partial}{\partial n}\,(V_1 - s^2)\right]_2 \\ g_3 & \left(\dfrac{\partial V_0}{\partial n}\right)_3 & \left[\dfrac{\partial}{\partial n}\,(V_1 - s^2)\right]_3 \end{vmatrix} = 0。\tag{2.103}$$

比较式(2.102)与式(2.98)，可以选择适当的 m_0 与 m_1 以使两式中 ϕ_0 与 V_0 的系数完全相等。于是得

$$V_0 = \phi_0,\quad V_1 = -\frac{2K_2}{\omega^2}\phi_1,$$

故

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \left[\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{P(\lambda)}}\,\frac{2}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{1/2}}。$$

变换坐标，使

$$\begin{aligned} s &= (a^2+\lambda)\cos\phi\sqrt{P(\lambda)}, \\ z &= (c^2+\lambda)\sin\phi\,\sqrt{P(\lambda)}。\end{aligned} \tag{2.104}$$

ϕ 是通过 P 点 E_0 的法线与 xy 面所夹的角(即纬度)，

$$P(\lambda_t) = \frac{s_t^2}{(a^2+\lambda_t)^2} + \frac{z_t^2}{(c^2+\lambda_t)^2}。$$

由(2.104)，并令 $\lambda = 0$，立得

$$\frac{1}{P(0)} = a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi,$$

故

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)_{\lambda=0} = \frac{2(1+\varepsilon^2\cos^2\phi)^{1/2}}{a^2},$$

可以证明

$$\frac{\partial}{\partial n}(V_1 - s^2)_{\lambda=0} = \frac{4c}{(1+\varepsilon^2\cos^2\phi)^{1/2}},$$

$$\varepsilon = (a^2-c^2)^{1/2}/c。$$

代入(2 103)，化简后，得

$$\begin{aligned} &g_1(\cos^2\phi_2 - \cos^2\phi_3)(1+\varepsilon^2\cos^2\phi_1)^{1/2} + g_2(\cos^2\phi_3 - \cos^2\phi_1)(1+\varepsilon^2\cos^2\phi_2) \\ &\quad + g_3(\cos^2\phi_1 - \cos^2\phi_2)(1+\varepsilon^2\cos^2\phi_3) = 0。\end{aligned} \tag{2.103a}$$

若取 $\phi_1 = 0$，$\phi_2 = \frac{\pi}{2}$，$\phi_3 = \phi$，则上式可以写为

$$g = \frac{g_p\sin^2\phi + g_e(1+\varepsilon^2)^{1/2}\cos^2\phi}{(1+\varepsilon^2\cos^2\phi)^{1/2}} \tag{2.105a}$$

$$= \frac{ag_e\cos^2\phi + cg_p\sin^2\phi}{(a^2\cos^2\phi + c^2\sin^2\phi)^{1/2}} \tag{2.105b}$$

$$= g_e\frac{1+(\beta - e - e\beta)\sin^2\phi}{(1-e(2-e)\sin^2\phi)^{1/2}}, \tag{2.105c}$$

$$e = \frac{a-c}{a},\quad \beta = \frac{g_p - g_e}{g_e}。$$

上式称为索米扬那公式。这是一个精确的公式而不是一个几近公式。可以证明，若将上式展开至二级小数，所得结果与式(2.84)是完全一样的。为了数值计算的方便，式(2.84)更为有用。

以上所讨论的重力公式都是相对于一个与大地水准面最逼近的旋转椭球面；这个面是一个重力等位面并包含所有的质量；它叫做参考椭球面。这个面的形状和大小完全可以由赤道半径 a 和扁率 e 来确定。与它相应的重力公式则可以由 ω，GM，a，e 或 ω，g_e，a，e 完全确定。

现在通用的参考系有两个：

① 国际参考椭球 1930

$a = 6378,388$ 米，

$e = 1/297.0 = 0.003367$，

$g_e = 9.780490$ 米/秒^2，

$\omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ 弧度/秒，

$g = 9.780490(1 + 0.0052883\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)$ 米/秒^2，

φ = 地理纬度。

② 国际参考椭球 1967

$a = 6378160$ 米，

$J_2 = 1082.7 \times 10^{-6}$，

$GM = 3.98603 \times 10^{14}$ 米^3/秒^2。

由此导出 $e = 1/298.25$，$g_e = 9.780318$ 米/秒^2。故

$g = 9.780318(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000058\sin^2 2\varphi)$ 米/秒^2。

若将式(2.105)写成

$$g = \frac{g_e(1 + K\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\sin^2\varphi}},$$

则

$$g_e = 9.7803185 \text{ 米/秒}^2,$$

$$K = 0.001931663,$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = 0.006694605。$$

四、重力异常和大地水准面的高度

前节推导了在一个参考椭球面上的重力加速度 g。大地水准面与参考椭球面是有差别的，但如能计算大地水准面上各点与参考面的距离 N，则大地水准面的形状也就确定。N 叫做大地水准面的高度。斯托克斯首先证明 N 可以由重力的分布计算出来。

（一）布容斯（H. Bruns）公式和球面几近

实际的重力位 W 与参考椭球面上的重力位 U 有一个微小的差别 T，叫做干扰重力位，即

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z)。\tag{2.106}$$

现将大地水准面，

$$W = U(x, y, z) + T(x, y, z) = W_0$$

与参考面，$U(x, y, z) = W_0$ 做比较。将大地水准面上的任一点 P 投影到参考面上的 Q 点并令 $PQ = N$，N 叫做大地水准面的高度。令 $\boldsymbol{g} = -\nabla W$，$\boldsymbol{\gamma} = -\nabla U$。两个向量的方向不同，叫做垂线偏差。现只讨论它们的数值之差。定义

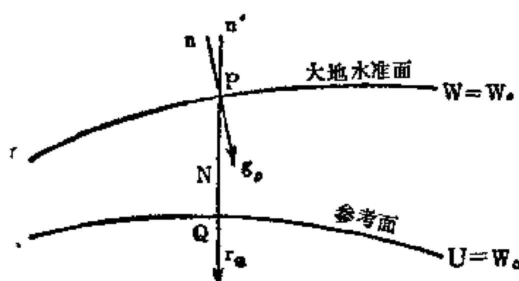


图 2.12

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \tag{2.107}$$

叫做重力异常。

$$\delta g = g_P - \gamma_P \tag{2.108}$$

叫做重力干扰。

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q N = U_Q - \gamma N,$$

$$W_P = U_P + T_P = U_Q - \gamma N + T_P。$$

但

$$W_P = W_0 = U_Q,$$

故

$$T = \gamma N。\tag{2.109}$$

此式称为布容斯公式，γ 是参考面上的重力。

$$\delta g = -\left(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n'}\right) \approx -\frac{\partial}{\partial n}(W - U) = -\frac{\partial T}{\partial n}$$

但又有

$$\delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N, \tag{2.110}$$

故

$$g = -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N,$$

$$= -\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} T。\tag{2.111}$$

在式(2.106)中，W 和 U 都不是谐函数，因为它们都包含离心力位，但 T 是质量的重新分布引起的，所以 $\nabla^2 T = 0$。若 Δg 在大地水准面上为已知，则式(2.110)是 T 与 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 在面上的线性组合。所以求 T 就是求解第三边界值问题。

参考面的扁率是 $e \approx 3 \times 10^{-3}$。若将它看成球面，则 N，T，Δg 等量的相对误差不过 3×10^{-3}。N 的值不超过百米，所以它的误差不超过一米。如果这个误差是在允许的范围之内，则

$$\gamma \approx \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial r} \approx -\frac{2GM}{r^3}, \quad \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial n} \approx -\frac{2}{r} \tag{2.112}$$

在地面上，球面半径 R 可用椭球面的平均半径来替代，即 $R^3 = a^2 b$，γ 值可用椭球面上的平均值 γ_m 来替代，于是得

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\gamma_m}{R}N = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T, \tag{2.113}$$

$$\delta g = \Delta g + \frac{2\gamma_m}{R}N = \Delta g + \frac{2}{R}T。 \tag{2.114}$$

上二式是式(2.110)和式(2.111)的球面几近。

(二) 地球以外一点的重力异常

若一谐函数在地面上的值为已知，则按球面几近，它在地球以外一点 P 的值可用泊松积分来计算。若这个函数不含零次项和一次项，则泊松积分可以写成另一形式，用时比较方便。根据公式(2.60)，任一连续函数 $f(\theta, \lambda)$ 可以写成

$$f(\theta, \lambda) = \int f(\theta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\psi) d\omega'$$

$d\omega' = \sin\theta' d\theta' d\lambda'$，$\psi$ 是定点 (θ, λ) 与变点 (θ', λ') 的夹角。若将 $f(\theta,\lambda)$ 展成面谐函数的级数，

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda),$$

则立见

$$Y_n(\theta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi}\int f(\theta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega \tag{2.115}$$

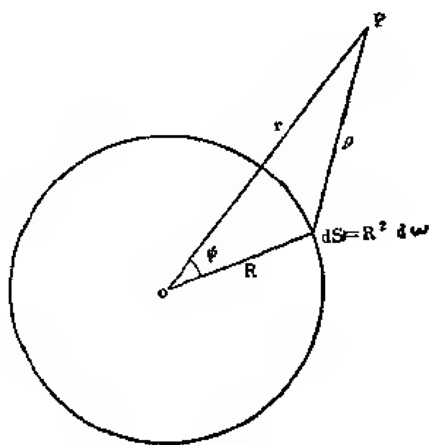


图 2.13

而

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)。$$

若一谐函数 H 可以展成如下形式：

$$H_p = \frac{R}{r}H_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n,$$

H_n 为 n 次的面谐函数。移项，得

$$H'_p = H_p - \frac{R}{r}H_0 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 H_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n。$$

H' 不含零次或一次项。由式(2.115)，

$$H_0 = \frac{1}{4\pi}\int H d\omega,$$

$$H_1 = \frac{3}{4\pi}\int H\cos\psi d\omega,$$

ω 为立体角(见图 2.13)，H 为球面上之值。由泊松积分，

$$H_p = \frac{R}{4\pi}\int \frac{r^2 - R^2}{\rho^3} H d\omega,$$

$$\rho = (R^2 + r^2 - 2rR\cos\psi)^{1/2},$$

故

$$H'_p = \frac{R}{4\pi}\int\left(\frac{r^2 - R^2}{\rho^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2}\cos\psi\right) H d\omega。 \tag{2.116}$$

由式(2.113)，

$$\Delta g=-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{2}{r}T。\tag{2.117}$$

T 为一谐函数，且力位发生干扰后，质量无增减。故 $\lim\limits_{r\to\infty} rT=0$。这就意味着，当 T 展成为球谐函数时，零次项不存在，即 $n\neq 0$。故

$$T(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n(\theta,\lambda)。$$

代入上式，

$$\Delta g=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n(\theta,\lambda)。$$

由此可见，Δg 中并不含 T_1 项。

$$r\Delta g=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n(\theta,\lambda),$$

是一谐函数，但不含零次及一次项。将其代入式(2.116)，得

$$\Delta g_p=\frac{R^2}{4\pi r}\int_\omega\left(\frac{r^2-R^2}{\rho^3}-\frac{1}{r}-\frac{3R}{r^2}\cos\psi\right)\Delta g d\omega。\tag{2.117a}$$

积分号下的 Δg 是地面上的观测值。此式将地面值拓展到地外空间。

（三）斯托克斯公式

若能由 Δg 的地面观测值求得干扰力位 T，便可以计算大地水准面的高度 N。式(2.113)给出了一个边界条件，但由式(2.117)，Δg 可以向地外空间延拓，所以问题也可以看做是解微分方程(2.117)。将其两端乘以 $-r^2$，得

$$-r^2\Delta g=r^2\frac{\partial T}{\partial r}+2rT=\frac{\partial}{\partial r}(r^2T),$$

故

$$r^2T\Big|_\infty^r=-\int_\infty^r r^2\Delta g dr。$$

但式(2.117)的左端不含零次及一次的谐函数，故由 Δg 计算的 T 也不含 T_0 及 T_1，

$$T=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}T_n,$$

$$\lim_{r\to\infty}(r^2T)=0,\quad r^2T\Big|_\infty^r=r^2T,$$

故

$$r^2T=-\int_\infty^r r^2\Delta g dr=\frac{R^2}{4\pi}\int_\omega\left[\int_0^r\left(-\frac{r^3-rR^2}{\rho^3}+1+\frac{3R}{r}\cos\psi\right)dr\right]\Delta g d\omega。$$

可以证明：

$$\int\left(-\frac{r^3-rR^2}{\rho^3}+1+\frac{3R}{r}\cos\psi\right)dr$$
$$=\frac{2r^2}{\rho}-3\rho-3R\cos\psi\ln(r-R\cos\psi+\rho)+r+3R\cos\psi\ln r,\tag{2.118}$$

$$\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{r^3 - rR^2}{\rho^3} + 1 + \frac{3R}{r}\cos\psi\right)dr$$

$$= \frac{2r^2}{\rho} + r - 3\rho - R\cos\psi\left(5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + \rho}{2r}\right)。$$

故

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi}\int_{\omega} S(r, \psi)\Delta g d\omega, \tag{2.119}$$

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{\rho} + \frac{R}{r} - 3\frac{R\rho}{r^2} - \frac{R^2}{r^2}\cos\psi\left(5 + 3\ln\frac{r - R\cos\psi + \rho}{2r}\right)。 \tag{2.119a}$$

在大地水准面上(球面几近)，$r = R$，$\rho = 2R\sin\frac{\psi}{2}$，

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi}\int_{\omega}\Delta g S(\psi)d\omega, \tag{2.120}$$

$$S(\psi) = \csc\psi/2 - 6\sin\psi/2 + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln(\sin\psi/2 + \sin^2\psi/2)。 \tag{2.120a}$$

$S(\psi)$ 称为斯托克斯函数。根据布容斯公式，

$$N = \frac{R}{4\pi g_m}\int_{\omega}\Delta g S(\psi)d\omega。 \tag{2.121}$$

g_m 是地面上 g 的平均值，N 是大地水准面的高度。

斯托克斯公式假定大地水准面之外并无质量存在，其实不然，因为一部分水准面穿到地下。这部分质量的影响必须加以校正。这就引起理论上的一些细致问题，此处从略。在应用这个公式时，必须有充分的观测数据。在卫星时代之前，全球重力观测资料是很不均匀的，所以斯氏的方法只有理论上的意义。另一方面，这个公式只是球面几近。以后的发展已将这个理论推广到其他形状的参考面。这些都是大地测量学的专门问题，已超出本书的范围，本章不再讨论。

五、重力值的校正

重力异常的定义是大地水准面与参考面上的重力值之差，但实际观测是在地面上，而不是在水准面上，因此观测值必须校正。重力校正在以下几类问题中都是需要的：① 确定大地水准面；② 将不同地点的重力观测值进行对比；③ 研究地壳的结构。

在应用斯托克斯公式来求大地水准面的高度时，Δg 是水准面上的边界值，而且假定面外无质量存在。但其实面外是有质量的。所以校正时，必须将观测点由地面移到水准面上，并且将水准面以上质量的影响消去。

(一) 自由空气及布格校正

设地面一点 P 的海拔高度为 h，它在海面上的投影为 P_0(图2.14)。g 值随高度的递减率 $\frac{\partial r}{\partial h}$ 可以由重力公式计算。若用 1930 年的公式，递减率为每升高一米，g 值减少 0.3086 毫伽(1 毫伽 = 10^{-3} 厘米/秒^2)；若用 1967 年的公式，递减率为 0.3083 毫伽/米。

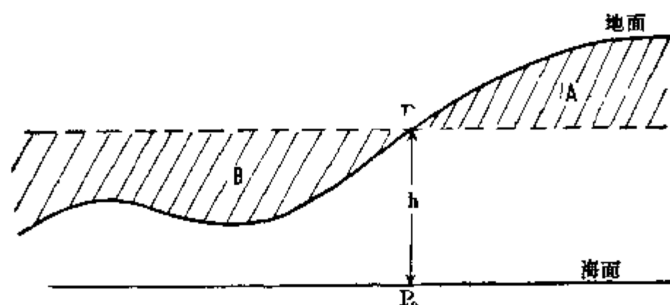


图 2.14

若将 P 点降到 P_0，实测的 g 值应增加 0 3086h 或 0.3083h 毫伽，h 以米计。 这个校正并未考虑 P 与 P_0 之间那部分物质的引力，因此叫做自由空气校正，可以 F 表示。

海面以上的物质可以分成两部分来讨论。一部分是通过 P 点厚度为 h 的一块无限平板；另一部分是迭加在平板之上、在 P 点四周的地形起伏。前一部分对 P 点的引力极易证明为

$$B = 2\pi G\rho h,$$

ρ 是地面附近岩石的密度。 若取 $\rho = 2.67$ 克/厘米^3，则 $B = 0.1119h$ 毫伽，h 以米计。这部分引力应从观测值中减去，

$$g_b' = g + F - B = g + 0.1964h,$$

$$\Delta g_b' = g_b' - \gamma$$

叫做布格重力异常，γ 是参考面上的重力值。

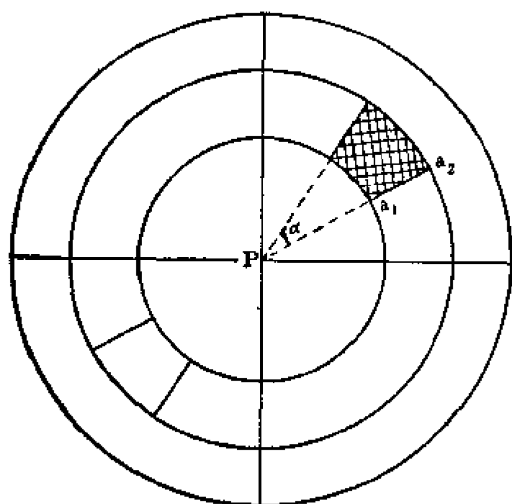


图 2.15

进一步的校正就需要考虑地形的影响。图 2.14 表示 P 点附近的地形起伏，A 是凸起部分，B 是凹下部分；须注意的是，无论是削去 A 或是填平 B，其结果都是使 P 点的重力值加大，所以地形校正只与高差的绝对值有关。令地形校正为 T，则更完全的布格重力应包括这一项，即

$$g_b = g + F - B + T = g + F - (B - T)。$$

计算 T 时，一般是将 P 点附近的地形划成扇形小块(如左图)，求各小块所产生的重力值，然后迭加。所用公式如下：

$$\Delta T = \alpha G\rho\left[\sqrt{a_2^2 + (h - b)^2} - \sqrt{a_1^2 + (h - b)^2} - \sqrt{a_2^2 + h^2} + \sqrt{a_1^2 + h^2}\right], \tag{2.122}$$

式中 $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ 是扇形在 P 点所张的角，n 是一周所割的块数， a_1、a_2 是扇形的内外半径，b 是扇形的厚度(由海面算起)，h 是 P 点的海拔高度。总的地形校正为 $T = \Sigma\Delta T$。校正应伸展到多远，视观测的精确度而定。若远处地形的影响已降到所要求的精确度之下，就可以不计了。地形校正是有表可查的，只须测定式(2.122)中的参数就行了。 完全的布格异常 Δg_b 是

$$\begin{aligned}\Delta g_b &= g_b - \gamma = g + F - (B - T) - \gamma \\ &= g + 0.1964h + T - \gamma。\end{aligned} \tag{2 123}$$

（二）地壳均衡及均衡校正

如果地形起伏仅仅是多余（或短缺）的物质附加在一个大致均匀的地球之上，则经过布格校正之后，重力异常应当不大，并且无系统偏离，但事实并非如此。山区的重力异常经过布格校正之后，往往是负的，并且每升高一千米，异常约增加上百毫伽。这表明在高山之下，地下物质发生某种短缺，因而对地形的重力影响产生一种补偿作用。如果不考虑这个因素，校正便过头了，因而造成负异常。相似的现象也在垂线偏差的观测中看到。在高山的旁边，重力场的方向应当几近地等于地球重力与高山引力的合力的方向，这也就是垂线的方向。在 1854 年，英国人普拉特（J. H. Pratt）在喜马拉雅山附近一点，根据地形的计算，估计垂线应有 28″ 的偏差，但实测结果只有 5″。这也表明地下物质的变化起了某种补偿作用，部分地抵销了高山的影响。

为了解释这个现象，普拉特在 1855 年提出一个假设。他认为地下从某一深度算起（叫做补偿深度），以下物质的密度是均匀的，但以上的物质，则相同截面的柱体保持相同的总质量，因此地形越高，密度越小。计算一座高山的重力影响时，可以设想这座山是从补偿深度起，在垂直方向均匀膨胀而成的。

在同一年，另外一个英国人艾里（G. B. Airy）提出另一种假设。他认为地球上层物质的密度比下层小，山脉是较轻的岩石浮在较重的介质之上，仿佛冰浮在水上一样，但是它的底部也伸入水下；山越高，它的底部伸入介质也越深，山是有根的。按同样的道理，在海洋下面，由于海水的密度比岩石的小，下面的介质反而向上凸出，形成一个反山根。

以上两种模式都引出这样一个概念：从地下某一深度起，相同截面（面积要足够大）所承载的质量趋于相等。这个概念叫做地壳均衡。根据这个概念，地面上大面积的地形起伏，必然在地下有所补偿。普拉特的模式是将地形所增减的质量均匀地取偿于海面与补偿深度之间。因为地形高低不同，它在横的方向上密度也不同。艾里的模式则将地形所增减的质量取偿于山根或反山根。喜马拉雅山所产生的垂线偏差比按地形计算的小得多就是补偿的结果。无论根据哪种模式，只要测量了地形高度，并适当地估计下层岩石的密度和地壳厚度，就可计算由于补偿作用所减少的地面重力值 I。这叫做均衡校正。将这个校正加在式(2.123)上，就叫做均衡异常。

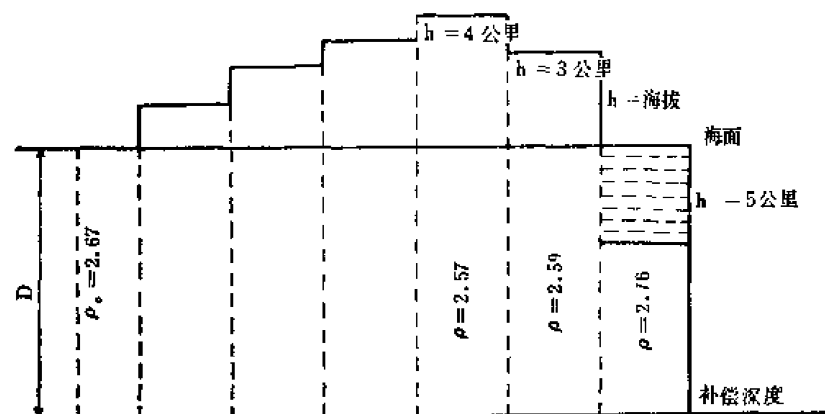


图 2.16

图 2.16 是普拉特模式示意图。各柱状体因高程不同，其密度也有差异，但在补偿深度以上，各柱体的总质量是相等的。设补偿深度为 D，任一柱体的海拔高度为 h，则有

$$(D+h)\rho = D\rho_0,$$

ρ_0 及 ρ 为海拔为零和为 h 时的密度。由此得到密度差 $\Delta\rho$ 为

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho = \frac{h}{h+D}\rho_0。$$

在海洋中，设海水的深度为 h'，海水的密度为 ρ_w，则有

$$(D-h')\rho + h'\rho_w = D\rho_0,$$

$$\Delta\rho = \rho_0 - \rho = \frac{h'}{D-h'}(\rho_0 - \rho_w)。$$

补偿深度 D 一般假定约为一百公里。h，h_1，ρ_w，ρ_0 都是可以测定的。这样就可以计算 $\Delta\rho$。知道 $\Delta\rho$，便可计算由于地壳均衡作用，各柱体对于 P 点的重力曾经减少了多少。这是作布格校正时未曾考虑的，叫做均衡校正。计算公式与式(2.122)相似，不过其中的 ρ 应以 $\Delta\rho$ 替代。

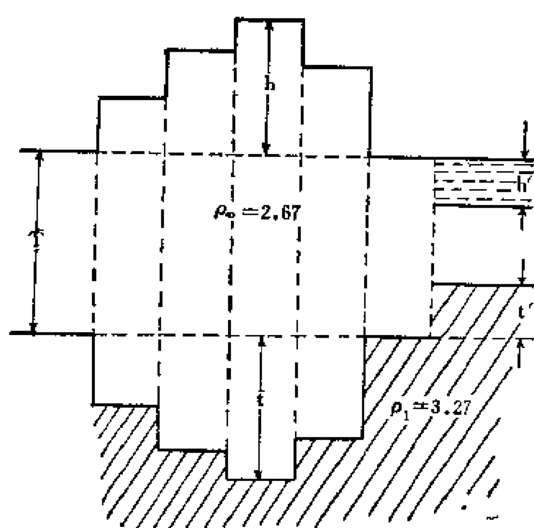


图 2.17

图 2.17 是艾里模式的示意图。假定密度为 2.67 克/厘米^3 的岩石浮在密度为 3.27 克/厘米^3 的介质之上，地壳的正常厚度为 T。按照阿基米德原理，若地形的高度为 h，其下部深入介质中的深度为 t（即山根），则有

$$t\Delta\rho = h\rho_0,$$

故

$$t = h\frac{\rho_0}{\Delta\rho} = \frac{2.67}{0.6}h = 4.45h。$$

在海洋下面，若海水的深度为 h'，则反山根的厚度 t' 将符合

$$t'\Delta\rho = h'(\rho_0 - \rho_w),$$

故

$$t' = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\Delta\rho}h' = 2.73h'。$$

设地壳的正常厚度为 T，则在高山之下，柱体的总厚度为

$$T + h + t。$$

在海洋之下，厚度为 $T - h' - t'$。ρ_0，ρ_w 为已知，h，h' 可以测量，ρ_1，T 可以由其他的地球物理观测来推导，于是各柱体的总厚度就可以得到，由此便可以计算均衡校正。

从物理意义上来看，普拉特模式不如艾里模式，因为均匀膨胀的设想并无观测的依据，而地壳以下的物质在载荷的长期作用下是可以发生流动的。不过实际计算补偿时，两种模式所得的结果相差无几。布格异常再经过均衡校正后便得到均匀异常。实测结果表明，大面积的均衡异常要比布格异常小得多，但在地球上的个别地区（如海沟或某些高山地区，包括喜马拉雅山地区），仍有相当大的均衡异常存在，说明这些地区的地壳是不均衡的。如何解释这些不均衡，学者的意见还是有分歧的。本世纪以来，地壳均衡的概念对地

学的研究起了很大的影响。然而地球介质即使在极长时期的载荷作用下，和真正的流体还是有区别的。地壳本身是有弹性强度的，因而局部不均衡完全是可能的，即是说，补偿未必是完全的。这就仿佛船在水里，虽然全船的重量等于船所排开水的重量，但由于船身有一定的强度，船内的负载还可以随意安排。解释重力异常时，也应考虑这种情况。

另外一点也须指出。用斯托克斯的方法，由重力异常来确定大地水准面的高度时，曾假定水准面之外无质量存在，但实际上，大地水准面部分地穿过地下。在以上所讨论的各种校正中，不是将外部质量削去，便是将内部质量重新分布。这样做了之后，重力值变了，但所得到的大地水准面也不与原来的完全一样。这是一种规格化的大地水准面，叫做同水准面（co-geoid)。关于如何将大地水准面规格化，讨论很多。还有人主张根本不必用大地水准面这个概念。这是大地测量学的专门课题，本章不再讨论。

六、固体潮

地球的重力场基本上是恒定的，但也有微小的时间变化。这是由于地球在其他天体（特别是日、月）的引力场中做相对运动所引起的。月球虽小，但离地球很近，它的影响比太阳的约大一倍。

（一）引潮力位

日、月的引力产生潮汐，这是众所熟知的。因为地球不是刚体，非但海洋有潮汐，地球的固体部分在日、月引力下也发生变形。这种变形随时间而变化，叫做固体潮。伴随着地面变形，重力场也有变化。总的变化是日、月引力影响之和。以下以月球为例来推导引起潮汐的力位。

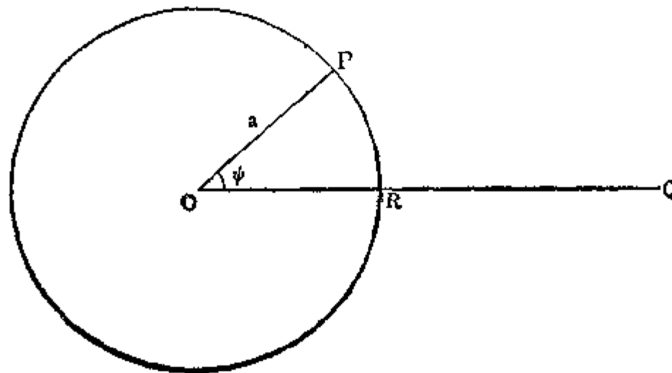


图 2.18

设 O，C 各为地心及月心，其距离为 R，地球半径为 a，月球质量为 m，P 是地面上任一点。月球不但在 P 点产生引力，而且使全地球产生加速 Gm/R^2，其方向是沿着 OC。与此相应的力位是 $-\frac{Gm}{R^2}a\cos\psi$。所以月球对于 P 点的总力位等于

$$W=\frac{Gm}{(R^2+a^2-2aR\cos\psi)^{1/2}}-\frac{Gm}{R^2}a\cos\psi,$$

将右端第一项展开至 $P_2(\cos\phi)$，得

$$W_2 = \frac{3}{2}\frac{Gma^2}{R^3}\left(\cos^2\phi - \frac{1}{3}\right) = \frac{Gma^2}{R^3}P_2(\cos\phi), \tag{2.124}$$

W_2 叫做引潮力位，它是一个二次谐函数。

假设地球是个刚体，其质量为 M，则因引潮力所产生的重力变化 Δg 为

$$\Delta g_a = -\frac{\partial W_2}{\partial a} = -\frac{Gma}{R^3}(3\cos^2\phi - 1),$$

$$\Delta g_\phi = -\frac{1}{a}\frac{\partial W_2}{\partial\phi} = -\frac{3}{2}\frac{Gma}{R^3}\sin 2\phi,$$

$$\Delta g_a/g \approx \Delta g_a \Big/ \frac{Gm}{a^2} = -\frac{m}{M}\left(\frac{a}{R}\right)^3(3\cos^2\phi - 1),$$

$$\Delta g_\phi/g \approx \tan\alpha \approx \frac{3}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{a}{R}\right)^3\sin 2\phi。 \tag{2.125}$$

α 是在子午面上的垂线偏差。对于月球来说，$\frac{m}{M}\left(\frac{a}{R}\right)^3 = 5.6\times10^{-8}$；对于太阳来说，这个数值要小 0.45 倍。

假设地球是个刚体，还可以估计月球引潮力对地球等位面的高度所产生的变化。地球自由振动的周期，最大不过约一小时，这比引潮力的周期小多了。所以固体潮可以看做是平衡潮，即是说，变形和引潮力几乎是同步的。在平衡潮中，$W_2 = \Delta ag$，Δa 是潮高的变化。

故

$$\Delta a = W_2/g = \frac{m}{M}\left(\frac{a}{R}\right)^3 a\cdot\frac{1}{2}(3\cos^2\phi - 1)。$$

由此算出最大的高度差为 0.535 米。

（二）勒夫数和志田数

地球并非刚体。在日、月引力的作用下，海洋和地球的固体部分都要发生变形，这就使引潮力位也发生变化。这些变化可以用三个无量纲的参数 h，k，l 来表示。h，k 叫做勒夫数，l 叫做志田数，纪念最初引用这些数的学者勒夫（A. E. H. Love）和志田顺。它们的定义如下：h 是固体潮的潮高与海洋平衡潮的潮高之比；k 是由于质量的重新分布而引起的力位变化与引潮力位 W_2 之比；l 是地壳的水平位移与平衡海潮的水平位移之比。

观测到的海洋潮高是由三部分组成的。一部分是由于 W_2，第二部分是由于 kW_2。所以潮高应当等于 $(W_2 + kW_2)/g$。但海底本身由于 W_2 而上升 $h\frac{W_2}{g}$。所以实际观测到的潮高为

$$\Delta z = (1 + k - h)W_2/g。 \tag{2.126}$$

因为 W_2 是已知的，所以由观测潮高就可以确定 $1 + k - h$，这个数值常用 γ 表示，即 $\gamma = 1 + k - h$。

在可变形的地面上，力位 W 可以写成

$$W = W_0 + W_2 + kW_2 - gu_r,$$

W_0 是重力位，W_2 是引潮力位，kW_2 是由于质量的重新分布而引起的力位变化，u_r 是垂直位移。上式的后三项是可变的。由于引潮力的影响，在地面上所观测到的重力变化 Δg 为

$$-\Delta g = \frac{\partial W_2}{\partial r} + k\frac{\partial W_2}{\partial r} + u_r\frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}。$$

由式(2.124)，在地球内，$W_2 = \frac{Gmr^2}{R^3}P_2$；在地球外，$W_2 = \frac{Gm}{R^3}\frac{a^5}{r^3}P_2$。 故

$$\frac{\partial W_2}{\partial r} = 2\frac{W_2}{r},\ k\frac{\partial W_2}{\partial r} = -3k\frac{W_2}{r}。$$

根据球面几近，

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} = \frac{2g}{r},\quad u_r\frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} = h\frac{W_2}{g}\cdot\frac{2g}{r} = 2h\frac{W_2}{g}。$$

所以

$$\begin{aligned}-\Delta g &= (2 - 3k + 2h)\frac{W_2}{g}\\ &= \left(1 + h - \frac{3}{2}k\right)\frac{\partial W_2}{\partial r} = \left(1 + h - \frac{3}{2}k\right)\Delta g_r,\end{aligned}\tag{2.127}$$

Δg_r 表示一个刚体地球（$h = k = 0$）所相应的 Δg。由上式，便可根据重力的变化求得

$$\delta = 1 + h - \frac{3}{2}k。$$

由 γ 及 δ 便可计算 h，k。

引潮力位 W_2 及变形力位 kW_2 产生重力的两个水平分量 Δg_ϕ 及 Δg_λ，从而导致垂线偏差的两个分量：

$$在子午面上，\ \xi = \frac{\Delta g_\phi}{g} = \frac{1+k}{g}\frac{\partial W_2}{a\partial\phi},$$

$$在卯酉面上，\ \eta = \frac{\Delta g_\lambda}{g} = \frac{1+k}{g}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial W_2}{\partial\lambda}。$$

但 W_2 也使地面产生水平位移 u_ϕ 及 u_λ。定义

$$u_\phi = \frac{l}{g}\frac{\partial W}{\partial\phi},\quad u_\lambda = \frac{l}{g\cos\phi}\frac{\partial W_2}{\partial\lambda},$$

l 称为志田数。若用天文仪器在地面上观测，则相对于地轴所测定的垂线偏差将由

$$\begin{aligned}\xi &= (1 + k - l)\frac{1}{ag}\frac{\partial W_2}{\partial\phi},\\ \eta &= (1 + k - l)\frac{1}{ag}\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial W_2}{\partial\lambda}。\end{aligned}\tag{2.128}$$

表示。由此可确定 $L = (1 + k - l)$。结合式(2.126)及(2.127)，便求得 h，k，l。一组典型的数据是

$$h = 0.59,\quad k = 0.27,\quad l = 0.04。$$

但各家所得的结果颇有分歧。这一部分是由于干扰固体潮测定的因素太多，特别是海洋潮汐的影响不易消除，另一部分是地球内部情况复杂，由三个常数来概括各种形式的形变

也许是过于简化了。

参　考　书　目

[1] 傅承义，1976.《地球十讲》,科学出版社。
[2] 方 俊，1965，1975.《重力测量与地球形状学，上、下册，科学出版社。
[3] Jeffreys, H , 1964 *The Earth*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, London.
[4] Heiskanen, W A , and H. Moritz, 1967. *Physical Geodesy*, Freeman, San Francisco, 1967.
[5] Caputo, M., 1967. *The Gravity Field of the Earth*, Acad. Press, New York.

第三章 地 球 的 转 动

在宇宙空间中，地球不仅绕着一条轴线自西向东自转，同时也沿着近于圆的轨道绕着太阳转动。地球自转平均角速度为 7.2921×10^{-5} 弧度/秒，在地球赤道上自转线速度为 465 米/秒。地球的自转轴和地面的两个交点叫做转动极或地极，和天球的两个交点叫做天极。在地球上看，天极就是天空中没有周日运动的两个点。平常说的北极星就是一颗靠近北天极的恒星。

作用在地球上的力种类很多。日、月对地球赤道凸出部分的吸引力随日月位置而变化。在它们的作用下，地球转动轴在空间的取向发生变化。地球作为一个整体也相对于其转动轴而摆动。由于日、月的吸引和地球惯量矩的季节性变化以及其他目前还不甚清楚的原因。地球的转动速率也不恒定。概而言之，地球的转动是不均匀的。从这个意义上讲，研究地球的转动就是研究地球转动的不均匀性。在天文学中，研究地球转动的不均匀性对于天体演化的研究以及天体方位的测定有着重要意义。在地球物理学中，研究地球转动有助于了解地球内部构造和运动，地球内部的密度、弹性和非完全弹性以及地壳、地核、海洋和大气的运动。

一、岁差和章动

在太阳和月球对地球赤道凸出部份的吸引作用下，地球的转动轴在空间的位置发生变化。如果地球是一个球体，而且赤道面与太阳轨道平面(黄道面)及月球轨道平面(白道面)都重合的话，就不会发生这种变化。实际上，赤道面和黄道面的倾角(黄赤交角)是 23°27′08″，而白道面和黄道面的倾角(黄白交角)是 5°8′43″。如果地球不转动，日、月的引力对地球产生的力矩将使这些平面趋于一致。但地球是转动着的。由于转动的迴转效应，黄赤交角仍保持不变，而天极则以 25,700 年为周期绕着黄道面的极(黄极)转动，也就是赤道和黄道的交点(春分点和秋分点)沿着黄道每年向西移动 50″.25647。当地球两次经过春分点时，它实际上并未绕完一周。这种运动叫作分点的岁差，简称岁差。迴转效应还使得天极相对于黄极作一种点头式的运动，叫做章动。现在北天极在北极星附近，可是在 5,000 年前，它在天龙座 α 星附近；5,000 年后，它将在仙王座 α 星附近。

(一) 欧 拉 方 程

我们来分析岁差和章动。为简单起见，把地球当作刚体，并且先只考虑太阳的影响。假定地球是一个旋转椭球体，它的三个主惯量分别是 A，B，C，其中 $A = B < C$，即相对于短轴的转动惯量 C 最大。我们称这条轴为地球的形状轴或对称轴或惯性轴。取一个固定在地球上的运动坐标系 x_i $(i = 1, 2, 3)$，把它的原点放在地球的质心上，并使

x_3 轴与形状轴重合(图 3.1)。x_1 轴可以放在过原点并与 x_3 轴垂直的平面里的任意方向上，x_2 轴也在这个平面上，与 x_1, x_3 轴构成右旋坐标系。因为按照前面的假设，相对于另两个主轴的转动惯量是相等的。设地球以角速度 $\boldsymbol{\omega}=\omega_i\boldsymbol{e}_i$ 相对于"静止"坐标系 X_i 转动，这里，$\boldsymbol{e}_i$ 表示转动坐标系 x_i 的基矢量。将"静止"坐标系的 X_1 轴和 X_2 轴置于黄道面上，使 X_1 轴指向白羊宫（Υ）α 星。X_3 轴和天球的交点 E 就是黄道的极。实际上，ω_3 比 ω_1, ω_2 大得多，所以转动轴很靠近 x_3 轴，也就是说 x_3 轴和天球的交点 P 是近似的天极，x_3 轴和 X_3 轴的夹角 θ 近似地等于黄赤交角，x_1x_2 平面接近于赤道面。我们把 x_1x_2 平面和黄道面的交线 NN' 叫做节线，由于 x_1x_2 平面接近于赤道面，所以 N', N 点近似于春、秋分点。NN' 和 X_1 轴的夹角以 Ω 表示，x_1 轴和 NN' 的夹角以 ϕ 表示。太阳位于黄道上的 S 点，$\overline{OS}$ 和 X_1 轴的夹角以 λ 表示。

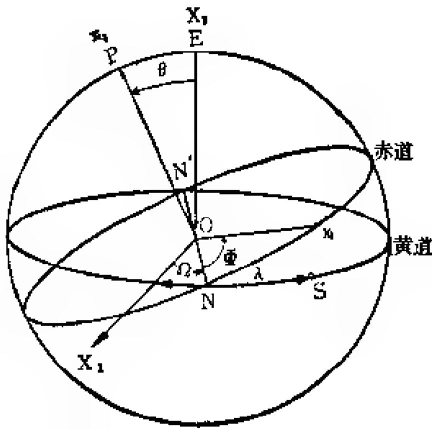


图 3.1　岁差和章动示意图

设 $\boldsymbol{r}=x_i\boldsymbol{e}_i$，则角动量 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\iiint_{\tau}\rho\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})d\tau, \tag{3.1}$$

式中，ρ 是密度。式中的 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 可化为

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=(r^2\mathbf{I}-\boldsymbol{rr})\cdot\boldsymbol{\omega},$$

$\mathbf{I}$ 是单位张量：

$$\mathbf{I}=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,$$

其中，δ_{ij} 是克朗内克（Kronecker）符号，当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。这样一来，$\boldsymbol{H}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{H}=\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{3.2}$$

其中，

$$\mathbf{C}=\iiint_{\tau}\rho(r^2\mathbf{I}-\boldsymbol{rr})d\tau。 \tag{3.3}$$

$\mathbf{C}$ 叫做惯量张量，其分量是：

$$\begin{cases} C_{11}=\iiint_{\tau}\rho(x_2^2+x_3^2)d\tau \\ C_{22}=\iiint_{\tau}\rho(x_3^2+x_1^2)d\tau \\ C_{33}=\iiint_{\tau}\rho(x_1^2+x_2^2)d\tau \\ C_{23}=C_{32}=-\iiint_{\tau}\rho x_2x_3d\tau \\ C_{31}=C_{13}=-\iiint_{\tau}\rho x_3x_1d\tau \\ C_{12}=C_{21}=-\iiint_{\tau}\rho x_1x_2d\tau。 \end{cases} \tag{3.4}$$

以 $\boldsymbol{L}$ 表示外加力矩。则在坐标系 X_i 中，

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \boldsymbol{L}。 \tag{3.5}$$

在以 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的坐标系 x_i 中，对于任一向量 $\boldsymbol{v}$ 都有：

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}, \tag{3.6}$$

其中 $\tilde{d}\boldsymbol{v}/dt$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 相对于转动坐标系的改变速度。对于角动量 $\boldsymbol{H}$ 来说，类似地有：

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}。 \tag{3.7}$$

将(3.7)式代入(3.5)式，即得表示刚体运动的欧拉方程：

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}。 \tag{3.8}$$

式中，$\tilde{d}\boldsymbol{H}/dt$ 是 $\boldsymbol{H}$ 相对于转动坐标系的变化速度。

在转动坐标系 x_i 中，

$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} = A, \\ C_{33} = C, \\ C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

从而欧拉方程可以表示为：

$$\begin{cases} A\dfrac{d\omega_1}{dt} + (C - A)\omega_2\omega_3 = L_1, \\ A\dfrac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 = L_2, \\ C\dfrac{d\omega_3}{dt} = L_3。 \end{cases} \tag{3.10}$$

（二） 欧 拉 角

用前面引进的三个角 θ, Ω, ϕ 可以表示 x_i 的转动，通常称它们为欧拉角。角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 x_i 方向的分量，可以用欧拉角及其微商表示。角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ 沿着节线 ON 的方向，因而它在 x_i 轴上的分量为：

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta\cos\phi, -\dot{\theta}\sin\phi, 0\}; \tag{3.11}$$

角速度 $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\boldsymbol{e}_\Omega$ 沿着 X_3 轴方向，所以它在 x_i 轴上的分量是：

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{\dot{\Omega}\sin\theta\sin\phi, \dot{\Omega}\sin\theta\cos\phi, \dot{\Omega}\cos\theta\}; \tag{3.12}$$

角速度 $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ 沿着 x_3 轴方向，所以它在 x_i 轴上的分量简单地就是：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \{0, 0, \dot{\phi}\}。 \tag{3.13}$$

如果以 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\phi}}$ 表示 $\boldsymbol{\omega}$，即：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}, \tag{3.14}$$

则由(3.11)—(3.13)诸式可得：

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\Omega}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\ \omega_2 = \dot{\Omega}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\ \omega_3 = \dot{\Omega}\cos\theta + \dot{\phi}。 \end{cases} \tag{3.15}$$

既然 x_1 轴可以放在赤道面的任意方向上，不失一般性，我们可以让它与 ON 重合，即取 $\phi=0$。这样一来 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $d\boldsymbol{\omega}/dt$ 的分量可以简单地表示成：

$$\begin{cases}\omega_1=\dot{\theta},\\ \omega_2=\dot{\Omega}\sin\theta,\\ \omega_3=\dot{\Omega}\cos\theta+\dot{\phi},\end{cases}\tag{3.16}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\omega_1}{dt}=\dot{\Omega}\dot{\phi}\sin\theta+\ddot{\theta},\\[2mm] \dfrac{d\omega_2}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\dot{\Omega}\sin\theta)-\dot{\theta}\dot{\phi},\\[2mm] \dfrac{d\omega_3}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\dot{\Omega}\cos\theta)+\ddot{\phi}。\end{cases}\tag{3.17}$$

将以上两式代到(3.10)式中，我们便得到：

$$\begin{cases}A(\dot{\Omega}\dot{\phi}\sin\theta+\ddot{\theta})+(C-A)\dot{\Omega}\sin\theta(\dot{\Omega}\cos\theta+\dot{\phi})=L_1,\\ A\left[\dfrac{d}{dt}(\dot{\Omega}\sin\theta)-\dot{\theta}\dot{\phi}\right]+(A-C)\dot{\theta}(\dot{\Omega}\cos\theta+\dot{\phi})=L_2,\\ C\dfrac{d}{dt}(\dot{\Omega}\cos\theta+\dot{\phi})=L_3。\end{cases}\tag{3.18}$$

要解这个方程，需要知道因为太阳的吸引而作用在地球上的力矩 $\boldsymbol{L}$。

（三）麦柯拉夫(MacCullagh)公式

如果以 U 表示地球在太阳的引力场中的位能，以 $\boldsymbol{f}$ 表示作用于地球上某一质量元的力，那么位能的变化 δU 应当等于反抗引力所作的功，即

$$\delta U=-\Sigma\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r}。\tag{3.19}$$

若地球绕某一轴线转动了一个无穷小角 $\delta\boldsymbol{\theta}$，则

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r},\tag{3.20}$$

从而

$$\delta U=-\Sigma\boldsymbol{f}\cdot(\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{L}\cdot\delta\boldsymbol{\theta},\tag{3.21}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是作用在地球上的力矩：

$$\boldsymbol{L}=\Sigma\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}。\tag{3.22}$$

另一方面，如果地球绕某一轴线转动了 $\delta\boldsymbol{\theta}$，则其位能的变化为：

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}。\tag{3.23}$$

由(3.21)，(3.23)两式立刻可得

$$\boldsymbol{L}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}。\tag{3.24}$$

由麦柯拉夫 (MacCullagh) 公式[(2.66)式]，可以求得位能

$$U=-G\left[\frac{M_sM}{R_s}+\frac{M(A_s+B_s+C_s-3I_s)}{2R_s^3}+\frac{M_s(A+B+C-3I)}{2R_s^3}\right]+O\left(\frac{1}{R_s^4}\right),\tag{3.25}$$

式中，G是引力常数，M是地球的质量，A，B，C 是其主惯量，I 是它对太阳、地球质心联线(图 3.1 中的 $\overline{OS}$) 的转动惯量，M_s，A_s，B_s，C_s，I_s 是太阳的相应的量，R_s 是太阳质心至地球质心的距离。

假定太阳具有球对称性，并忽略地球绕太阳公转的轨道的偏心率，那么在上式中对 $\boldsymbol{L}$ 有意义的项只是含有 $-3I$ 的项，所以

$$\boldsymbol{L}=-\frac{3GM_s}{2R_s^3}\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \tag{3.26}$$

式中

$$I=Al^2+Bm^2+Cn^2。 \tag{3.27}$$

$\{l, m, n\}$ 是 OS 在转动坐标系 x_i 中的方向余弦。

在 X_i 中，$\boldsymbol{e}_i$ 可表示为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=\{\cos\Omega,\ \sin\Omega,\ 0\},\\ \boldsymbol{e}_2=\{-\cos\theta\sin\Omega,\ \cos\theta\cos\Omega,\ \sin\theta\},\\ \boldsymbol{e}_3=\{\sin\theta\sin\Omega,\ -\sin\theta\cos\Omega,\ \cos\theta\}。\end{cases} \tag{3.28}$$

而 $\overline{OS}$ 可表示为：

$$\overline{OS}=\{\cos\lambda,\ \sin\lambda,\ 0\}, \tag{3.29}$$

所以

$$\begin{cases}l=\overline{OS}\cdot\boldsymbol{e}_1=\cos(\lambda-\Omega),\\ m=\overline{OS}\cdot\boldsymbol{e}_2=\sin(\lambda-\Omega)\cos\theta,\\ n=\overline{OS}\cdot\boldsymbol{e}_3=-\sin(\lambda-\Omega)\sin\theta,\end{cases} \tag{3.30}$$

从而

$$I=A\cos^2(\lambda-\Omega)+(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta)\sin^2(\lambda-\Omega), \tag{3.31}$$

或

$$I=Al^2+(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta)(1-l^2)。 \tag{3.32}$$

在(3.26)式中，$\boldsymbol{\theta}=\theta_1\boldsymbol{e}_1$，$\theta_1$ 就是欧拉角 θ，所以，

$$L_1=-\frac{3GM_s}{2R_s^3}\frac{\partial I}{\partial \theta}。 \tag{3.33}$$

由上式可求得 L_1 的表示式。然后通过对有关量的循环代换，又可得 L_2 和 L_3。结果是：

$$\begin{cases}L_1=\dfrac{3GM_s}{R_s^3}(C-B)mn,\\ L_2=\dfrac{3GM_s}{R_s^3}(A-C)nl,\\ L_3=\dfrac{3GM_s}{R_s^3}(B-A)lm。\end{cases} \tag{3.34}$$

(四) 岁差和章动

将上式代入(3.18)式的最后一式，并用到 $A=B$，立即可得：

$$\omega_3=\dot{\Omega}\cos\theta+\dot{\phi}=\tilde{\omega}, \tag{3.35}$$

其中 $\tilde{\omega}$ 是一个常数。考虑到 $\dot{\phi}\gg\dot{\Omega},\dot{\theta}$，故

$$\dot{\phi}\doteq\tilde{\omega}, \tag{3.36}$$

于是(3.18)式的前两式可化为：

$$\begin{cases}\dot{\Omega} = -\dfrac{3GM_s}{\tilde{\omega}R_s^3}\dfrac{C-A}{C}\sin^2(\lambda-\Omega)\cos\theta, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{3GM_s}{\tilde{\omega}R_s^3}\dfrac{C-A}{C}\dfrac{1}{2}\sin[2(\lambda-\Omega)]\sin\theta。\end{cases} \tag{3.37}$$

令

$$k_s = \frac{GM_s}{\tilde{\omega}R_s^3}\frac{C-A}{C}, \tag{3.38}$$

则

$$\begin{cases}\dot{\Omega} = -\dfrac{3}{2}k_s\{1-\cos[2(\lambda-\Omega)]\}\cos\theta, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{3}{2}k_s\sin[2(\lambda-\Omega)]\sin\theta。\end{cases} \tag{3.39}$$

实际上，θ, Ω 变化很小，所以上式右边的 θ, Ω 可以用其平均值 θ_s, Ω_s 代替。此外，上式中的 $\lambda = n_s t$, n_s 是太阳轨道角速度。于是得

$$\begin{cases}\Omega = \Omega_0 - \dfrac{3}{2}k_s\cos\theta_s t + \dfrac{3k_s}{4n_s}\cos\theta_s\sin[2(n_s t-\Omega_s)], \\ \theta = \theta_0 + \dfrac{3k_s}{4n_s}\sin\theta_s\cos[2(n_s t-\Omega_s)], \end{cases} \tag{3.40}$$

式中，Ω_0 和 θ_0 是常数。这个结果表明，Ω 以恒定的平均速率 $-\dfrac{3}{2}k_s\cos\theta_s$ 变化；或者说，节线 NN' 以恒定的速率绕黄道轴旋转。前面已经提到，N 和 N' 点分别是秋分点和春分点的近似位置，所以这种运动叫做二分点的岁差，简称岁差。在岁差上又迭加了一个振荡式的运动，其幅角为 $2(n_s t-\Omega_s)$，振幅为 $\dfrac{3k_s}{4n_s}\cos\theta_s$。类似地，$\theta$ 以比上述振荡式运动超前 $\pi/2$ 的幅角振荡，但振幅为 $\dfrac{3k_s}{4n_s}\sin\theta_s$ 这两种振荡式的运动合起来，称作章动。

从天球上看，天极以速率 $-\dfrac{3}{2}k_s\cos\theta_s$ 绕着黄道轴顺时针(此处以及后面提到顺、逆时针时，都是参照图 3.1 而言)旋转，同时以图 3.1 中的 P 点为中心绕着一个椭圆逆时针旋转。椭圆的长轴在天球的子午圈上，其长度为 $\dfrac{3k_s}{4n_s}\sin\theta_s$；其短轴在天球的纬度圈上，长为 $\dfrac{3k_s}{4n_s}\sin\theta_s\cos\theta_s$。

(五) 月球的影响

以上只考虑了太阳的影响。实际上，月球对地球的岁差也有影响。它的影响与太阳的类似，就是使得 Ω 以恒定的速率 $-\dfrac{3}{2}k_L\cos\theta_L$ 变化。这里 k_L 和 θ_L 是与 k_s 和 θ_s 相应的量，但是指月球而言的。

按照开普勒定律：

$$n_s^2R_s^3 = GM_s, \tag{3.41}$$

可将 k_s 表示成

$$k_s = \tilde{\omega}\left(\frac{n_s}{\tilde{\omega}}\right)^2 H, \tag{3.42}$$

其中 H 称为地球的动力学扁率或岁差常数:

$$H = \frac{C-A}{C}。 \tag{3.43}$$

对于月球来说,与(3.41)式相应的关系式是:

$$n_L^2 R_L^3 = GM。 \tag{3.44}$$

式中, n_L 是月球轨道角速度, R_L 是月球质心至地球质心的距离, M 是地球的质量。所以和(3.42)式相应的关系式是:

$$k_L = \tilde{\omega}\left(\frac{n_L}{\tilde{\omega}}\right)^2 \frac{M_L}{M} H。 \tag{3.45}$$

现在我们知道, $n_s/\tilde{\omega}=\frac{1}{366}$, $n_L/\tilde{\omega}=\frac{1}{28}$, $H=3.2732\times10^{-3}$, $M_L/M=\frac{1}{81.303}$, 所以 $k_s\doteq 9\times10^{-6}$ (恒星年)$^{-1}$, $k_L\doteq 1.9\times10^{-5}$(恒星年)$^{-1}$。如果暂且忽略不计黄白交角,即取 $\theta_L\doteq\theta_s=23°27'$, 则太阳和月球引起的岁差就是 $\frac{3}{2}(k_s+k_L)\cos\theta_s$, 其数值是 3.85×10^{-5}(恒星年)$^{-1}$ 或 50″(恒星年)$^{-1}$。考虑其他行星的影响,并考虑月球轨道与黄道并不重合,可以求得总岁差是 50″.25647(恒星年)$^{-1}$,即周期为 25,700 年。

太阳引起的章动周期是 $2\pi/2n_s$, 即半年。其振幅约为 0″.01。月球引起的章动则要复杂些。在太阳的吸引作用下,白道面和黄道面的交线以角速度 p 西移, $p=2\pi/18.6$ 年。这种运动引起了周期为 18.6 年的章动,振幅大约为 9″.206, 是章动的主要成份。月球绕地球转动引起的章动的周期是 $2\pi/2n_L$, 也就是只有两星期,振幅只有 0″.001 左右。

(六) 地球的动力学扁率

由(3.42)和(3.45)式得,日、月吸引产生的岁差 k 为:

$$k = \tilde{\omega}\left[\left(\frac{n_s}{\tilde{\omega}}\right)^2 + \left(\frac{n_L}{\tilde{\omega}}\right)^2 \frac{M_L}{M}\right] H。 \tag{3.46}$$

k, $\tilde{\omega}$, $n_s/\tilde{\omega}$, $n_L/\tilde{\omega}$ 和 M_L/M 都是已知量,因此便可计算出 H。在推导上式时,作了许多简化的假定,特别是忽略了日、月轨道的偏心率和倾角。并且,也忽略了其他行星的影响。把这些因素都考虑在内,便可求得 $H=3.2732\times10^{-3}=\frac{1}{305.51}$。这是我们在上面刚用过的数值。

二、转动轴的变化

(一) 欧 拉 章 动

前面只讨论了欧拉方程的特解。当然这个方程的全解应当包括相应的各次方程的通解,即自由运动。在(3.37)式中令 $\boldsymbol{L}=0$, 我们便得到:

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{3.47}$$

写成分量形式，即：

$$\begin{cases} A\,\dfrac{d\omega_1}{dt} + (C - A)\omega_2\omega_3 = 0, \\ A\,\dfrac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_3\omega_1 = 0, \\ C\,\dfrac{d\omega_3}{dt} = 0。 \end{cases} \tag{3.48}$$

由上式的最后一式可知 ω_3 保持不变，我们以常数 $\tilde{\omega}$ 表示之：

$$\omega_3 = \tilde{\omega}, \tag{3.49}$$

将它代入(3.48)式的头两式，我们就得到：

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_1}{dt} + \sigma_0\omega_2 = 0, \\ \dfrac{d\omega_2}{dt} - \sigma_0\omega_1 = 0, \end{cases} \tag{3.50}$$

其中，

$$\sigma_0 = \frac{C - A}{A}\,\tilde{\omega}。 \tag{3.51}$$

将(3.50)的第二式乘以 i，然后与第一式相加，则得：

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 + i\omega_2) = i\sigma_0(\omega_1 + i\omega_2), \tag{3.52}$$

因此

$$\omega_1 + i\omega_2 = Ke^{i(\sigma_0 t + \alpha)}, \tag{3.53}$$

式中，K，α 是实常数。可以将上式改写成：

$$\begin{cases} \omega_1 = K\cos(\sigma_0 t + \alpha), \\ \omega_2 = K\sin(\sigma_0 t + \alpha)。 \end{cases} \tag{3.54}$$

这一结果表明，角速度在赤道面上的投影的数值是不变的 ($\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = K$)，并以角速度 σ_0 在赤道面上旋转。既然 ω_3 也保持不变，所以我们可以得出下列结论，即：向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的数值不发生变化，但以角速度 σ_0 绕 x_3 轴等速转动。$\tilde{\omega} = 2\pi$(恒星日)$^{-1}$，

$$\frac{C - A}{A} = \frac{1}{305},$$

所以转动轴绕着形状轴以 $\dfrac{2\pi}{\tilde{\omega}}\,\dfrac{A}{C - A} = 305$ 恒星日，即大约 10 个月的周期旋转。这个结果是欧拉 (Euler) 在 1765 年得到的，所以刚体地球的这种运动叫做欧拉(自由)章动。相应的周期叫做欧拉(自由)周期。

由(3.2)式可得：

$$\boldsymbol{H} = \{A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3\} \tag{3.55}$$

这一结果说明，$\boldsymbol{H}$ 位于 x_3 轴和 ω 构成的平面内，并且在它们中间；在转动坐标系 X_i 中，$\boldsymbol{H}$ 的数值不发生变化，并且以角速度 σ_0 绕 x_3 轴等速转动。在"静止"坐标系 X_i 中，$\boldsymbol{H}$ 是守恒的，所以实际上是形状轴和角速度向量绕着 $\boldsymbol{H}$ 等速转动。

图 3.2 表示上述各种轴的几何关系。OZ 是垂直于黄道面的轴线，OC 是地球的形状轴，OI 是转动轴，OH 是角动量轴，实际上，地球的转动轴与角动量轴的夹角很小，只有千分之几秒，形状轴与转动轴的夹角要大 300 倍左右，图 3.2 仅是示意图。在作岁差运动时，地球坐标的锥面以 $-\frac{3}{2}k_r\cos\theta_r$ 的速率绕 OZ 顺时针转动（如果从上往下看的话），即向西移动。与此同时，形状轴 OC 和角速度向量 OI 绕角动量向量 OH 逆时针转动。

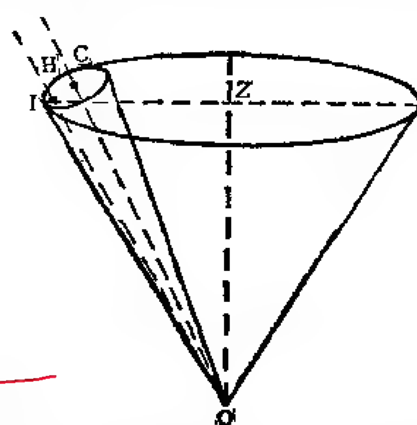


图 3.2 形状轴、角动量向量和角速度向量的几何关系示意图

（二）钱德勒晃动

以上分析中一直把地球当作刚体。真实地球在受到力矩作用和转动时都要发生形变。可以预料转动的实际变化不会与上述理论结果完全一致。事实正是这样。自欧拉 1765 年的工作以后，人们一直在寻找周期为 305 恒星日的转动轴的变化，但没有成功。直到 1891 年钱德勒（S. C. Chandler）发现了周期为 425—440 恒星日、即大约 14 个月的变化后人们才认识到这个周期约 14 个月的运动就是真实地球的自由章动。地球自由章动的周期不是 10 个月而是 14 个月，是由于它并非刚体。当地球转动轴在地球中的位置改变时，离心力对地球各部分的作用也随着改变，从而引起地球变形，使形状轴略向转动轴靠近。这也就等效于使转动惯量变大，从而使周期加大。为了区别于刚体地球的欧拉自由章动并纪念它的发现者，现在称真实地球的自由章动为钱德勒晃动。

我们来分析变形的旋转椭球体的运动。仍取质心为坐标原点。取一个以 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的坐标系。若地球是刚性的，则这个转动坐标系在地球中是固定的，此时地球里某一质点相对于"静止"坐标系的运动速度应为 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。但是地球是变形体，所以若以 $\boldsymbol{U}$ 表示质点相对于"静止"坐标系的运动速度，则该质点相对于转动坐标系的速度为 $\boldsymbol{U}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。今令

$$E_K=\frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2 d\tau, \tag{3.56}$$

我们可以选取某个 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$，使得：

$$E_K|_{\boldsymbol{\omega}=\bar{\boldsymbol{\omega}}}=\text{极小。} \tag{3.57}$$

由上式得：

$$\iiint_\tau \rho[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{U}-(r^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{rr})\cdot\bar{\boldsymbol{\omega}}]d\tau=0 \tag{3.58}$$

也就是：

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{H} \tag{3.59}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 是：

$$\boldsymbol{H}=\iiint_\tau \rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{U}d\tau, \tag{3.60}$$

满足上述条件的坐标系叫平均本体轴坐标系。对于这样选取的坐标系，运动方程和描述刚体运动的欧拉方程的形式是一样的：

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{H}}{dt}+\bar{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}, \tag{3.61}$$

只是式中的角速度是平均本体轴坐标系转动的角速度 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$。为简便计，以下分析中都省去 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ 上的一横。

仍让 x_i 轴分别和变形前的惯量主轴重合。变形后，惯量主轴发生变化，在原坐标系中，惯量积不再等于零。设变形不大，以至惯量矩与原先的主惯量差别很小，故仍以 A, B, C 表示；因变形不大，所以变形后的惯量积 C_{23}, C_{31}, C_{12} 都是一级小量。今以 D, E, F 分别表示 $-C_{23}$, $-C_{31}$, $-C_{12}$。考虑到 ω_2, ω_3 也都是一级小量，所以在略去高级小量之后，我们有：

$$\boldsymbol{H}=\{A\omega_1-E\omega_3,\ B\omega_2-D\omega_3,\ C\omega_3\}, \tag{3.62}$$

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{H}}{dt}=\{A\dot{\omega}_1-\dot{E}\omega_3,\ B\dot{\omega}_2-\dot{D}\omega_3,\ C\dot{\omega}_3\}, \tag{3.63}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}=\{(C-B)\omega_2\omega_3+D\omega_3^2,\ (A-C)\omega_3\omega_1-E\omega_3^2,\ 0\}。 \tag{3.64}$$

所以(3.61)式的分量形式是：

$$\begin{cases}A\dot{\omega}_1+(C-B)\omega_2\omega_3-\dot{E}\omega_3+D\omega_3^2=0,\\ B\dot{\omega}_2+(A-C)\omega_3\omega_1-\dot{D}\omega_3-E\omega_3^2=0,\\ C\dot{\omega}_3=0。\end{cases} \tag{3.65}$$

由上式的最后一式得：

$$\omega_3=\text{常数}=\bar{\omega}。 \tag{3.66}$$

若引进转动轴的方向余弦 $\{l, m, n\}$，则：

$$\begin{cases}l=\omega_1/\omega\doteq\omega_1/\bar{\omega},\\ m=\omega_2/\omega\doteq\omega_2/\bar{\omega},\\ n=\omega_3/\omega\doteq 1,\end{cases} \tag{3.67}$$

所以(3.65)的前两式式化为：

$$\begin{cases}A\dot{l}+(C-B)\bar{\omega}m-\dot{E}+D\bar{\omega}=0,\\ B\dot{m}+(A-C)\bar{\omega}l-\dot{D}-E\bar{\omega}=0。\end{cases} \tag{3.68}$$

转动在点 (x_1, x_2, x_3) 引起的位移和力位 $-\frac{1}{2}\bar{\omega}^2s^2$ 引起的位移一样，s 是该点到转动轴的距离。这个力位称为离心力位。当转动轴和形状轴不重合时，离心力位比这两个轴重合时的离心力位增加了 ΔU_ω：

$$\begin{aligned}\Delta U_\omega&=-\frac{1}{2}\bar{\omega}^2\{[(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1l+x_2m+x_3n)^2]-(x_1^2+x_2^2)\},\\ &\doteq\bar{\omega}^2x_3(lx_1+mx_2),\\ &=\bar{\omega}^2r^2\cos\theta\sin\theta(l\cos\varphi+m\sin\varphi),\\ &=-\frac{1}{3}\bar{\omega}^2a^2\left(\frac{r}{a}\right)^2P_{21}(\cos\theta)(l\cos\varphi+m\sin\varphi),\end{aligned} \tag{3.69}$$

式中的 (r, θ, φ) 是 (x_1, x_2, x_3) 点的球极坐标，a 是地球的平均半径，P_{21} 是连带勒让德函数。上式说明，ΔU_ω 是一个球谐函数。这个力位使地球发生弹性变形。变形后的地球在其外部产生了一个附加力位 ΔU_T。ΔU_T 满足拉普拉斯方程，所以可以将它表示为：

$$\Delta U_T=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}P_{nm}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)。 \tag{3.70}$$

通常把附加力位与引起它的力位之比叫做勒夫数。若以 k 表示地球表面处的勒夫数，则由以上两式可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{a^{n+1}}P_{nm}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)$$
$$=-\frac{k}{3}\tilde{\omega}^2a^2P_{21}(\cos\theta)(l\cos\varphi+m\sin\varphi),$$

由此确定出：

$$\begin{cases} a_{21}=-\dfrac{k}{3}\tilde{\omega}^2a^5l, \\ b_{21}=-\dfrac{k}{3}\tilde{\omega}^2a^5m, \\ a_{nm}=b_{nm}=0,\ n\neq 2,\ m\neq 1。\end{cases} \tag{3.71}$$

从而

$$\Delta U_l=-\frac{k}{3}\tilde{\omega}^2a^2\left(\frac{a}{r}\right)^3P_{21}(\cos\theta)(l\cos\varphi+m\sin\varphi),$$
$$=k\tilde{\omega}^2x_3(lx_1+mx_2)\left(\frac{a}{r}\right)^5。\tag{3.72}$$

从另一个角度看，按照麦柯拉夫公式［(2.66)式］，变形前、后地球的引力位 U，U' 分别为：

$$U=-G\left[\frac{M}{r}+\frac{(A+B+C-3I)}{2r^3}\right],\tag{3.73}$$

$$U'=-G\left[\frac{M}{r}+\frac{(A+B+C-3I')}{2r^3}\right],\tag{3.74}$$

其中，

$$I=(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2)\frac{1}{r^2},\tag{3.75}$$

$$I'=(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2-2Dx_2x_3-2Ex_3x_1-2Fx_1x_2)\frac{1}{r^2},\tag{3.76}$$

所以

$$\Delta U_r=U'-U=-\frac{3G}{r^5}(Dx_2x_3+Ex_3x_1+Fx_1x_2)。\tag{3.77}$$

对比(3.72)式和上式，即得：

$$\begin{cases} D=-\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5m}{3G}, \\ E=-\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5l}{3G}, \\ F=0。\end{cases}\tag{3.78}$$

将上式代入(3.68)式，即得：

$$\begin{cases} \left(A+\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}\right)\dot{l}+\left(C-B-\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}\right)\tilde{\omega}m=0, \\ \left(B+\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}\right)\dot{m}+\left(A-C+\dfrac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}\right)\tilde{\omega}l=0。\end{cases}\tag{3.79}$$

注意到 $A=B$，并令

$$\sigma_c=\frac{C-A-\frac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}}{A+\frac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}}\cdot\tilde{\omega},\tag{3.80}$$

则(3.79)化为

$$\begin{cases}\dot{l}+\sigma_c m=0,\\ \dot{m}-\sigma_c l=0。\end{cases}\tag{3.81}$$

这意味着

$$\begin{cases}l=\dfrac{K}{\tilde{\omega}}\cos(\sigma_c t+\alpha),\\ m=\dfrac{K}{\tilde{\omega}}\sin(\sigma_c t+\alpha)。\end{cases}\tag{3.82}$$

相应的周期 τ_c 为:

$$\tau_c=\frac{2\pi}{\sigma_c}=\frac{A+\frac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}}{C-A-\frac{k\tilde{\omega}^2a^5}{3G}}\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}(\text{恒星日})。\tag{3.83}$$

由上式可见，弹性变形使自由章动的周期变长。代入 $G=6.670\times10^{-8}$ 达因·厘米^2/克^2，$a=6.371\times10^8$ 厘米，并设 $k=0.30$，可得 $\tau_c=448$ 恒星日。仔细的理论计算表明，地幔的弹性可使自由章动的周期延长约 120 天。由于地球外核是液体，致使这个周期略为缩短。潮汐摩擦作用又使之增长。所以实测的钱德勒晃动的周期在 425—440 恒星日之间。

地球的转动轴相对于形状轴的运动可以从纬度变化中反映出来。通过纬度变化资料的功率谱分析可以得到两个峰，一个在 437 日，一个在 365 日。前者即钱德勒周期，相当于 $k=0.284$，在目前用固体潮确定 k 值的精度范围内，这个数值和上面取的 0.30 是一致的。后者是一种周年变化，振幅约为 0″.09，是季节性变化引进的。此外，还包含有半年变化的成份，其振幅只约为 0″.01。

(三) 周 年 变 化

地球上的质量迁移，如大气的流动、降雪量的变化、地下水、海水的流动等季节性变化都会影响地球的惯量张量，使得转动轴的方向发生变化。现在我们来分析因为质量迁移引起的转动轴的运动。

仍采用上节用的转动坐标系。我们先来求质量移动后的惯量主轴的方向。设惯量主轴变化不大，所以质量移动后的惯量张量 $\mathbf{C}_1$ 为:

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}A & -F_1 & -E_1\\ -F_1 & B & -D_1\\ -E_1 & -D_1 & C\end{bmatrix},\tag{3.84}$$

其中，D_1，E_1，F_1 是一级小量。惯量主轴的方向 $\boldsymbol{\xi}$ 可以由本征方程

$$\mathbf{C}_1\cdot\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}\tag{3.85}$$

求得。式中，λ 是本征值，这就是：

$$\begin{cases}(A-\lambda)\xi_1-F_1\xi_2-E_1\xi_3=0,\\-F_1\xi_1+(B-\lambda)\xi_2-D_1\xi_3=0,\\-E_1\xi_1-D_1\xi_2+(C-\lambda)\xi_3=0。\end{cases}\tag{3.86}$$

质量移动后的形状轴和原来的形状轴差别不大，也就是 ξ_1, ξ_2 是小量，$\xi_3\doteq 1$。在略去高级小量后，上式化为：

$$\begin{cases}(A-\lambda)\xi_1-E_1=0,\\(B-\lambda)\xi_2-D_1=0,\\C-\lambda=0,\end{cases}\tag{3.87}$$

从而

$$\begin{cases}\lambda=C,\\\xi_1=\dfrac{E_1}{A-C},\\\xi_2=\dfrac{D_1}{B-C}。\end{cases}\tag{3.88}$$

和上一节的情况类似，因为转动轴和质量移动后的形状轴不一致，地球变形引起了附加力位：

$$\Delta U_T=k\tilde{\omega}^2x_3[(l-\xi_1)x_1+(m-\xi_2)x_2]\left(\frac{a}{r}\right)^5,\tag{3.89}$$

上式是把(3.72)式的 l 换成 $l-\xi_1$，m 换成 $m-\xi_2$ 后得到的。

从另一角度看，若地球绕质量移动后的形状轴转动，则其引力位

$$U_1=-G\left[\frac{M}{r}+\frac{(A+B+C-3I_1)}{2r^3}\right],\tag{3.90}$$

其中

$$I_1=\frac{1}{r^2}(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2-2D_1x_2x_3-2E_1x_3x_1-2F_1x_1x_2)。\tag{3.91}$$

当它绕转动轴转动时，其引力位

$$U'=-G\left[\frac{M}{r}+\frac{(A+B+C-3I')}{2r^3}\right],\tag{3.92}$$

其中

$$I'=\frac{1}{r^2}(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2-2Dx_2x_3-2Ex_3x_1-2Fx_1x_2)。\tag{3.93}$$

所以引力位的变化为

$$\Delta U_T=-\frac{3G}{r^5}[(D-D_1)x_2x_3+(E-E_1)x_3x_1+(F-F_1)x_1x_2]。\tag{3.94}$$

对比(3.89)式和上式，就可以得到：

$$\begin{cases}D=D_1-\dfrac{K\tilde{\omega}^2a^5}{3G}(m-\xi_2),\\E=E_1-\dfrac{K\tilde{\omega}^2a^5}{3G}(l-\xi_1),\\F=F_1,\end{cases}\tag{3.95}$$

从而

$$H=\left\{A\omega_1-E_1\omega_3+\frac{k\tilde{\omega}^3a^5}{3G}(l-\xi_1),\ B\omega_2-D_1\omega_3\right.$$

$$\left.+\frac{k\tilde{\omega}^3a^5}{3G}(m-\xi_2),\ C\omega_3\right\}, \tag{3.96}$$

$$\omega\times H=\left\{C\omega_2\omega_3-\omega_3\left[B\omega_2-D_1\omega_3+\frac{k\tilde{\omega}^3a^5}{3G}(m-\xi_2)\right],\right.$$

$$\left.\omega_3\left[A\omega_1-E_1\omega_3+\frac{k\tilde{\omega}^3a^5}{3G}(l-\xi_1)\right]-C\omega_1\omega_3,\ 0\right\}。 \tag{3.97}$$

将这些表示式代入运动方程(3.68)式中，即得：

$$\begin{cases}\dot{l}+\sigma_c m=-\dfrac{n_c}{\tilde{\omega}}\dot{\xi}_1+\sigma_c\xi_2,\\ \dot{m}-\sigma_c l=\dfrac{n_c}{\tilde{\omega}}\dot{\xi}_2-\sigma_c\xi_1,\end{cases} \tag{3.98}$$

因为 $\dot{\xi}_1/\tilde{\omega}$ 和 $\dot{\xi}_2/\tilde{\omega}\ll\xi_1$ 和 ξ_2，所以上式可化为：

$$\begin{cases}\dot{l}+\sigma_c m=\sigma_c\xi_2,\\ \dot{m}-\sigma_c l=-\sigma_c\xi_1,\end{cases} \tag{3.99}$$

或

$$\frac{d}{dt}(l+im)-i\sigma_c(l+im)=-i\sigma_c(\xi_1+i\xi_2)。 \tag{3.100}$$

与上列方程相应的齐次方程就是(3.81)式，它的解如(3.82)所示。上列方程的特解相当于强迫运动。

不失一般性，设 ξ_1，ξ_2 作椭圆运动：

$$\xi_1+i\xi_2=\bar{n}e^{i\alpha t}+\bar{n}'e^{-i\alpha t}, \tag{3.101}$$

则可求得：

$$l+im=\frac{\bar{n}}{1-\dfrac{\alpha}{\sigma_c}}e^{i\alpha t}+\frac{\bar{n}'}{1+\dfrac{\alpha}{\sigma_c}}e^{i\alpha t} \tag{3.102}$$

倘若 ξ_1，ξ_2 系由周年变化引起的，即 $2\pi/\alpha=1$ 年，则因 $\sigma_c=2\pi/\tau_c$，所以

$$l+im=\frac{\bar{n}}{1-\tau_c}e^{i2\pi t}+\frac{\bar{n}'}{1+\tau_c}e^{-i2\pi t}。 \tag{3.103}$$

当 $t=0$ 时，$l=\dfrac{\bar{n}'}{1+\tau_c}-\dfrac{\bar{n}}{\tau_c-1}=b$，$m=0$；当 $t=1/4$ 时，$l=0$，

$$m=-\frac{\bar{n}'}{1+\tau_c}-\frac{\bar{n}}{\tau_c-1}=-a。$$

这里 a，b 分别表示半长轴和半短轴。这说明转动轴所作的椭圆运动和形状轴作的椭圆运动不同：两个椭圆位相差 $\pi/2$，而且转动方向相反。

(四) 纬度变化

1. 地心纬度、天文纬度和地理纬度

前面我们讨论了岁差和章动。发生岁差和章动时，地球转动轴和形状轴的相对位置

不变，但它们的方向在空间中发生变化。我们也讨论了自由章动，它们是转动轴相对于形状轴的摆动。这两种运动在地球上都可以测量出来。通过测量恒星的赤纬，可以观测到岁差和受迫章动；通过测量纬度，可以观测到转动轴相对于形状轴的摆动。

纬度有好几种不同的定义。所谓地心纬度 ψ 指的是地面上任一点与地心的联线和赤道面的夹角（图 3.3）。天文纬度指的是地面上任一点的铅垂线（大地水准面的法线）与赤道面的夹角 ϕ'。地理纬度 ϕ 则是参考椭球体上某点的法线与赤道面的夹角。因为大地水准面接近于参考椭球面，所以天文纬度和地理纬度相差不大，我们这里不加区别。

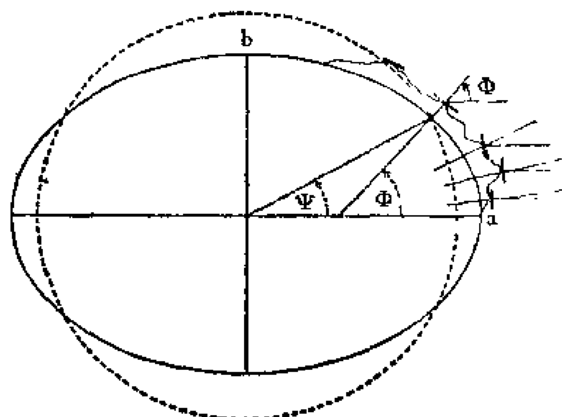


图 3.3 地心纬度、天文纬度和地理纬度

地心纬度与地理纬度之间有一个简单的关系。设参考椭球面的截面的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3.104}$$

其中 a，b 分别是参考椭球的长、短轴。所以

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x}{y}。 \tag{3.105}$$

因为 $\tan\psi=y/x$，$\tan\phi=-(dy/dx)^{-1}$，而偏心率 $\varepsilon=\sqrt{1-(b/a)^2}$，所以 ψ 和 ϕ 的关系可表示为：

$$\tan\psi=(1-\varepsilon^2)\tan\phi。 \tag{3.106}$$

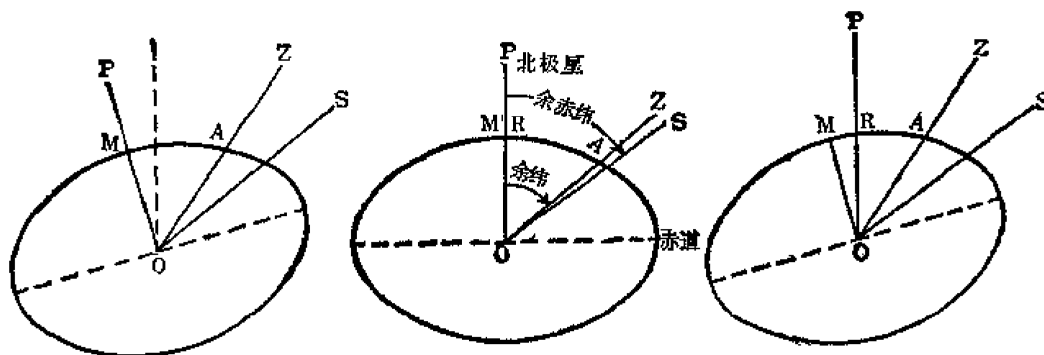


图 3.4 岁差(左)和晃动(右)，中图为未受扰动的情形

转动轴和形状轴相对位置的变化在测量上是可以和岁差或受迫章动区分开的。图 3.4 表示如何区分它们。图 3.4 的中图表示受扰动的地球的位置。OP 代表转动轴，北极星在它附近。A 是地面上某一指定地点，Z 是其天顶，S 是空间中的某一恒星，R 是 OP 和地面的交点，即地极。M 是形状轴和地面的交点，即参考极。在图 3.4 的中图里，M 和 R 是重合的。

在发生岁差或受迫章动时（图 3.4 的左图），形状轴（连同转动轴）的位置发生了变化。在这幅图中，M 和 R 也是重合的。这时恒星 S 的余赤纬（$\angle SOP$）发生变化，而 A 点的余

纬（$\angle ZOP$）不发生变化。

在发生晃动时（图 3.4 的右图），形状轴（因而参考极 M）离开了转动轴，此时，恒星的余赤纬不变而 A 点的余纬发生变化。

这就是说，岁差和受迫章动可以由恒星的赤纬测定，而晃动可以由纬度测定。当然，发生晃动时，经度也有变化，只是因为经度的变化不易测量，所以一般都是通过纬度变化的观测来研究转动轴的运动。

2. 观测纬度的方法

测量纬度和赤纬的基本方法是用子午环（一架可以绕东西向水平轴转动的折射望远镜）观测恒星上中天和下中天时的天顶距。在恒星上中天时，其天顶距（图 3.5 左图）

$$Z = \theta - \delta, \tag{3.107}$$

式中，θ 是余纬，δ 是该恒星的余赤纬。下中天时，天顶距

$$Z' = \theta + \delta。 \tag{3.108}$$

所以

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{1}{2}(Z' + Z), \\ \delta = \dfrac{1}{2}(Z' - Z)。 \end{cases} \tag{3.109}$$

用这种方法可以同时确定纬度和赤纬，是测定纬度和赤纬的基本方法。

另一种方法称为塔尔柯特（Tallcott）法。这种方法是选取中天时天顶距近似相等，分别位于天顶南北并在几分钟内相继通过子午面的两颗恒星，用天顶仪测量其天顶距之差。当这两颗恒星中天时（图 3.5 右图），

$$\begin{cases} \theta = \delta - Z, \\ \theta = \delta' + Z', \end{cases} \tag{3.110}$$

式中，δ 是位于天顶南面的恒星的余赤纬，Z 是其天顶距，δ' 和 Z' 是天顶北面的恒星的相应的量。将上式的一、二两式相加即得：

$$\theta = \frac{1}{2}(\delta + \delta') + \frac{1}{2}(Z' - Z)。 \tag{3.111}$$

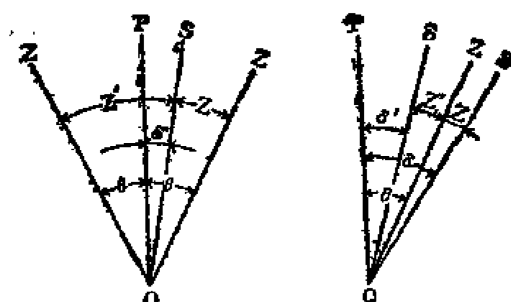


图 3.5　观测纬度的方法

左图为基本方法，右图为塔尔柯特法。

δ 和 δ' 可以由天文年历的星表中查到，$Z' - Z$ 是这两颗恒星的天顶距之差。塔尔权特法不是基本方法，因为用它来测量纬度时需要予先知道平均极距 $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$。但在纬度观测中经常使用这个方法，因为它有两个优点：用两颗星的天顶距相减可以消除蒙气差，并且用测微器测量小角度 $Z' - Z$ 比在一个度盘上测量 Z 和 Z' 精确。

为了精确地测定纬度，除了必须考虑大气折射影响外，还必须考虑其他因素的影响，如固体潮引起的垂线偏差。现在纬度测量已是一件常规工作。国际纬度局（International Latitude Service, 缩写为 ILS, 1962 年起改名为国际极移局，International Polar Motion Service, 缩写为 IPMS）在北半球有 39 个同纬度的、经度等间距的纬度站。每个站的观测

精度是 0.1 弧秒，所以这些纬度站观测结果的平均值的精度约为 0.01 秒。

3. 地 极 移 动

地球转动轴相对于形状轴位置的变化表现为地极位置的移动，简称极移。地极移动是相对于形状轴而言的，可是形状轴在地球上也不是固定的。为了测定地极的位置，1967 年国际天文学联合会（IAU）和国际大地测量和地球物理联合会（IUGG）决定采用 1900 年至 1905 年地球转动极的平均位置作为参考点，叫国际习用原点（Conventional International Origin，缩写为 CIO）。这样，极移便可以用转动极相对于 CIO 的位移来表示。

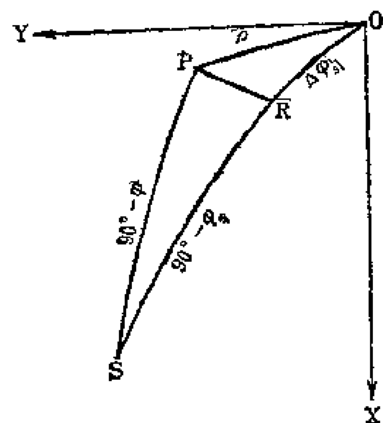


图 3.6　纬度变化

图 3.6 中的 O 点表示 CIO，过 CIO 作两条切线 Ox 和 Oy。x 轴通过格林尼治子午面，以指向格林尼治的方向为正，y 轴通过西经 90°。x, y 组成左旋坐标系。在此坐标系内，地极 P 的坐标可用直角坐标（x, y）表示，也可用极坐标（ρ, θ）表示，θ 从 x 轴顺时针算起。由图 3.6 可知，

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta。\end{cases} \tag{3.112}$$

设 S 是纬度观测站，它对 O 的地理坐标为 (φ_s, λ_s)，对地极 P 的地理坐标为（φ, λ），于是，在 S 点测得的纬度变化 $\Delta\varphi_s = \varphi - \varphi_s$。

从地极引一条球面垂线 $\overset{\frown}{PR}$ 至子午线 $\overset{\frown}{OS}$。因 $\overset{\frown}{OP}$ 很小，故 $\overset{\frown}{OR}$, $\overset{\frown}{PR}$ 也很小，于是球面三角形可视为直角三角形。$\overset{\frown}{PS} = 90° - \varphi$, $\overset{\frown}{OS} = 90° - \varphi_s$, $\overset{\frown}{RS} \doteq \overset{\frown}{PS}$,

$$\overset{\frown}{OR} = \overset{\frown}{OS} - \overset{\frown}{RS} \doteq \Delta\varphi_s。$$

又因为

$$\overset{\frown}{OR} = \rho\cos(\theta - \lambda_s),$$

所以，

$$\Delta\varphi_s = \rho\cos\theta\cos\lambda_s + \rho\sin\theta\sin\lambda_s,$$

$$\Delta\varphi_s = x\cos\lambda_s + y\sin\lambda_s。\tag{3.113}$$

考虑到观测误差、星表误差、天文常数的误差、地方性的误差（如大气折射、垂线变化等），应当在上式中再加上一项 z_φ:

$$\Delta\varphi_s - z_\varphi = x\cos\lambda_s + y\sin\lambda_s, \tag{3.114}$$

z_φ 项称为木村项。

由上式可知，若两纬度站的经度相差 180°，则一处的纬度增加时，另一处的纬度应当相应地减小。图 3.7 是一个例子。1891 年，为了和柏林同时观测纬度，一支德国探险队被派遣到和柏林经度相差 171°（接近 180°）的檀香山。这幅图是这两个地方的纬度在 1891—1893 年间的变化。从图上可见，当檀香山的纬度减少时，柏林的增加；反之亦然。

图 3.8 是 1962 年至 1968 年的极移轨迹。地极的移动在 xy 切面内是螺旋形的曲线，

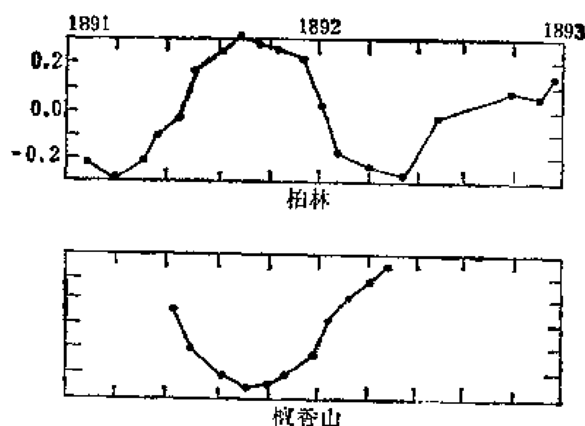


图 3.7 柏林和檀香山两地的纬度变化

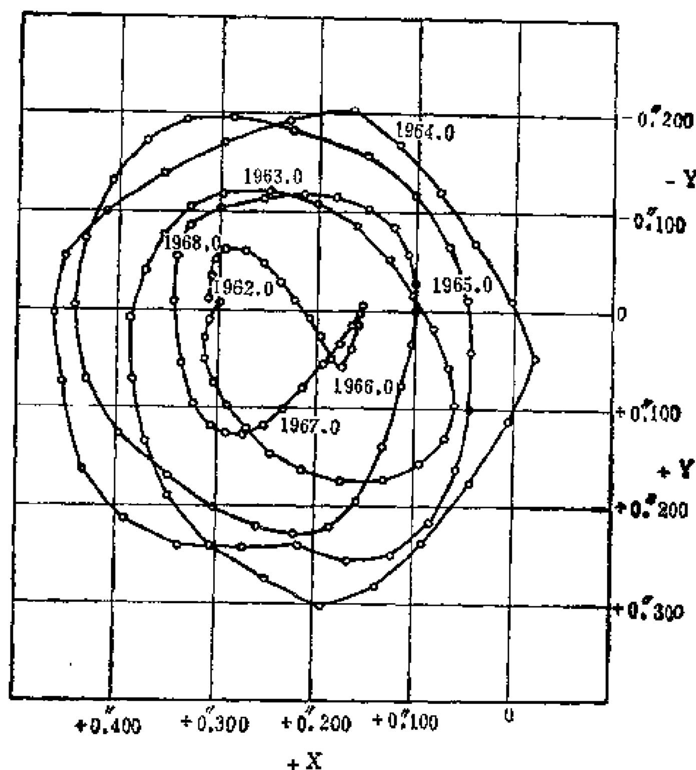


图 3.8 1962 年至 1968 年的极移轨迹

它交错地时而向内、时而向外移动，有时有驻点或者掉转方向旋转。在这幅图中，迴线的最大直径约为 0″.5；自 1900 年以来，这种迴线的最大直径曾达到 0.″7。转动轴相对于参考轴的角位移与地极相对于参考极的线位移的换算关系是：0.″0100 = 0.308 米，所以幅度为 0.″7 的转动轴的角位移相当于地极在地面上移动了 21 米。

极移的轨迹看起来很不规则，但是用频谱分析法可以从中分析出不同周期的分量。通过对大约 80 年来极移数据的分析，可以得到一个 14 个月的分量和一个一年的分量。前者就是钱德勒晃动，后者是周年变化。

地球的外核是液体，它除了对钱德勒周期有影响外，还由于与地幔耦合，对地球的转动产生微小的干扰，这个成份叫做马柯维茨（Markowitz）章动，其周期略小于一日，振幅

约为 0″02，地球的固体内核通过外核也与地幔耦合，产生相同数量级的干扰，周期约为 24—40 年。

极移轨迹的幅度大约每 6—7 年达到一次最小值，因此一个地点的平均纬度就取它在 6—7 年间的纬度的平均值，而地球的平均形状极则由许多纬度站的平均纬度计算出。这个极已从七十年前的位置朝芬兰方向移动了大约 0.″2。这种运动称为平均极的长期变化。长期变化很不规则，很难将它与大陆漂移引起的纬度变化分开。它可能是海平面变化和地球内部构造运动引起的转动惯量变化的结果。

（五）钱德勒晃动的衰减和激发

钱德勒周期并不是单值的，而是在相当宽的范围内（由 425 天到 440 天）内变化。这表明它是一个有阻尼的运动。这种阻尼运动的衰减时间常数有人估计是 27 年左右。不过，也有人估计它为 225 年。钱德晃动的振幅在几十年的观测中一直保持在 0.″1 至 0.″2 间而不消失，这意味着它不断地受到新的激发。设钱德勒晃动是自由周期为 τ_c 的衰减运动，以品质因质 Q 表示贮存在这个振荡系统中的能量 E 和在一个周期内耗散的能量 ΔE 之比：

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta E}{E}, \tag{3.115}$$

则可以证明，Q 可以用钱德勒晃动的共振曲线的宽度 $2\Delta\sigma$ 与峰值频率 σ_c 的比值来表示：

$$Q^{-1} = \frac{2\Delta\sigma}{\sigma_c}。 \tag{3.116}$$

由钱德勒晃动的频谱，可以计算共振曲线的宽度，从而求得 Q 值。有人求得 Q 大约是 72 ± 20，相当于衰减的时间常数为 27 年；但也有人求得 $Q = 600$，相当于衰减的时间常数为 225 年。

钱德勒晃动衰减很快。是什么原因使它衰减？这个问题尚未解决。地幔的非弹性所产生的衰减很小。潮汐摩擦和地幔与地核的滞性耦合或电磁耦合所消耗的能量，也不能造成数量级这样大的衰减。有人曾试图从地幔物质的流变性质找出衰减的原因，但未能得到令人满意的结果。近年来有人认为钱德勒晃动可能是由两个自由周期相近(约相差十天)的振动组成的，它们迭加在一起，产生“拍”。照此观点，钱德勒晃动振幅的变化和频谱的加宽只是一种干涉现象，而不是由于衰减。不过，要从不到八十年的极移记录中分析出相差十天左右的两个周期成份，从统计分析的角度看，是很不可靠的。这种解释有待进一步研究。

钱德勒晃动的激发，同样是一个悬而未决的问题。有人认为，外界的影响不大，主要是地球内部角动量的再分布引起钱德勒晃动，同时也引起转速的变化。

布拉德 (E. C. Bullard) 认为，可以用地幔和地核间的电磁耦合同时解释钱德勒晃动和转速的变化。这是因为硅酸盐在温度升高时具有半导体的特性，所以地幔的下部能导电。当地幔和产生磁场的地核之间出现运动上的差异时，它们之间就要出现电磁耦合作用，结果导致钱德勒晃动衰减，并导致地球转速发生变化。

为简单计，假定地核是一个整体，但以不同于地幔的角速度转动。我们先来分析地幔和地核在转动速度上的差异是如何通过电磁耦合恢复平衡的。以 I_c 和 I_m 分别表示地核

和地幔的惯量矩，以 $\omega+\Delta\omega_c$ 和 $\omega+\Delta\omega_m$ 分别表示它们转动的角速度。其中，ω 是它们平衡时的角速度。由于角动量守恒，所以

$$I_m\Delta\omega_m+I_c\Delta\omega_c=0, \tag{3.117}$$

从而地幔和地核的角速度之差

$$\Delta\omega=\Delta\omega_m-\Delta\omega_c=\Delta\omega_m\left(1+\frac{I_m}{I_c}\right)=8.74\Delta\omega_m \tag{3.118}$$

地幔（导体）以角速度 $\Delta\omega$ 切割磁力线，感应电流应正比于 $\Delta\omega$。设地幔与地核之间的耦合是线性的，也就是说使地幔与地核的角速度趋于一致的力矩正比于 $\Delta\omega$：

$$L=K_R\Delta\omega, \tag{3.119}$$

其中，K_R 是耦合系数，它与地幔的导电率和磁力线穿透它的具体情况有关。将(3.118)式和(3.119)式代入下式：

$$L=-I_m\frac{d}{dt}\Delta\omega_m, \tag{3.120}$$

就可得出：

$$\frac{d(\Delta\omega_m)}{\Delta\omega_m}=-K_R\left(\frac{1}{I_m}+\frac{1}{I_c}\right)dt, \tag{3.121}$$

从而

$$\Delta\omega_m=(\Delta\omega_m)_0e^{-t/\tau_R} \tag{3.122}$$

其中，

$$\tau_R=\left[K_R\left(\frac{1}{I_m}+\frac{1}{I_c}\right)\right]^{-1} \tag{3.123}$$

这就是说，$\Delta\omega_m$ 以时间常数 τ_R 指数地衰减。若取 $\tau_R\doteq10$ 年，那么可得

$$K_R\doteq2.6\times10^{28}\ 焦耳\cdot秒。$$

在弱耦合（即地核几乎跟不上地幔的晃动）情形下，钱德勒晃动的能量 E_W 等于：

$$E_W=\frac{1}{2}I_mH\omega^2\alpha^2, \tag{3.124}$$

式中，α 是钱德勒晃动的角振幅。在现在讨论的情形下，地幔和地核的相对角速度

$$\Delta\omega'=\sigma_c\alpha, \tag{3.125}$$

式中，σ_c 是钱德勒晃动的角频率。如果其衰减是由于地幔和地核之间的电磁耦合，那么：

$$\frac{dE_W}{dt}=-K_W(\Delta\omega')^2=-K_W\sigma_c^2\alpha^2, \tag{3.126}$$

式中，K_W 是钱德勒晃动的耦合系数。将(3.124)式代入上式，即得：

$$\frac{dE_W}{dt}=-\frac{2K_W\sigma_c^2}{I_mH\omega^2}E_W, \tag{3.127}$$

所以

$$E_W=(E_W)_0e^{-t/\tau_W}, \tag{3.128}$$

式中，

$$\tau_W=\frac{I_mH}{2K_W}\left(\frac{\omega}{\sigma_c}\right)^2。 \tag{3.129}$$

上式说明，E_W 以时间常数 τ_W 指数地衰减。

K_W 应当和 K_R 相当，即 $K_W\doteq K_R=2.6\times10^{28}$ 焦耳·秒，所以由上式可得

$$\tau_W \doteq 2.5 \times 10^4 \text{ 年。}$$

这个数值比从实际资料得到的最大的衰减时间(225 年)大两个数量级。由此看来，电磁耦合很难解释钱德勒晃动和转速变化。

有人认为，钱德勒晃动可能是由大地震激发的。这种见解在六十年代前已有人提出过，但不太受重视。1967 年，曼新哈 (Mansinha) 和斯迈里 (Smylie) 又提出这个问题。他们认为大地震造成大规模的质量迁移，使地球的转动惯量发生变化，从而激发地震。

曼新哈和斯迈里的理论的要点是：在地球内部，震前和震后，应力都是动态平衡的。这就使得地球的质心不因地震而移动，即：

$$\iiint_{(M)} \Delta \boldsymbol{r} dm = 0, \tag{3.130}$$

其中，$\Delta \boldsymbol{r}$ 是坐标原点至质量 dm 的矢径在地震前后的变化，即 dm 的位移矢量，积分遍及整个震源区和整个地球。这个式子说明，虽然地震时可能出现显著的地壳升降和错动，但从大范围看，位移必定是平衡的。

地震是岩层的错动。设想地震时，两块质量为 m_1 和 m_2 的岩石相对移动。设地震前它们到转动轴的距离分别为 r_1 和 r_2，地震时各自移动了 Δr_1 和 Δr_2. 由上式可得：

$$m_1 \Delta r_1 + m_2 \Delta r_2 = 0。 \tag{3.131}$$

相对于转动轴，地球的惯量矩因为地震发生了 ΔI 的变化：

$$\Delta I = m_1[(r_1 + \Delta r_1)^2 - r_1^2] + m_2[(r_2 + \Delta r_2)^2 - r_2^2]。 \tag{3.132}$$

设 Δr_1 和 Δr_2 是小量，运用(3.123)式并略去二级小量，我们便得到：

$$\Delta I = 2m_1 \Delta r_1 (r_1 - r_2)。 \tag{3.133}$$

由上式不难估计一个大地震引起的惯量矩的变化。以 1964 年阿拉斯加 8.3 级大地震为例。取 $\Delta r_1 = 22$ 米，$r_1 - r_2 = 200$ 公里(相当于断层面宽度)，假定断层长度为 800 公里，则发生位移的质量所占体积为 800 公里 × 200 公里 × 200 公里。设密度为 3 克/厘米^3，则 $m_1 \doteq 10^{25}$ 克，从而

$$\Delta I = 8.5 \times 10^{33} \text{ 克·厘米}^2。 \tag{3.134}$$

惯量积的变化与惯量矩的变化是同一数量级的量。在岩层错动方向最有利的情况下，数量级为 ΔI 的惯量积的变化可以引起钱德勒晃动的角振幅发生

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta I}{C - A} = 3.5 \times 10^{-9} \text{ 弧度} \tag{3.135}$$

的变化[参阅(3.88)式]。在计算上式时，取 $C - A = 2.6 \times 10^{42}$ 克·厘米^2。这个幅度是太小了；因为现在观测到的钱德勒晃动的平均幅度是 $0.''15 = 7.5 \times 10^{-7}$ 弧度。

地震能量主要是由为数不多的较大地震释放的。由位错理论可知，惯量矩的变化近似与能量的平方成正比。这样一来，只有特别大的地震才能引起惯量矩的显著变化。但是计算值和观测值差别太大，即便是同步地发生一系列特别大的地震也不足以激发钱德勒晃动。

人们对曼新哈和斯迈里发表的极移和地震的相关性的实际资料也产生了怀疑。曼新哈和斯迈里从几十年来的极移资料中发现，大地震时平均地极的轨迹由一个圆弧换到另一个圆弧上，轨迹出现了间断。然而，有人指出，如果用不同的统计分析方法处理数据，则轨迹的突然性转折和大地震的相关性其实不大。

即使极移和大地震确有关系，也必须分辨它究竟是大地震的成因，还是大地震的结果。如果是前者，那么这种联系对地震预报有重要意义。第三种可能是，极移和地震都来源于地球内部的某种过程，它们在表面上相关，但未必有直接的因果关系。

激发钱德勒晃动的另一种可能机制是大气的运动。大气运动的质量不大，但运行的距离却不小，可与地球的半径相比拟。设想质量为 Δm 的大气移动了像地球半径那么远的距离，则惯量矩的变化 ΔI 为:

$$\Delta I = \Delta m a^2。\tag{3.136}$$

如果 $\Delta I = 10^{36}$ 克・厘米^2，则

$$\Delta m = \Delta I / a^2 = 2.5 \times 10^{18} \text{ 克}。\tag{3.137}$$

即 2.5×10^{18} 克的大气就足以引起 10^{36} 克・厘米^{2}的惯量矩的变化。这个数值仅是全部大气质量的 5×10^{-4}。根据1873年至1950年期间的气压资料，芒克 (Munk) 和哈森 (Hassan) 分析了大气惯量矩和惯量积的月均值。他们得出结论说，大气的运动不足以激发钱德勒晃动(差一至两个数量级)，但极移中的周年变化则是由大气激发的。

激发钱德勒晃动的又一种可能的机制是太阳风(太阳幅射的粒子流)。但计算表明太阳风的扰动和不规则性引起的、作用在磁层上的力矩太小，不足以解释钱德勒晃动。

有人认为，地核的湍流对地幔的电磁效应产生一种短期的冲量，使地球的自转轴突然改变方向，但形状轴不变。这同时会使极移轨迹发生转折，使地球内部应力重新分布，从而也可能触发地震。

还有人认为，地核和地幔的扁率不同，它们在旋进时产生运动上的差异，造成较大的电磁效应，激发极移。

三、转速的变化

(一) 地球的转动和时间

时间标准原先是根据地球的转动确定的。地球自转一周的时间叫做一日。由于观测周期所采用的参考点不同，"一日"的定义也略有不同。若取春分点为标准，则它连续两次通过同一子午面的时间，叫做一恒星日；若取太阳为标准，就叫做太阳日。地球不但自转，而且绕太阳公转，公转的轨道是椭圆的，所以太阳日在一年中不是等长的。取其一年的平均值，就得到一平均太阳日，这就是日常生活中所用的日，每日有 86,400 平均太阳秒。但在天文观测中仍用恒星时。一个平均太阳日比一个恒星日长 3′55″.909 平均太阳时。

地球绕太阳一周的时间叫做一年。若以恒星为标准，这段时间叫做一恒星年，它有 365.25636 个平均太阳日，每百年约增长 0.01 秒，这是地球公转的真正周期。若以春分点为标准，就得到回归年。因为分点的岁差效应，回归年比恒星年约短 20 分钟，它有 365.2422 个平均太阳日，每百年约减短 0.53 秒。因为季节变化取决于太阳相对于春分点的位置，所以民用和纪年一般都采用回归年。

根据地球的自转确定的时间叫世界时 (UT, Universal Time 的缩写)，它以英国格林尼治的地方时间为起点，按照各地的经度向后推移，所用的单位是平均太阳时。这是一切民用时间的标准。显然，若要以地球的自转确定时间，自转速度就必须很均匀。其实不

然，近年来通过天文测量和原子钟发现，地球的转速并不是真正均匀的，而是有微小的变化。所以，从 1955 年起，在精密的天文测量中引用了原子时（AT, Atomic Time 的缩写）。原子时是由原子的振动频率确定的，与地球的转动无关。氢、铷、铯等元素的原子振动频率稳定性很高，相对变化只有 10^{-13}—10^{-14}，是极均匀的时间标准。现在用的另一种计时方法是历书时（ET, Ephemeris Time 的缩写）。历书时是由日、月和行星的运动确定的、与地球自转没有关系，只取决于牛顿定律。一历书秒等于 1900 年开始的那个回归年除以该年的秒数，即 31,556,925.9747。铯原子的振动频率是 9,192,631,770±20 周/历书秒，所以现在国际上规定的时间标准是：1 历书秒等于铯原子 133（C_s^{133}）振动 9,192.63177 兆周的时间。

（二）地球转速的变化

地球的自转速度的变化可以用日长表示。所谓日长（length of day，缩写为 l. o. d.）就是一日之长，即地球自转一周的时间。日长的变化反映了转速的变化。设日长为 l，其变化为 dl，那么转速的相对变化

$$\sigma = -dl/l。 \tag{3.138}$$

例如，若 $dl = 1$ 毫秒，则 $\sigma = -116 \times 10^{-10}$。

加速度 α 定义为：

$$\alpha = d\sigma/dt。 \tag{3.139}$$

若日长每百年增长 1 毫秒，则 $\alpha = -1.16 \times 10^{-10}$/年。

地球自转速度的变化其实很小。三十年代以前，最好的天文钟也不过准到百分之一秒。这样的精确度对于测定地球自转速度的变化是不够的。直到石英钟和原子钟问世以后，再配合高精度的现代测量仪器，如照像天顶仪、莱塞测距仪，超长基线干涉仪等，人们才能对地球转速在较短时间内的变化进行系统的研究。到目前为止，人们发现地球的转速有三种变化：长期变化、不规则变化和季节变化。它们的数量级如表 3.1 所示。

表 3.1

	长期变化	不规则变化 （最大值）	季节变化 （最大值）
α（加速度）	-1.6×10^{-10}/年	$\pm80\times10^{-10}$/年	$\pm650\times10^{-10}$/年
σ（地球自转速度）	-3×10^{-7}*	$\pm500\times10^{-10}$	$\pm70\times10^{-10}$

* 这是 2,000 年的累积变化

根据多年积累的日食观测资料，天文工作者很早就发现月球的平均运动每百年约有 10″ 的加速。这个加速的一部分可能是由于地、月的引力，另一部分 5″ 多只能归因于地球转速变慢的结果。这相当于日长每百年约增长 1—2 毫秒。现在不但可以由天文观测算出在历史时期地球自转的长期变化，而且还可以利用化石“时钟”追溯地质时期地球自转的长期变化。例如，有一种珊瑚化石上面有年轮、月轮和日轮，根据这种化石可以知道，在三亿七千多万年以前，即在泥盆纪中期，每年约有 400 天。由此推知，从那时到现在平均每百年日长增加 2.4 毫秒，和历史年代的数值很接近。现在的测量结果也是同样的数

量级，约每百年增加 1.4 毫秒。引起地球自转长期减速的原因主要是潮汐摩擦。潮汐摩擦引起地球自转角动量减小，同时使月球离地球越来越远，进而使月球绕地球公转的周期变长。这种潮汐摩擦作用主要发生在浅海地区。另外，大气的振荡、冰川的消长，地幔和地核的角动量交换也会引起地球转速的长期变化。这些问题目前尚在研究中。

地球自转速度除了上述的长期变化外，还存在着时快时慢的不规则变化。这种变化同样可以在月球、太阳和行星的观测资料以及天文测时资料中得到反映。它大致可以分为三种：① 在几十年或更长的一段时间内约有不到 $\pm 5\times10^{-10}$/年的相对变化；② 在几年到十年的时间内约有不到 $\pm 8\times10^{-9}$/年的相对变化；③ 在几个星期到几个月的时间内约有不到 $\pm 5\times10^{-8}$/年的相对变化。前两种变化相对说来比较平缓，而最后一种变化相当急骤。产生这些不规则变化的机制，目前尚无定论。平缓的变化可能是由于地幔和地核的角动量交换或海平面变化引起的；而急骤的变化可能是由于风的作用引起的。图 3.9 是 1820—1969 年地球自转速度 σ 与加速度 α 的变化，图 3.9a 中的斜线相当于 -1.6×10^{-10}/年的长期减速。

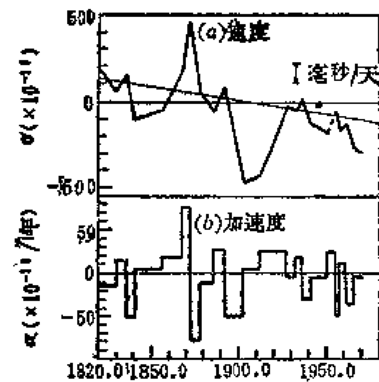


图 3.9 1820 年—1969 年地球自转速度 σ 与加速度 α 的变化

以前有人认为，地球的转速在某些时间曾经发生过间断性的突然变化，相当于日长突然变化 1—3 毫秒。但自从采用原子钟后，未再发现这个现象。图 3.10 是 1955 年至 1970 年地球自转速度的变化情况，由图可见，如果按季节平均的话，这个变化可以用一条折线表示，其转折点在 1957.79，1961.93 和 1965.61 年处，这意味着从 1955 年起，加速度约每四年就有一次突变，但速度是连续的。这个现象的物理意义，现在还不清楚。

地球自转速度的季节性变化是五十年代发现的。图 3.10 表明，这种变化的最主要特点是春天变慢、秋天变快的年变化和周期为半年的变化。年变化的幅度约为 20-25 毫秒，半年变化的幅度约为 9 毫秒。年变化是由风和洋流(主要是风)引起的。在南半球夏季时，角动量比北半球夏季时的角动量大。风也可以引起周期为半年的变化，但不是半年变化的主要原因。半年变化的主要原因可能是地球潮汐屈服引起的惯量矩的变化。太阳的

表 3.2 地球的转动

地球自转轴在空间的运动	地球自转轴在地球上的运动	地球自转速度的变化
1.地轴的旋进，黄赤交角 23°.5，周期～25,700 年。 2.主要章动，振幅9.″206，周期 18.6 年。 3.黄赤交角长期减小，～47″/百年	1.地极的长期迁移：70 年迁移约 0.″2。 2.马柯维茨章动，振幅 0.″02(?)，周期 24—40 年(?) 3.钱德勒章动，振幅≃0.″15，周期 425—440 天，衰减时间 14—73 年(?) 4.季节章动：年变化振幅≃0.″09，半年变化振幅 ≃0.″01。 5.日章动，振幅≤0.″02(?) 周期比一恒星日少三分。 6.月章动，双周章动：振幅≈0.″001（理论值）	1.长期减速 ≤5×10^{-10}/年。 2.无规则变化：(1) 几百年期间，$\alpha\leqslant\pm5\times10^{-10}$/年；(2) 1—10 年期间，$\alpha\leqslant\pm80\times10^{-10}$/年；(3) 几月或几周(急剧变化)，$\alpha\leqslant\pm500\times10^{-10}$/年。 3.短周期变化：(1) 二年变化，振幅 ≈ 9 毫秒；(2) 年变化，振幅 20—25 毫秒；(3) 半年变化，振幅 ≈ 9 毫秒；(4) 月变化，双周变化，振幅 ≃ 1 毫秒

半年潮是带谐函数，它相应于 $C-A$ 的变化，因此相应于C的变化。日长的半年变化有大约一半可以由太阳的半年潮得到说明。

虽然C的变化和日长半年变化正比于勒夫数 k，但不能由半年变化的资料来确定 k，因为半年变化不完全是由地球潮汐屈服引起的，还有气象因素的影响。月球的潮汐也有一个带谐函数项，即半月潮。半月潮也引起日长的半月变化，这个变化是不受气象因素影响的，因此也可以用它来测定 k。

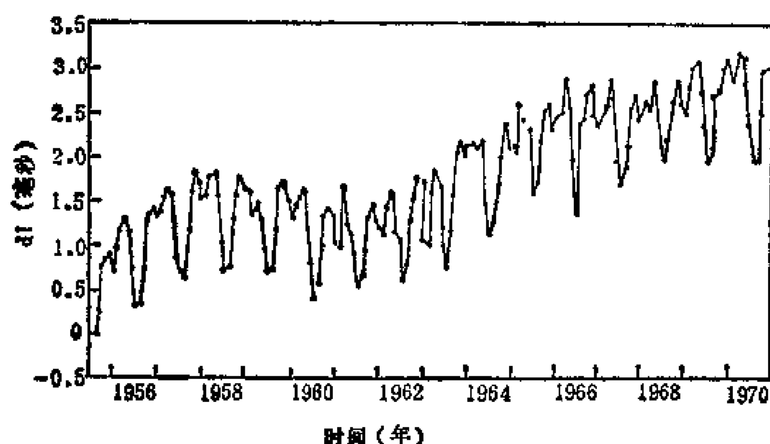


图3.10 日长的变化

参 考 书 目

[1] Cook, A. H., 1973. *Physics of the Earth and Planets*, MacMillan.

[2] 傅承义，1976.《地球十讲》，科学出版社.

[3] Garland, G. D., 1971. *Introduction to Geophysics*, W B Sanders Company.

[4] Gray, A. 1959. *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*, Dover Publications, Inc.

[5] Jeffreys, H., 1970. *The Earth*, 5th edition, Cambridge

[6] Kaula, W. H., 1968. An Introduction to *Planetary Physics*, John Wiley and Sons, Inc., 1968

[7] 朗 道，A. D.，和 E. M. 栗弗席兹，1959.《力学》，高等教育出版社。

[8] 芒克，W. H.，和 G. J. F. 麦克唐纳，1976.《地球自转》，科学出版社。

[9] Rochester, M G, 1973 The Earth's rotation, *Trans Amer Geophys Union*, 54, 769—789.

[10] Stacey, F. D., 1977. *Physics of the Earth*, 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc.

第四章　地球的年龄、能源和温度分布

一、地 质 年 表

地球的年龄是一个重要的概念。它对于理解许多自然现象，如地壳的变动、矿产的富集、地球内部的物理状态等等都是一个必须考虑的因素。要阐明一个科学的宇宙观，地球需要多长的时间才演化成现在这样的状态也是一个应当回答的问题。然而有一点还有待明确，即所谓的地球年龄应当从何时算起？地球不是一旦就形成的。它的形成过程需占多少时间？这样，地球的年龄就和地球起源和演化的假说有联系了。根据不同的假说，可能得到不同的年龄估计。在估计地球上的岩石年龄时，不存在这样的困难，但须分别什么是绝对年龄和相对年龄。自岩石形成到现在的实际年限叫做绝对年龄，但在许多地质问题中，只须知道岩石形成的先后次序就可以了。这可以叫做相对年龄。远在放射性物质发现之前，地质学家就已经发明了比较系统地确定地层相对年龄的方法，其中最主要的是依据岩层的相对位置和它们所含有的古生物化石。在正常情况下，上层的年龄要比下层的晚，即使地层有变动，也常可以由具体的几何关系来复原地层的上下位置，从而确定它们形成的先后。这种方法对局部地区常是可行的，但在对比不同地区的地层时就有困难，而且同一时期，同样的地层未必各处都有，即使有，差别也很大。所以这个方法的局限性很大。若要将不同地区的地层排在一个统一的先后顺序里，必须有一个共同的辨别先后的标准，最方便的标准就是利用地层中所含的古生物化石。生物在进化的过程中，在不同的时期有不同的品种和形态。当然这种变化需要很长的时间，不过有些古生物品种的存在时间是比较短的，埋在同时期的沉积物中成了化石，就给相应的岩层打下了一个时间的烙印。这种化石叫做标准化石。古生物学家和地质学家根据地层所含的古生物化石不但可以判断它们的相对年龄，而且还可推断地层沉积时的自然环境，地质学家根据地球上发生过的重大地质构造运动和地层中所含的古生物化石，将地球的历史分成若干时代。最早有古生物化石遗留下来的时代叫做古生代，以后的叫做中生代，最近的叫做新生代。这三个时代还可以各自分成更短的时间间隔，叫做纪。在新生代，纪以下还可以分成世，世以下还可再分为期；离现代越近，时间间隔也分得越细，这当然是自然的趋势。生物进化是个缓慢的过程，所以这样确定的相对年龄是很粗略的，不过对于解释宏观的地质现象，这样的精确度也就基本够用了。

在古生代以前的地层里，找不到可以鉴定年代的化石，但从以后发展的绝对年龄测定中，人们发现在古生代以前地球存在的时间要比古生代以后长得多。地质学家将古生代以前这个时期又分成两段：最早的叫太古代，以后的叫元古代，它们在地质现象上的表现是有所不同的，不过此处就不讨论了。

各国的地质学家，经过多年的努力，将世界各处的地层加以对比，得出了以下这样一个地质年表：

表 4.1 地质年表

代	纪	世	开始时间（单位：百万年）
新生代	第四纪	现代	约5,000年前
		更新世	1.5—2
	第三纪	上新世	7
		中新世	26
		渐新世	38
		始新世	54
		古新世	65
中生代	白垩纪		136
	侏罗纪		190
	三叠纪		225
古生代	二叠纪		280
	石炭纪		345
	泥盆纪		395
	志留纪		430
	奥陶纪		500
	寒武纪		570
元古代			2500
太古代			4550

二、放射性衰变和岩石的绝对年龄

要测定远古的时间，首先必须选择一个适当的计时标准，或者说，选择一个适当的"时钟"。这个"时钟"要在漫长的地质岁月中保持恒定的运行规律而且不受地点和环境的影响。放射性元素就是这样一种"时钟"。它们的衰变率不随普通的物理、化学条件而变化，可以用来测定由几百年以至几十亿年的时间，它们是量程最广的"时钟"。利用放射性元素的衰变，可以测定岩石和矿物的形成时间和各地质时期的绝对年龄。上表中的最后一列的时间就是这样测定的。这种方法发展很快，现已成为一个专门的学科，叫做"地质年代学"，它是地球物理学、地球化学和地质学之间的边缘科学。要真正可靠地测定岩石和地层的年龄，需要考虑许多干扰因素。本章只介绍这种方法的基本原理，有关的技术细节则须参考这方面的专著。

(一) 放射性同位素的衰变规律

卢瑟福和索迪（F. Soddy）在1902年首先发现放射性元素的衰变规律：每单位时间所衰变的原子数目与一般的物理及化学条件无关，但与当时存在的衰变原子的数目成比例。设当时的原子数目为 u，则 $\frac{du}{dt}=-\lambda u$，于是得

$$u=u_0e^{-\lambda t} \tag{4.1}$$

u_0 是 $t=0$ 时的原子数目，λ 是一常数，称为衰变常数。若令元素的平均寿命为 T，则

$$T=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$$

所以衰变常数等于衰变原子平均寿命的倒数。更常用的数值是原子衰变了半数所需的时间，称为半衰期或半值寿命。由(4.1)立得

$$T_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{\lambda}=0.6931T$$

设 u 元素衰变后成为元素 x_1，而 x_1 又衰变为元素 x_2，如此继续直至元素 x_n，成为一稳定的元素。若开始时只有 u，即 $t=0$ 时，$u=u_0$，$x_1=x_2=\cdots x_n=0$。于是

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-\lambda u\\ \dfrac{dx_1}{dt}=\lambda u-\lambda_1x_1\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\lambda_1x_1-\lambda_2x_2\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=\lambda_{n-1}x_{n-1}\end{cases}\tag{4.2}$$

$\lambda_1>\lambda_2>\cdots\lambda_n$ 各为 $x_1,x_2\cdots x_n$ 元素的衰变常数。可以证明以上方程组的解为

$$\begin{cases}u=u_0e^{-\lambda t}\\ x_1=\dfrac{u_0\lambda}{\lambda_1-\lambda}(e^{-\lambda t}-e^{-\lambda_1t})\\ x_2=\dfrac{u_0\lambda\lambda_1}{\lambda_1-\lambda}\left\{\dfrac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda_1t}}{\lambda_2-\lambda}+\dfrac{e^{-\lambda_2t}-e^{-\lambda_1t}}{\lambda_2-\lambda_1}\right\}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_k=(-1)^ku_0\lambda\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\left\{\dfrac{e^{-\lambda t}}{f_k'(\lambda)}+\dfrac{e^{-\lambda_1t}}{f_k'(\lambda_1)}+\cdots\dfrac{e^{-\lambda_kt}}{f_k'(\lambda_k)}\right\}\end{cases}\tag{4.3}$$

式中，

$$f_k(\mu)=(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_1)\cdots\cdots(\mu-\lambda_k),\ k=1,2,\cdots\cdots n-1$$

设 u 的寿命远大于任何 x 并设所讨论的时间 t 很长以致 $1/t$ 小于任何 λ_k，则以上各解可以化简为：

$$u=u_0e^{-\lambda t}$$

$$x_k=\frac{\lambda}{\lambda_k}u,\ (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$x_n=\int_0^t\lambda_{n-1}x_{n-1}dt=u_0(1-e^{-\lambda t})=u(e^{\lambda t}-1)\tag{4.4}$$

故

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{x_n}{u}\right)=\frac{0.4343}{\lambda}\log\left(1+\frac{x_n}{u}\right)\tag{4.5}$$

(二) 铅　　法

在许多岩浆岩，特别是伟晶岩中，常含有少量的铀和钍。铀和钍放射系衰变时，最后

的稳定元素都是铅的同位素：

$$\begin{cases} U^{238} \rightarrow Pb^{206} + 8He \\ U^{235} \rightarrow Pb^{207} + 7He \\ Th^{232} \rightarrow Pb^{208} + 6He \end{cases} \tag{4.6}$$

这三个放射系都满足以上所说的条件，即式(4.3)可以化简为式(4.4)。如果矿物和岩石在形成时原来不含放射性来源的铅，则由现在所含的铀或钍与铅的比值，就可以测出矿物自形成时到现在的时间，因为由式(4.4)，可写出：

$$\begin{cases} Pb^{206} = U^{238}(e^{\lambda_{238}t} - 1) \\ Pb^{207} = U^{235}(e^{\lambda_{235}t} - 1) \\ Pb^{208} = Th^{232}(e^{\lambda_{232}t} - 1) \end{cases} \tag{4.7}$$

由上式中任何一式都可以求 t。另一方法是用前二式相除，即

$$\frac{Pb^{206}}{Pb^{207}} = \frac{U^{238}}{U^{235}} \frac{e^{\lambda_{238}t} - 1}{e^{\lambda_{235}t} - 1} \tag{4.8}$$

式中的 U^{238}/U^{235} 是两种铀同位素现在的比值，是已知的，等于 137.8。所以由岩石或矿物所含的两种铅同位素的比值 Pb^{206}/Pb^{207} 也可以求 t。 此处应注意的是上式左端是原子数目之比。 若实际测量的是质量之比，例如 $[U^{238}]/[Pb^{206}]$，则还应乘以原子量之比，即 $U^{238}/Pb^{206} = [U^{238}]/[Pb^{206}] \times 206/238$。这是最早使用的放射性方法，叫做铅法。由于铀、钍在岩、矿中常是共生的，所以由一块标本中可以测得四种比值，得出的年龄可以彼此验证。铀和钍的半衰期很长，铅法最适用于比较古老的（例如前寒武纪的）岩石。在实际测定时，当然还会有一些复杂的情况；例如，在矿物形成时原来就含有铅，铀、钍和铅在地质时期中都可能丢失或增加等等。不过这些因素常可用适当的方法加以校正。

（三） 钾-氩法

铅法肯定是一个比较可靠的方法，但含铀、钍的岩、矿毕竟不算太多。钾是一种几乎到处都有的元素，尤其是在两种主要的造岩矿物长石和云母中存在。 钾的一种同位素 K^{40} 是放射性的。它衰变时有两种产物：一种是由 β 放射而成为 Ca^{40}，另一种是由K电子俘获而成为 A^{40}。由前一种得

$$\frac{d}{dt} K^{40} = -\lambda_\beta K^{40}$$

由后一种得

$$\frac{d}{dt} K^{40} = -\lambda_e K^{40}$$

λ_β，λ_e 是相应的衰变常数。故总的衰变率为

$$\frac{d}{dt} K^{40} = -(\lambda_\beta + \lambda_e) K^{40} = -\lambda K^{40}。$$

故

$$K^{40} = K_0^{40} e^{-\lambda t}$$

$\lambda = \lambda_\beta + \lambda_e$，$K_0^{40}$ 为 $t = 0$ 时的原子数。但

$$\frac{d}{dt} Ca^{40} = \lambda_\beta K^{40} = \lambda_\beta K_0^{40} e^{-\lambda t}$$

故

$$Ca^{40} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda} K_0^{40}(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{\lambda_\beta}{\lambda} K^{40}(e^{\lambda t} - 1) \tag{4.9a}$$

同理，

$$A^{40} = \frac{\lambda_e}{\lambda} K_0^{40}(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{\lambda_e}{\lambda} K^{40}(e^{\lambda t} - 1) \tag{4.9b}$$

由式(4.9a)或(4.9b)可以求 t。

在天然的氩与钙中，同位素 A^{40} 和 Ca^{40} 占很大的比例：

$$Ca^{40}/Ca \approx 97\%, \quad A^{40}/A \approx 99.6\%。$$

原则上虽然 Ca^{40} 和 A^{40} 都可用来测定年龄，但在岩、矿中，钙的来源太多，而氩的含量一般都很少，非放射性来源的更少，这部分是不难校正的。钾-氩法可用于许多岩浆岩和变质岩。钾-钙方法比较少用，但仍有前途。它可用于含钾多、含钙少的矿物，如锂云母。

（四） 铷-锶法

铷有两个同位素 Rb^{87}(27.2%) 和 Rb^{85}(72.8%)，Rb^{87} 是放射性的，



$$Rb^{87} \xrightarrow{\beta} Sr^{87}$$

半衰期很长，可以用来测定极老岩石或矿物的年龄。这个方法最适用于锂云母，但也可用于其他的云母及钾长石、天河石、海绿石等矿物。它的优点是衰变元素是固体，不易丢失；缺点是 Sr^{87} 同位素还有非放射性的来源。因此，

$$Sr^{87} = Sr_0^{87} + Rb^{87}(e^{\lambda t} - 1) \tag{4.10}$$

Sr_0^{87} 是非放射性来源的 Sr^{87}。根据许多岩石的分析，知道 Sr_0^{87} 与稳定同位素 Sr^{86} 之比约等于 0.712。所以上式可以写为

$$Sr^{87} = 0.712Sr^{86} + Rb^{87}(e^{\lambda t} - 1)$$

据此便可以求 t。

（五） 碳 14 法

碳的同位素 C^{14} 是放射性的。大气中的 C^{14} 一方面衰变，一方面又因宇宙线对大气的作用而得到补偿。于是大气中的 C^{14} 含量经常保持一个稳定值。C^{14} 经过氧化后与动、植物和地表水进入循环。在生物死亡或碳酸钙沉淀之后，循环即停止。这时所含的 C^{14} 得不到补偿，便由于衰变而减少；因此，我们可以测定循环停止的时间。C^{14} 衰变成 N^{14}，半衰期为 5720 年，只能用于测定较短的时间，例如由几百年到几万年。这对于鉴定某些考古学或人类学中的重要事件的年代，或确定某些近代的地质活动（如冰川的进退，阶地的形成，海面升降，火山活动等）的时间都颇为有用。

以上只不过举出几种有代表性的方法。实际上，可用的方法和同位素是很多的，必须根据岩石和矿物的性质来选择。放射性方法的精确度受到衰变常数的精确度的限制，常数稍有变动，影响所计算的年龄很大。近年来，许多测定的岩石年龄常有改动，有时只是因为衰变常数有所修正的结果。

原则上，岩浆岩的年龄可由它所含矿物的年龄来确定，但这两个年龄的意义有时并不完全相同。例如，测定的矿物常取自伟晶岩，但伟晶岩只是在岩浆凝结过程比较晚的阶段才形成的。另一方面，测定年龄时只用小块的标本，而小块标本的年龄必须与大面积的情况联系起来考虑才比较可靠。下表给出1977年所采用的常数。毫无疑问，这些常数以后还会修正。

表4.2 常用的放射性元素

母元素	稳定元素	衰变常数 (10^{-10}年$^{-1}$)	半衰期 (10^9年)
U^{238}	Pb^{206}	1.55	4.47
U^{235}	Pb^{207}	9.84	0.704
Th^{232}	Pb^{208}	0.495	14.0
Rb^{87}	Sr^{87}	0.142	48.8
K^{40}	A^{40}	0.581	11.9
	Ca^{40}	4.95	1.40

三、地球的年龄

地球的年龄虽然和采用的时间起点有关，但是它的下限是可以估计的。例如，地球的年龄无论如何必须大于地球上的岩石年龄。 表4.3列出一些已知的最古老的岩石年龄。由此可见在各大陆上都可以找到老于30亿年的岩石；地球的年龄必须更老，但究竟老多少，估算时还离不开一些假设。

表4.3 一些最古老的岩石年龄

地区	方法	矿物(或岩石)	年龄(10亿年)
科拉半岛	K-A	黑云母	3.46
乌克兰	K-A	黑云母	3.05
斯威士兰	Rb-Sr	全岩石	3.44
德兰士瓦	Rb-Sr	全岩石	3.20
刚果	Rb-Sr	微斜长石	3.52
明尼苏达	U-Pb	锆石	3.3
蒙大拿	U-Pb	锆石	3.1
格陵兰西部	Rb-Sr	全岩石	3.70

铀和钍经过衰变只能形成 Pb^{206}，Pb^{207} 和 Pb^{208}，但含铅矿物中还存在铅同位素 Pb^{204}，这是非放射性来源的。它与放射性来源的铅的比值将随着时间而减小，直到某个时期，铅分离成铅矿或形成其他不含铀、钍的矿物时，这些比值就不再变化了。铅与铀、钍并存的时间越长，这些比值也越小。反过来，若铅矿越老，这些比值就越大。实测的结果也证明这一点。由此便可引出一些有关地球初期情况的假设。这些假设是估算地球年龄时的根据。它们是：

① 在地球形成的初期，各种铅同位素的比值在各处都是相同的；

② 从某时起，地球不同区域的铀、钍和铅都各有特征性的比值；这些比值只能随着放射性元素的衰变而改变；

③ 在以后的某个时期，方铅矿或其他不含铀钍的铅矿分离出来，铅同位素的比值就不再变化；

④ 铅与铀、钍分离或成矿的时间可独立地测定(例如测定其他附属矿物的年龄等)。

设在很早以前，地球上铅同位素的原始比值为：

$$Pb^{206}/Pb^{204}=a_0,\ Pb^{207}/Pb^{204}=b_0,\ Pb^{208}/Pb^{204}=c_0。$$

在以前某一个时期 $-t_0$，设这些铅同位素被引入一个含有铀、钍的区域，于是各铅同位素的比值就开始发生变化。在 $-t$ 时，设所有的铅又分离出来成为铅矿。如果这个区域的铀、钍和铅不曾遗失，则现在所测得的各铅同位素比值

$$Pb^{206}/Pb^{204}=x,\ Pb^{207}/Pb^{204}=y,\ Pb^{208}/Pb^{204}=z,$$

按照以前的公式，应为

$$\begin{cases} x=a_0+\dfrac{U^{238}}{Pb^{204}}\left(e^{\lambda_{238}t_0}-e^{\lambda_{238}t}\right), \\ y=b_0+\dfrac{U^{235}}{Pb^{204}}\left(e^{\lambda_{235}t_0}-e^{\lambda_{235}t}\right), \\ z=c_0+\dfrac{Th^{232}}{Pb^{204}}\left(e^{\lambda_{232}t_0}-e^{\lambda_{232}t}\right), \end{cases} \tag{4.11}$$

式中的 U^{238}/Pb^{204}，U^{235}/Pb^{204}，Th^{232}/Pb^{204} 等比值是这个区域现在平均数值，是可以测定的。在以上方程中有四个未知数 a_0，b_0，c_0 和 t_0。前三个是铅同位素的原始比值，t_0 可以看做是地球的年龄。这个年龄可以理解为地球开始形成不同铀、钍含量的区域到现在的时间。式(4.11)是计算地球年龄的基本公式，但如何具体地运用它们，讨论很多，分歧也很大。

一块铅矿可以给出三个关系。若取 n 块年龄不同的铅矿，就可得到 $3n$ 个关系。用最小二乘法或其他统计方法处理，便可求出一组最佳的 a_0，b_0，c_0，t_0。但是这样得到的结果并不令人满意，而且不同作者所得到的 t_0 也相差很大。从 1953 年起，有人开始引进陨石的数据。这个方法是把式(4.11)的前两个方程相除，得到

$$\frac{y-b_0}{x-a_0}=\frac{1}{137.8}\frac{e^{\lambda_{235}t_0}-e^{\lambda_{235}t}}{e^{\lambda_{238}t_0}-e^{\lambda_{238}t}} \tag{4.12a}$$

式中的 $1/137.8=U^{235}/U^{238}$ 是两种铀同位素的现代比值。若取 x，y 为现代铅矿的铅同位素比值，则 $t\approx 0$，上式化简为

$$\frac{y-b_0}{x-a_0}=\frac{1}{137.8}\frac{e^{\lambda_{235}t_0}-1}{e^{\lambda_{238}t_0}-1} \tag{4.12b}$$

现在若取 a_0，b_0 为铁质陨石中陨硫铁的 Pb^{206}/Pb^{204} 和 Pb^{207}/Pb^{204} 比值，即 $a_0=9.46$，$b_0=10.29$，则当 x，y 测定后，便可计算 t_0。这样得到的 t_0 为 4.5×10^9 年。当然，这个方法并不要求用现代的铅矿。这个方法有几种不同的形式，但都要求采用铁质陨石中的 a_0,b_0 值。这样得到的结果虽相当一致，但却意味着这样一个假设：陨硫铁所含的铅同位素比值和地球形成时的铅同位素比值是相同的。这个假设并未得到充分的证实。按照这个假设，地球年龄的起算时间就是地球上的铅同位素和陨石中的铅同位素开始向不同方向发展的时间。这意味着陨石和地球是同时形成的。值得注意的是所有陨石都差不多是同年的，都在 45 亿年左右。月岩标本的年龄都在 31 亿至 45 亿年之间，没有小于 31 亿年的，而地球上的岩石则没有老于 38 亿年的，表明月球形成了十五亿年以后，内部就停止活动

了，而地球到现在仍在活动着。

四、地面热流和地球内部的能源

地面从太阳接受大量的能量，每年约有 10^{32} 尔格，但绝大部分又辐射到空间，只有极小一部分能穿入地下很浅的地方。太阳辐射决定着地面的温度，但与地球内部的变化过程关系不大。在几百米深度以下，地面温度的日变化和季节性变化的影响就很小了。这时可以观察到温度总是随深度而增加的。这个增加率 dT/dz 一般叫做温度梯度（其实是梯度的垂直分量）。在大陆上，温度梯度变化很大。深度增加一米，温度升高 0.1°—0.01℃（平均每 30 米增一度），和地面岩石的性质有关，也受环境的影响。海底的温度梯度约为每米 0.04°—0.08℃，平均约 0.05℃/米。

单位时间通过单位面积的热量 q 叫做热流。热流总是由温度高的地方向温度低的地方流，和梯度的方向相反但和它成比例，比例常数叫做热导率，即

$$q = -K\nabla T \approx -K\frac{dT}{dz}。$$

所以若测得一个地方的热导率和温度梯度就可以计算热流，但是 K 和 ∇T 必须是同一地点的。早期计算的大陆地区的热流常常靠不住，就是因为 K 和 ∇T 不是在同一地点测的。地面热流值各地点相差很大，平均值约为 1.5 微卡/厘米^2·秒。大陆上和海底的平均值相差很少。这一点是偶然的，还是有特殊意义一直是一个有争议的问题。

按照地面附近所测得的温度梯度向地下外推，则在几十公里以下，温度就已超过橄榄岩的熔点，但地震观测表明，地面以下直到地核的边界，除局部地区外，都是固体。所以温度梯度在深处一定大大减小，否则将引起地球物质大规模的熔化。大陆的热流大部分来源于地壳，但海洋下面的地壳很薄，所以那里的热流主要来源于上地幔。在大陆地壳下面，q、T 或 $\frac{dT}{dz}$ 都比同深度的海洋下面小得多，温度可能相差一百度以上，但这个温度差在几百公里以下一定要消失的，否则将在地面上引起很大的重力差异，但是这种差异并不存在。

热量总是由地内向外流。全球的总热流约为每年 2.4×10^{20} 卡。在放射性元素发现之前，人们曾以为这是原始的炽热地球逐渐冷却时释放出来的。开尔芬 (Lord Kelvin) 根据这个概念曾计算过地球的年龄，但结果差了好几个数量级。近代的概念认为地球是由尘埃和陨石物质积聚而成的，原始的温度不高，以后逐渐变热。这样，不但地面热流，而且地内加温都需要地内的能源来解释。以下讨论几种较重要的能源。

（一）长寿命的放射性元素

地球中的 U^{238}, U^{235}, Th^{232}, K^{40}，寿命可以和地球的年龄相比，在能量平衡中占很重要的地位，但它在岩石中的含量近年来总在不断的修订。下表的数据只能表明它们的数量级。

如果知道地球的原始组成，就可估计长寿命放射性元素在地球形成以来所放出的热能。不过地球的原始组成还是一个继续在探讨的问题，所以这种估计最多不过是一个数

表 4.4　岩石的生热率

岩　石	现年生热率	岩　石	现年生热率
花 岗 岩	820×10^{-8} 卡/克·年	榴 辉 岩	$8—34\times10^{-8}$ 卡/克·年
中性岩浆岩	340×10^{-8} 卡/克·年	橄 榄 岩	0.9×10^{-8} 卡/克·年
玄 武 岩	120×10^{-8} 卡/克·年	球粒陨石	3.9×10^{-8} 卡/克·年

量级的估计。若假定地球的平均组成与球粒陨石相近，有人估计地球现在每年因长寿命放射性元素所释放的热能约为 2.3×10^{20} 卡，和地面热流的数值几乎相等。地球自形成到现在所释放的总能量约为 $H=6-20\times10^{37}$ 尔格或 $1.4—4.8\times10^{30}$ 卡，而流出地面的总能量约 $Q=1-8\times10^{37}$ 尔格或 $0.2—2\times10^{30}$ 卡。这就意味着，地球总地说来是在加热。另一方面，根据一定的地幔、地核物质组成的模式，柳比莫娃（E. Любимова）曾估计使地球熔化所需要的潜热 $L\geqslant3\times10^{38}$ 尔格或 7.1×10^{30} 卡。这表明由长寿命的放射性元素所释放的能量到现在还不足以熔化地球。当然，这些结论不仅取决于所选取的地球组成的模式，而且还和地球年龄和传热的机制都有关系。地球未完全熔化是肯定的，但究竟是在加温还是减温则不那样肯定。

（二）短寿命的放射性元素

在地球形成的初期，还可能存在短寿命的放射性元素，例如，I^{129} 的半衰期为 1.7×10^{7} 年，Al^{26} 的半衰期为 0.73×10^{7} 年；还有 Cl^{36}，Fe^{60} 等二十几种同位素，它们的半衰期都在 10^{5} 至 10^{7} 年之间，比地球的年龄小得多，所以现在已经观察不到了。这些元素的衰变在地球的早期必然放出大量的能量，但对地球全部历史中的热平衡影响不大。

（三）地球形成时的引力能

若地球是由温度不高的弥漫物质积聚而成的。在这个过程中，由于物质的引力位降低，所以释放出大量的能量。设有一质量为 m、半径为 r 的球体。若将一小质量 dm 由极远处吸到 m 上，则其所获的力位为 $-\frac{Gm}{r}dm$，G 是万有引力常数。半径为 a 的地球可以设想是由极远处的颗粒积聚而成的。这些颗粒在形成地球时，总的位能降低了 W，

$$W=G\int_0^M\frac{mdm}{r}=G\int_0^a\frac{4}{3}\pi r^3\cdot4\pi r^2\rho dr$$

ρ 是密度。若 ρ 是常数，则

$$W=\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2a^5=\frac{3}{5}G\frac{M^2}{a}$$

M 是地球的质量。若 ρ 随深度增加，上式的系数略有增加，但 W 的数量级不变。对地球来说，$W\approx2.5\times10^{39}$ 尔格。这部分能量用于以下两方面：① 物质的颗粒与成长中的地球撞击，产生热能，其中绝大部分消失在地球以外的空间，有极小一部分以地震波的形式传入地下，估计可使地球的温度增高几十度；② 地球增长时，内部压力增高，产生绝热的压

缩，估计能使地球的温度增高几百度。这种计算是复杂的，但总的结果是所放出的热能还不能使地球熔化。地球形成时的内部温度不超过1,200℃。

（四）地核的形成

如果地球形成时是均匀的，以后由于内部的生热和加温，产生了物质的运动和化学分异，于是形成了地核、地幔和地壳。因为较重的物质流向地心，较轻的物质形成地壳，这就使总的位能降低，所以释放出大量的能量，形成铁镍地核时尤其如此。由一个均匀的地球演变成一个分层的地球所释放的能量估计约为 2×10^{37} 尔格或 5×10^{29} 卡，略小于长寿命的放射性元素所放出的能量，可提高地球的温度一千多度。

（五）地球的旋转能

当月球距地球很近的时候，地球的自转速度要快得多，周期最短可达到2—4小时。由于潮汐摩擦，地球自转变慢，月球也越退越远。当地球的自转周期由3小时变到一天的时候，动能的消失约为 1.5×10^{38} 尔格，但这部分能量主要都消耗在浅海的摩擦中了。旋转能的转换只是地月很近时才显著，这至少是几亿年以前的事了。现在由于自转变慢所消失的能量比地面热流小得多。

火山喷发所散失的能量比地面热流至少小两个数量级，平均在每秒 $3—20\times10^{9}$ 卡的范围内。地震波所释放的能量平均每年约 10^{25} 尔格，不过这种能量最后还是变为热能消失在地球之内。

五、热 传 导

热流 $\boldsymbol{q}$ 是一个向量，总是由温度高的地方向温度低的地方流。实验表明，$\boldsymbol{q}$ 和温度梯度 ∇T 成比例，但方向相反，即 $\boldsymbol{q}=-K\nabla T$，$K$ 是比例常数，叫做热导率。设有一介质，其密度为 ρ，比热为 c。在介质中取一封闭曲面 S，其体积为 V。S 内分布着热源。令 A 为单位时间、单位体积所产生的热量。热源和热流所供给的热能使介质的温度升高，其升高率为 $\frac{\partial T}{\partial t}$。根据能量守恒，立得

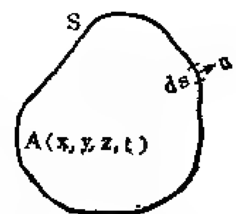


图 4.1 热传导方程

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv = -\int q_n ds + \int A dv$$

故

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(K\nabla T) + A \tag{4.13}$$

K 一般随地点而变化。若 K 是一常数，则上式化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T + \frac{A}{\rho c} \tag{4.14}$$

$\alpha=K/\rho c$ 称为扩散常数，其量纲为厘米²/秒。岩石的 α 值约为0.01厘米²/秒数量级。

(一) 一 维 问 题

在许多地球物理问题的计算中，地球曲率的影响不大。此时，地球介质可以看做是由平面平行层组成的。这样式(4.14)就可化简为

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{A}{\rho c} \tag{4.14a}$$

x 是深度，向下为正，$x=0$ 是地面。

1. 热平衡状态的地下温度

在平衡状态时，$\frac{\partial T}{\partial t}=0$。故 (4.14a) 之解为

$$T=-\frac{1}{2}\frac{A}{K}x^2+c_1x+c_2$$

c_1，c_2 为待定常数。若地面温度为 T_0，热流为 q_0（流出为正），则 $c_2=T_0$，$c_1=q_0/K$。故

$$T=T_0+\frac{q_0}{K}x-\frac{1}{2}\frac{A}{K}x^2 \tag{4.15}$$

在上式中，q_0 和 A 是两个独立的观测值。若取一厚度为 h 的岩层，则由 T_0 及 K 可计算岩层底面的温度 T_h。若岩层不含放射性物质，则 $A=0$。故 $T_h=T_0+\frac{q_0h}{K}$。此时，q_0 完全来源于层下。若层下无热源而 A 在层内是均匀分布的，则 q_0 完全来自层内，$q_0=Ah$。故 $T=T_0+\frac{1}{2}\frac{q_0h}{K}$。一般说，$q_0$ 有一部分来自层下，另一部分则来自层中的放射源。如何区分这两种来源的热流，则仍可借助于地面观测。伯奇 (F. Birch) 和洛埃 (R. F. Roy) 等曾观测到在一定的区域内，地面热流 q_0 与热源强度 A 有一直线关系（图 4.3)：

$$q_0=q^*+D\times A \tag{4.16}$$

q^* 是直线在 q_0 轴上的截距，D 是直线的斜率。显然 q^* 是无热源时的热流，即 q_0 中来源于层下的部分。

2. 无热源时，全空间和半无限空间中的热传导

对于全空间，

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad -\infty<x<+\infty,\ t>0,$$

$$T=f(x),\qquad -\infty<x<+\infty,\ t=0,$$

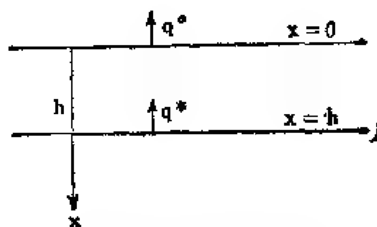


图 4.2 岩层的温度分布

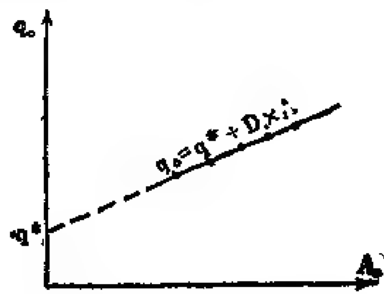


图 4.3 地面热流与 A 的关系

用分离变数法，立得一特解 $e^{-i\xi x-\alpha\xi^2 t}$，$\xi$ 为一参数。故通解可以写成

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x-\alpha\xi^2 t}\phi(\xi)d\xi$$

故

$$T(x, 0)=f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\phi(\xi)d\xi$$

由傅氏变换，得

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x'}f(x')dx'$$

故

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x-\alpha\xi^2 t}d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x'}f(x')dx'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx' \tag{4.17}$$

由式(4.17)，通过迭加，可以求得半空间问题的解。设 $x=0$ 为半空间的表面，介质伸展于 $x>0$。设表面温度为 $T=0$，初始温度为 $T=f(x)$。若在式(4.17)中，令

$$T(x, 0) = f(x) \quad 当\ x>0,$$

而

$$T(x, 0) = -f(-x),\ 当\ x<0。$$

由此便得到

$$T(x, 0) = 0,\ 当\ x = 0。$$

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\left\{\int_{-\infty}^{0} -f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx' + \int_{0}^{\infty} f(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}}dx'\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}}\int_{0}^{\infty} f(x')\left\{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\alpha t}}\right\}dx' \tag{4.18}$$

若初始温度是一常数 T_0，则上式可化简为

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{\alpha t}}^{+x/2\sqrt{\alpha t}} e^{-\xi^2}d\xi = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x/2\sqrt{\alpha t}} e^{-\xi^2}d\xi$$

$$= T_0\,\mathrm{erf}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right\} \tag{4.18a}$$

若表面温度不为 0 而为 T_s，则问题等于将温度标尺移动 T_s，

$$T(x, t) - T_s = (T_0 - T_s)\,\mathrm{erf}\,\{x/2\sqrt{\alpha t}\} \tag{4.18b}$$

3. 地球的冷却

由式(4.18a)求微商，得

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\sqrt{\alpha t}}$$

在地面上，$x=0$，故

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

$$t = T_0^2/\pi\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0^2 \tag{4.19}$$

开尔芬最早曾利用这个公式来计算地球的年龄。他假定地球原是均匀的液体，温度约为

3900℃。以后逐渐冷却。它的表面温度梯度 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0$ 随时间而变化。现在的温度梯度约为每 27.76 米增高 1℃。取 $\alpha = 0.01178$ 厘米^2/秒，则由式 (4.19) 得 $t \approx 10^8$ 年。开尔芬取地球的年龄为 $2—40 \times 10^7$ 年，这比现在的公认值小好几个数量级。所以产生这个错误的原因一部分是由于当时还不知道有放射性元素，而更重要的是由于开尔芬对于地球的形成及演化的概念过于简单。地球的年龄和内部的温度不是仅仅用热传导的计算所能解决的。

4. 表面温度是时间的简谐函数

这个问题可用于地面温度有周期性变化时，求地下的温度。方程仍是

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

令

$$T = u e^{i(\omega t - \varepsilon)}$$

代入后，得

$$u = A e^{-x\sqrt{i\omega/\alpha}} = A e^{-x(1+i)\sqrt{\omega/2\alpha}}$$

故

$$T = A e^{-kx} \frac{\cos}{\sin}(\omega t - kx - \varepsilon)$$

若表面温度为 $A\cos(\omega t - \varepsilon)$，则得

$$T = A e^{-kx}\cos(\omega t - kx - \varepsilon) \tag{4.20}$$

式中

$$K = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$$

其倒数

$$d = \frac{1}{K} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$

称为穿透深度，即使振幅 A 衰减 e 倍时所需的深度，它与频率的平方根成反比。例如，地面温度的年变化穿透深度比日变化的穿透深度要大 $\sqrt{365} \approx 19$ 倍。

(二) 球 层 问 题

地球是几近分层的，并且含有放射性热源，后者是随时间衰减的。应用球坐标系并假定球对称性，式(4.14)可写为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r} + K\left(\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right) + \sum_i h_i(r) e^{-\lambda_i t} \tag{4.21}$$

边界条件是 $T(a, t) = 0$，a 是地球半径；初始条件是 $T(r, 0) = f(r)$。这个问题可以分成两部分：$T = T_1 + T_2$，T_1 满足

$$\rho c \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial r}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial r} + K\left(\frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}\right)$$

及

$$T_1(a, t) = 0, \quad T_1(r, 0) = f(r)。$$

T_2满足式(4.21)及 $T_2(a, t) = 0$，$T_2(r, 0) = 0$。即使K是一常数，这个问题已经相当复杂，但借助电子计算机，可求得数值解。不过这个解意义不大，因为实际上，K不仅是r的函数，而且和温度、压力都有关系。在现代地球物理学中，$K = K(r, P, T)$是研究得最不够的一个参数。另一方面，放射性物质在地球内部的分布也不精确地知道。由于这些原因，确定地球内部的温度分布，还需考虑其他的因素。

六、地球内部的传热机制

岩石的传热机制在不同的深度是不同的，主要是由于温度和压力的影响。以下简单描述几种传热机制：

（一）热 传 导

在平常温度下，岩石是一种介电质或半导体。它们的传热能力主要由于结晶中的原子的热振动。在1000℃以下，相应于这种机制的热导率K_p随温度的升高而减小，但随压力而加大。在地下深度约在100至150公里之间，K_p有一个最小值。

（二）热 辐 射

当温度足够高时，地下热能有一部分也可以辐射的形式传出去。这就使岩石的有效热导率增加了一个分量K_r。许多矿物的热导率在450℃以上就开始增加，在750℃以上，热辐射将超过热传导。K_r随温度的增加是很快的。

（三）激 子

这是一种由辐射激发的原子，但这种辐射的能量还不足以产生自由电子。所以激子是中和的。它沿着温度梯度的方向流动，将激发能传给相邻的原子。这种传热机制在地球上层是微不足道的，但在100公里深度以下，可能就不可忽略了。相当于激子的热导率可写为K_{ex}。所以在地球深处的总热导率K是$K_p + K_r + K_{ex}$。这比地面附近岩石的热导率大多了。

（四）物 质 迁 移

当物质由高温移向低温地点时，热能也随着移动。这是最有效、最直接的传热方法，且不需很大的温度梯度。在地球内部，这种物质迁移现象是常见的，如热水活动、火山活动、岩浆活动和对流等。可以证明，只要迁移速度每年达到百分之几厘米，它所传输的热能就和热传导的量级相当。物质迁移最普通的形式就是对流。地球内部究竟可能发生什么尺度的对流现在还有争论，但某种形式的物质迁移则是没有疑问的。

七、地球内部的温度梯度

地球内部有三种温度梯度：绝热的温度梯度，岩石熔点的梯度和实际的温度梯度。

地球介质的密度随深度而增加，但又随增温而减小。为了保持稳定，可流动的物质在绝热的条件下，自然形成一个温度梯度，叫做绝热的温度梯度。根据热力学的定律，这个梯度是可以简单地计算的。设单位质量所吸收的热量为 ΔQ，则

$$\Delta Q = dE + pdv = d(E + pv) - vdp = dH - vdp$$

E 是内能，v 是单位质量的体积 ($v = 1/\rho$)，H是焓。若 $\Delta Q = 0$，则

$$dH - vdp = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp - vdp$$

$$= c_p dT - \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - v\right] dp = 0$$

c_p 是等压下的比热。但

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

故

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)_s = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{T}{c_p}\frac{\alpha}{\rho}$$

$\alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ 是膨胀系数。代入

$$\frac{dp}{dz} = g\rho,$$

得

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_s = \frac{dT}{dp}\frac{dp}{dz} = \frac{Tg\alpha}{c_p} \tag{4.22}$$

这就是绝热的温度梯度。

计算熔点梯度时，可利用克拉珀龙-克劳修斯 (Clapyron-Clausius) 方程

$$\frac{dp}{dT_m} = \frac{L}{T_m(v_1 - v_2)}$$

T_m 是熔点，L 是潜热，v_1，v_2 各为流体及固体的体积。

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{dT_m}{dp}\frac{dp}{dz} = \frac{T_m\rho_1 g}{L}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{T_m g}{L}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \tag{4.23}$$

代入 $g=981$ 厘米/秒^2，$\alpha=2\times10^{-5}$/度，$T=1400$℃，$c_p = 0.2$ 卡/克·度，则由式(4.22)得

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_s = 0.3°/\text{公里}$$

由式(4.23)代入 $T_m = 1300$℃，$L = 100$ 卡/克，$\rho_1/\rho_2 = 0.9$，得

$$\frac{dT_m}{dz} = 3°/\text{公里}$$

以上杰弗瑞斯 (H. Jeffreys) 的结果是很粗略的。更精细的计算使两个数值都略有降低，

但数量级不变。重要的是

$$\frac{dT_m}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_s$$

在绝热的情况下，岩浆的温度和熔点都随深度而增加，但熔点增加得快。所以当岩浆冷却时，深处先到达熔点。这就意味着岩浆凝固时是由下往上，而不是由上往下。

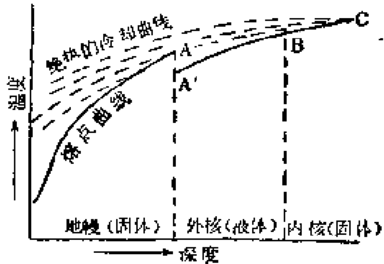


图 4.4 内核的形成

利用温度随深度的变化曲线，可以导出一些有意义的结果。杰可卜斯（J.A. Jacobs）曾用它们来说明地球内核为什么是固体，图 4.4 说明他的方法。地幔和地核的物质组成不同，所以在核、幔边界处，熔点曲线是间断的，但温度曲线必须是连续的。地核由液体状态冷却时，温度梯度几乎是绝热的。图中的虚线是冷却时，不同时间的温度曲线。当冷却曲线降到 AB 位置时，熔点曲线 $A'B$ 是在温度曲线之下，所以这部分地球是液体；但熔点曲线 BC 是在温度曲线之上，所以这部分地球是固体。当地球继续冷却时，地幔全是固体，所以 AB 部分的地球几乎处于绝热状态，所以不再凝固。

八、地球上层的温度分布

地球上层可以近似地看成由平面平行层组成的，各层有不同含量的放射性元素。这时传热的机制主要是热传导。按照热传导的定律，若各层的厚度、热导率和热源的分布为已知，则由热流 q 可以计算各深度的温度［将式(4.15)略加推广便可得到多层介质的解］。前两个参数可以测定，但热源的分布只能做合理的估计。以下举出两种计算的例子，虽然都是假设的模式，但与其他方面的资料对比后，这些模式还是有实际意义的。

海洋地壳的平均厚度约为 6 公里，上面覆盖着约 4.5 公里的海水。海底地壳分为三层，其厚度与热导率都标在图 4.5 上。海底的热流各地区不同，因而它们下面的温度分布

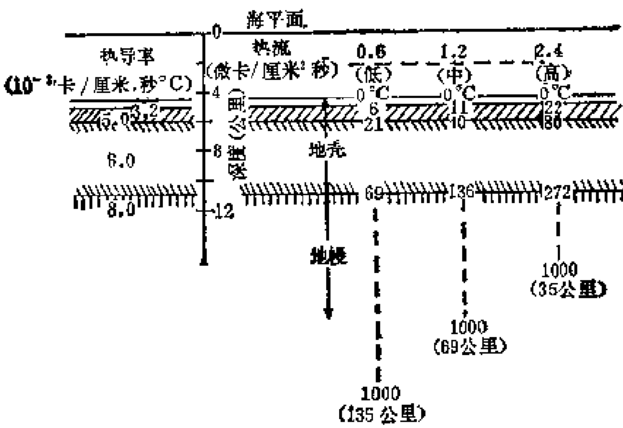


图 4.5 海洋下面的温度分布

（见《地球十讲》，页 78，图 23）

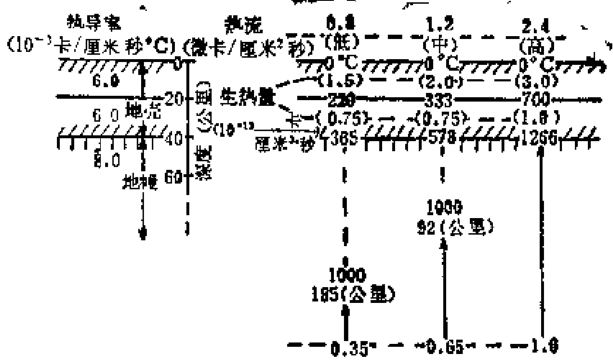


图 4.6 大陆下面的温度分布

（见《地球十讲》页 79，图 24）

也不同。海洋地壳很薄,可以假定所有热源都在 1000℃ 等温面以下。图 4.5 给出三种热流区 ($q = 0.6$, 1.2, 2.4 微卡/厘米·秒)下面几个深度的温度。

计算大陆下面的温度时,所取的地壳模式是两层的,各厚 20 公里,热源均匀分布(图 4.6)。地面热流中假定有一部分来源于 1000℃ 等温面以下。图中标出三种热流地区下面几个深度的温度。

计算更大深度岩石层的温度分布时,必须考虑传热机制的变化。图 4.7 是海洋地壳,前寒武纪地盾和地盾以外的大陆地壳下面的温度分布。计算时,假定上地幔的成分是地幔岩,并对各深度的放射性物质的含量做了适当的估计。传热机制,假定一部分是由于热传导,另一部分是由于热辐射,并假定有 0.5 微卡/厘米^2·秒的热流来自 400 公里深度以下。大陆的热流有很大一部分来源于地壳,但海底的热流则主要来源于上地幔。所以大陆地壳下面,无论是热流、温度或温度梯度都比海洋下面同深度的各量小得多。温度差可达 100℃ 以上。这个温度差在几百公里以下必将消失,否则由于热膨胀不同,深处物质的密度将有很大的差异,从而导致地面上的重力也将有很大的差异,但是这种重力差异并未观测到。

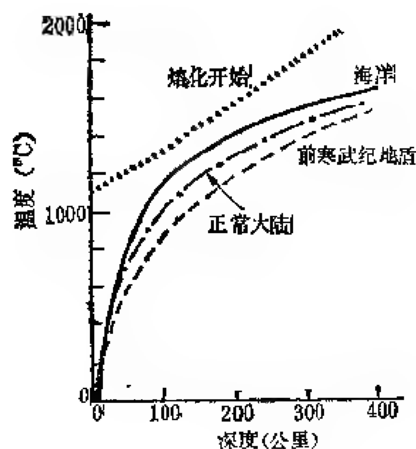


图 4.7 上地幔的温度分布

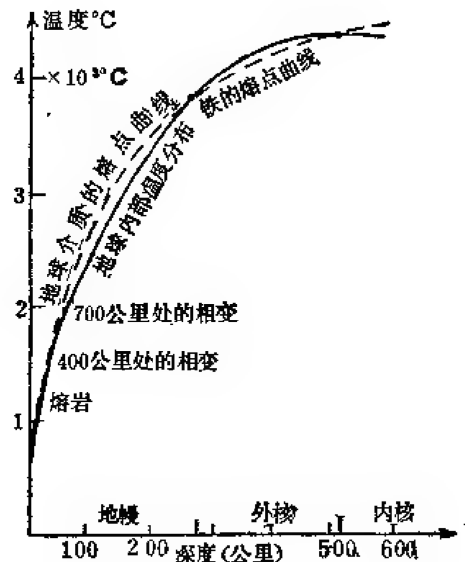


图 4.8 地球内部的温度分布

九、地球内部的温度分布

地球内部的热导率远远不是一个常数,它和深度的关系是很复杂的。以前曾有不少人企图用解传导方程的方法来求地球内部的温度分布,但不能得到令人信服的结果。另一种方法是利用某些在确定深度发生的现象来得到温度曲线上的一些控制点。这些现象有:

① 地下约一百公里的深处是软流层的上界,可以认为此处的温度等于玄武岩的熔点,即 $T \approx 1100° - 1300℃$。

② 在三百公里深度以下,地震观测表明那里完全是固体,因此可以用由实验室测得

的相应物质的熔点曲线做为该区间温度分布的上限。

③ 地震观测表明在约四百和七百公里的深处，地震波速变化急剧，相当于两种矿物的相变。在 400 公里处，$T \approx 1500℃$（橄榄石→尖晶石）。在 700 公里处，$T \approx 1900℃$（尖晶石→钙钛矿的结构）。

④ 在核-幔边界，温度必须在地幔物质的熔点之下，在铁的熔点之上。这就确定 $T \approx 3700℃$。

⑤ 在内、外核边界，温度为铁的熔点，即在深度 ≈ 5100 公里时，$T \approx 4300℃$。

根据这些控制点，就可画出地球内部温度分布的大致曲线(图 4.7)。

参 考 书 目

[1] 傅承义，1976.《地球十讲》,科学出版社。

[2] Jeffreys, H., 1964 *The Earth,* 4th edition, Cambridge Univ Press, London.

[3] Jacobs, J. A, 1956. The Earth's interior, in. *Encyclopedia of Physics,* **97**, 380, Springer Verlag, Berlin

[4] Carslaw, H S, and J C. Jaeger, 1959 *Conduction of Heat in Solids,* 2nd edition, Oxford Univ Press, London.

[5] Birch F, 1965. Speculations on the Earth's thermal history, *Bull Geol Soc. Amer.,* **176** 133

[6] York, D, and R M Farquhar, 1972 *The Earth's Age and Geochronology,* Pergamon Press, London.

第五章 地 磁 场

地磁学是地球物理学的一个历史悠久的分支，它是研究地球本体及其周围空间电磁场的起源、变化和分布规律的一门学科。它的主要内容包括 ① 地磁场的测量；② 地球的基本磁场和长期变化；③ 地球的变化磁场及日地相关现象；④ 岩石磁性和古地磁；⑤ 地磁场的成因；⑥ 电磁感应和地球内部的电导率。

磁针指南是地磁场极性的表现。但磁针并非指向地理南北极，这种偏离称为地磁偏角。随着偏角的发现和测量，人们于 1701 年绘制出世界上第一张地磁图：大西洋等偏角图；随后又发现了地磁倾角的存在，但迟至 1832 年高斯提出了地磁场强度的测量方法，才开始了完备的地磁场向量的测定。

1600 年吉尔伯特（Gilbert）发现圆球形天然磁性矿石表面磁场倾角的分布与地面相似，提出了"地球是一个大磁体"的假说，这是关于地磁场理论的最早的论断。但直到 1839 年之前地磁学的主要内容仍然是地磁测量。1839 年高斯建立了地磁场的球谐分析方法，从此把地磁学纳入了数理分析的轨道，证实了吉尔伯特关于地磁场起源于地球本体的论断，奠定了地磁学分析的理论基础。

地球电磁现象的观测和研究是认识高空和地球内部的介质的物性、组成和运动状态的重要途径之一。正是这个原因，古老悠久的地磁学近年来又获得了迅速发展，已成为空间物理的一个组成部分，例如日地相关现象、电离层和磁层物理的研究；有关地球本体的电磁性研究则属于固体地球物理学，自六十年代以来也取得了丰硕的成果，构成了近代地球物理的重要内容，例如被西方称之为"地学革命"的"板块大地构造"学说的重要支柱就是在地磁学的领域取得的。

我们的祖先对地磁学的发展做出了重要贡献。指南针被誉为我国古代四大发明之一。我国早在战国时期就已经知道天然磁石的吸铁性和指极性[1]。偏角的发现也很早[2]，可靠的记载不迟于十一世纪。北宋沈括（1032—1096 年）的《梦溪笔谈》中有这样的记载："方家以磁石磨针锋，则能指南，然常微偏东，不全南也。水浮多荡摇，指爪及碗唇上皆可为之，运转尤速，但坚滑易坠，不若缕悬为最善。"可见当时已经发现开封是有偏角的。相传哥伦布第一次横渡大西洋时，也发现了地磁偏角和它随地点的变化，但比沈括晚了四百多年。上段记载还提出了四种装置磁针的方法，其中指爪和缕悬正是近代罗盘和地磁仪器一直延用的方式。北宋时磁针的使用已很盛行。北宋宣和元年（公元 1119 年），朱彧著《萍洲可谈》，其中有这样一段："舟师识地理，夜则观星，昼则观日，阴晦观指南针。"可见当时已将指南针用于航海。据王振铎考证，指南针首次在中国用于航海，当在公元 838 与 1099 年之间[1]。

我们把地磁学的主要内容概括为两章：① 地磁场；② 古磁场及其成因。而电磁感应和地球内部电导率则归并在第七章与地电场一起讨论。五、六、七章可统称为地球电磁学，它们共同的物理基础是麦克斯韦方程组。但在各个不同领域麦克斯韦方程的具体

表现形式不同，例如，电磁场的拉普拉斯方程的解及其定解方法——球谐分析，是地球磁现象分析的主要理论方法，构成了地磁场数学描述、形态和时间变化分析(第五章)的理论基础；第六章岩石磁性和古地磁的基础主要是铁磁学物理，数学方法比较简单，地磁场成因尽管难度较大，不同作者处理方法也不尽相同，但理论基础却全部统一于电磁场的“扩散冻结方程”和流体的运动方程；而电磁场的扩散方程则是全部电磁感应问题的基本方程。为了叙述的方便，我们把五、六、七章各个部分基础统一但表现形式各异的基本方程和共同的数学方法归并为开头的物理基础一节。掌握了这些不同领域的物理基础的统一性和特殊性，尽管由于篇幅所限，在内容上难免“挂一漏万”，但对理论方法的认识却不失完整性，这样，对进一步学习地球电磁学或阅读有关文献也许会是有益的。

一、地球电磁学的物理基础

既然地球电磁学研究的是地球及其周围空间的电磁场，那么它的产生、变化势必遵从电磁现象的普遍规律——麦克斯韦方程。而它与周围电磁介质的相互作用又被介质的运动方程所制约。因此麦克斯韦方程、介质的运动方程以及两者的互相耦合是地球电磁学重要的物理基础。这里除了概要给出这两组方程外还将讨论向量亥姆霍兹方程的求解方法以及“环型”和“极型”电磁场的划分。

(一) 电磁场的扩散方程和拉普拉斯方程

在电磁单位 (C. G. S. M) 制中，麦克斯韦方程组为：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 4\pi \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 4\pi \iint \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \oiint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{5.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \quad \oiint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi \iiint \rho d\tau \tag{5.4}$$

这里 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ 是指传导电流密度和自由电荷的体密度，其它符号与通常的用法一致。(5.1)、(5.3)表明，磁场是有旋无源场，电流（包括磁化电流）和变化的电场是产生磁场的两种物理源，后者通常称做位移电流。(5.3)式，通过任意封闭曲面的磁感应通量为零，是不存在单磁极这一物理事实的数学表述。(5.4)、(5.2)式则表明，与磁场不同，电场是有源场，电荷(包括束缚电荷)和变化的磁场是电场的两种物理源。

在各向同性介质中，当电磁场不太强时，$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 之间又遵从如下关系：

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}) \tag{5.7}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 为介质的运动速度，μ、ε、σ 分别为介质的导磁率、介电常数和电导率。在电磁学中已经证明，当电荷、电流以及介质的运动状态给定时，方程(5.1)至(5.7)根据初始条件

和必要的边界条件就可以完全地决定电磁场的变化，即方程组是完备的。这里所说必要的边界条件除自然边界条件外，尚包括方程(5.1)至(5.4)在不连续界面上的表现形式，通常称为边值关系：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) &= 4\pi \boldsymbol{j}_s \\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) &= 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) &= 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) &= 4\pi \rho_s \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

其中 ρ_s 为界面上的自由面电荷密度，$\boldsymbol{j}_s$ 为界面处的自由面电流密度，下标 1、2 指在介质 1、2 中无限靠近界面处的场，$\boldsymbol{n}$ 为界面法线，由 2 指向 1。(5.8₁) 只对理想导体的极限情况成立，一般情况 $\boldsymbol{j}_s = 0$，因此(5.8)式表明，在不连续界面处，磁场的切线分量，磁感应强度的法线分量以及电场的切线分量连续，电极化矢量的法线分量的跃变为 $4\pi\rho_s$。

下面考虑静止导体内的电荷。将(5.1)两边取散度，

$$4\pi\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0,$$

并考虑方程(5.4)，可得到电流的连续方程：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.9}$$

由(5.4)、(5.6)、(5.7)和(5.9)不难推出，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = -\frac{\varepsilon}{\sigma}\boldsymbol{j} \cdot \nabla\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \tag{5.10}$$

(5.10) 即为导体中电荷所满足的方程。对于均匀介质，或者介质虽不均匀，但电流 $\boldsymbol{j}$ 与 $\nabla\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$ 垂直的情况，(5.10)式右端为零，此时导体内电荷分布随时间的变化遵从

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} \tag{5.11}$$

ρ_0 为初始时刻的电荷分布。(5.11)式表明，不管 $\rho_0(x, y, z)$ 分布如何，导体内的电荷必然衰减而最终消失，其衰减速度取决于时间常数 $\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$，即 σ 愈大衰减愈快。因此当满足上述条件时，在导体内可假定 $\rho = 0$。这时(5.4)式成为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{5.12}$$

分别对(5.1)和(5.2)取旋度，利用公式 $\nabla \times \nabla \times = \nabla\nabla \cdot - \nabla^2$，当介质静止时，可以得到：

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2\boldsymbol{H} = -4\pi\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$-4\pi\boldsymbol{E} \times \nabla\sigma - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \nabla\varepsilon) \tag{5.13'}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -4\pi\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H} \times \nabla\mu) \tag{5.14'}$$

若介质均匀，则(5.13')和(5.14')简化为：

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{5.13}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = 4\pi\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{5.14}$$

对于地球介质，μ、ε 一般可视为均匀的，从(5.13′)可以看出方程(5.13)成立必须满足

$$\boldsymbol{E} \times \nabla\sigma = 0, \tag{5.15}$$

而从上述关于导体中电荷分布的讨论((5.10)、(5.12))可知，方程(5.14)成立则要求

$$\boldsymbol{E} \cdot \nabla\sigma = 0, \tag{5.16}$$

因此方程 (5.13) 成立的条件是要么介质均匀，要么电流流动方向与介质电导率的梯度方向一致；而方程(5.14)成立的条件是介质均匀或者电流流动方向与电导率梯度方向垂直。于是，若要求(5.13)、(5.14)同时成立，则介质必须是均匀的。

若 $\sigma = 0$ 或(5.13)、(5.14)右边第一项可以忽略，则方程变成：

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}, \tag{5.17}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}。 \tag{5.18}$$

这正是通常所说的电磁场的波动方程。反之，若方程(5.13)、(5.14)右边第二项可以忽略，则方程成为：

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = 4\pi\sigma\mu \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5.19}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = 4\pi\sigma\mu \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5.20}$$

方程 (5.19)、(5.20) 称为电磁场的扩散方程。很显然与有限电导率 σ 相联系的扩散过程，必然伴随电磁能量的耗损。因此方程(5.13)、(5.14)正是电磁场在导电介质中既传播又扩散和衰减全过程的总和，称为扩散(阻尼)波动方程。我们下面将讨论方程 (5.17)、(5.18) 和方程(5.19)、(5.20)成立的条件，即在什么条件下电磁过程以传播为主，在什么条件下以扩散为主。这对于麦克斯韦电磁规律在地球电磁学中的应用是很重要的。

比较方程(5.13)或(5.14)右端的两项，可以得到第一、第二两项之比的量级为 $\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega}$，这里 ω 代表电磁场时间变化的特征频率，若

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1, \tag{5.21}$$

则方程(5.19)、(5.20)成立，电磁现象以扩散为主。反之，若

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1 \tag{5.22}$$

则方程(5.17)、(5.18)成立，电磁过程以传播为主。从方程(5.1)还可以看出，条件(5.21)相当于方程(5.1)中传导电流远远大于位移电流，即与传导电流相比，位移电流可以忽略。这等价于在电磁过程中，不考虑电场变化的磁效应。我们知道正是电磁场变化可以相互激励，电磁波动过程才得以维持，条件(5.21)既然等价于电场变化的磁效应可以忽略，波动过程自然不复存在，这正是条件 (5.21) 的物理本质所在。在地球电磁学中，所涉及的电磁变化都是缓慢的，即使对于导电性能最差的干燥岩石 ($\sigma \sim 10^{-15}$emu.)，当电场变化每秒到 10 周或 100 周时，条件(5.21)仍然成立。因此扩散方程(5.19)、(5.20)是当介质静止时地球电磁学中的主要方程。

当 $\sigma = 0$ 时，例如空气中，尽管这时电磁场应满足波动方程(5.17)、(5.18)，但由于地

球电磁现象变化非常缓慢，传播过程的时间效应同样是可以忽略的。因此当 $\sigma = 0$ 时，方程(5.17)可近似为：

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{5.23}$$

从上面的推导容易看出，在绝缘介质中方程(5.23)是当麦克斯韦方程(5.1)、(5.3)满足

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

的特殊条件下得到的。这时可定义磁势 W，

$$\boldsymbol{H} = -\nabla W \tag{5.24}$$

且 W 满足

$$\nabla^2 W = 0 \tag{5.25}$$

即磁势 W 满足拉普拉斯方程。但必须指出虽然方程(5.25)和电磁学中的静磁位的拉普拉斯方程相同，但这里一般是指随时间缓慢变化的电磁场——似稳电磁场。因此方程(5.25)是忽略传播效应时，似稳电磁场在绝缘介质中的表现形式，静磁场仅仅是它的一个特例。

在导电介质中的方程(5.19)、(5.20)，在非导电介质中的方程(5.23)或(5.25)以及边值关系(5.8)是当介质静止不动时研究地球电磁场的空间分布、时间变化以及电磁场和导电介质互相感应的主要物理基础。

这里还需指出，如前所述，若方程(5.19)、(5.20)同时成立，则导电介质必须是均匀的。表面看来，这种条件似乎非常苛刻，很难有具体实用价值。其实不然，因为一般说来，总可以把不均匀的介质分成许多元区域，在每一元区域或分层地球的每一层，其电导率可视为均匀的，可用解析的或数值的方法求解方程(5.19)、(5.20)，而在层或元区域间用边界条件(5.8)衔接定解。同样理由上述关于在导体内 $\rho = 0$ 的假定在每一层或元区域内也总可以成立，只在区域的分界面上一般将有电荷聚积。但是在必须考虑电导率的连续分布时，例如 σ 是半径 r 的函数 $\sigma(r)$，则必须考虑条件(5.15)(5.16)。若(5.15)成立，则利用方程(5.19)和边条件(5.8)先求解 $\boldsymbol{H}$，再用(5.1)求出电场 $\boldsymbol{E}$；反之若(5.16)成立，则须利用方程(5.20)先求解电场 $\boldsymbol{E}$，再通过(5.2)求得磁场 $\boldsymbol{H}$。

（二）介质运动时的电磁方程和动力学方程

当导电介质运动时，方程(5.7)将增加与运动相联系的一项 $\sigma \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$，这时方程(5.19)也必须做相应的改变，若介质均匀，可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \boldsymbol{H} + \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}) \tag{5.26}$$

其中 $\eta = (4\pi\mu\sigma)^{-1}$ 称为磁扩散率。方程(5.19)是(5.26)当介质静止时的一个特例。这时，由于焦耳热损耗，磁场在扩散过程中将逐渐衰减，通过量纲比较可以近似估计其衰减时间 $\tau = 4\pi\mu\sigma L^2$，L 是导电介质的特征线度。下面我们考察(5.26)第二项的物理意义。若介质的电导率为无穷大，则方程(5.26)简化为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}) \tag{5.27}$$

在运动介质中，取如图 5.1 所示和介质一起运动的任一迴路 l，我们考察与迴路 l 相应的截面 S 的磁通量变化 $\Delta\phi$，

$$\Delta\phi = \iint_{S_{t+dt}} H_n(t+dt)ds - \iint_{S_t} H_n(t)ds,$$

S_t 为时刻 t 迴路的截面，S_{t+dt} 为 $t+dt$ 时的截面，H_n 为磁场的法线分量，S_t 和 S_{t+dt} 的法线 $\boldsymbol{n}$ 都取为迴路 l 的正方向(右手法则)。$\Delta\phi$ 可以分解为两部分，一项是迴路截面不动，由于时间不同所产生的通量变化 $\Delta\phi_1$，

$$\Delta\phi_1 = dt\iint_{S_t} \frac{\partial H_n}{\partial t} ds \tag{5.28}$$

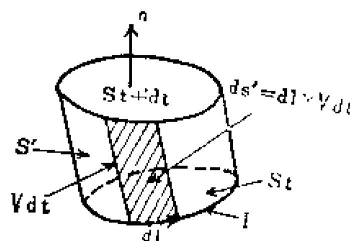


图 5.1

第二项是场不变由于迴路运动所产生的变化 $\Delta\phi_2$，

$$\Delta\phi_2 = \iint_{S_{t+dt}} H_n ds - \iint_{S_t} H_n ds,$$

根据方程(5.3)，通过如图 5.1 所示介质运动所扫过体积的表面的磁场的总通量为零，即

$$\iint_{S_{t+dt}} H_n ds - \iint_{S_t} H_n ds + dt\int_l \boldsymbol{H}\cdot(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{V}) = 0,$$

则

$$\Delta\phi_2 = -dt\int_l (\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{l} = -dt\iint_{S_t} \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.29}$$

由(5.28)、(5.29)得出迴路磁通量的变化

$$\Delta\phi = dt\iint_S \left[\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H})\right]\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.30}$$

由(5.30)式可以看出，方程(5.27)的物理意义在于，当介质运动时，任一介质迴路磁通量的变化为零，即磁通量守恒。这是容易理解的，因为介质的电导率为无穷大，则任何运动迴路磁通量的变化将产生无穷大的感应电流，这显然是不可能的，因此其磁通量必须守恒。磁通量守恒意味着介质运动时，通过介质的磁力线不发生任何变化，犹如磁力线与介质“粘固”在一起，介质携带磁力线一起运动。这就是电磁流体力学中重要的磁力线“冻结”现象。方程(5.27)称为磁场的“冻结方程”。

当方程(5.26)中，扩散与冻结两项都存在时，磁场 $\boldsymbol{H}$ 随时间的变化由两部分构成，于是磁力线在被运动物质带动的同时，又在物质中扩散，所以方程(5.26)可称为“扩散冻结方程”。为了比较在实际问题中两种效应的量级，与流体力学中的雷诺数 $\left(R = \frac{LV}{\nu}, \nu\text{ 为粘滞系数}\right)$ 相似，引入一个无量纲的磁雷诺数 R_M，

$$R_M = \frac{LV}{\eta}, \tag{5.31}$$

L 为介质的特征线度，V 为介质的特征速度。由方程(5.26)右端两项的量纲比较可以看出，当

$$R_M \gg 1 \tag{5.32}$$

时方程(5.26)近似为方程(5.27)，“冻结”现象是主要的。反之，当

$$R_M \ll 1 \tag{5.33}$$

时，(5.26)近似为方程(5.19)，电磁场的扩散将是主要的。这里需要指出，由于地球物理现象，特别是宇宙现象，其介质的广延度 L 较普通物理现象要大得多，因此在条件(5.32)、

(5.33)中 L 一般将是主要的。

以上仅仅涉及了运动介质对磁场的影响，很自然，与此同时，介质的运动状态也将受到电磁场的作用。因此运动介质与电磁场的相互作用的完整解答，必须同时考虑电磁场方程和介质的动力学方程。两者相互耦合的媒介是库仑安培力密度公式

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}, \tag{5.34}$$

上节已经讨论，在我们涉及的问题中 $\rho = 0$，因此(5.34)简化为：

$$\boldsymbol{f} = \mu \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}, \tag{5.35}$$

考虑到电磁力，则介质的运动方程为

$$\rho_m \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \rho_m (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} = -\nabla P + \rho_m \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F} + \mu \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}, \tag{5.36}$$

介质的连续方程为

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \boldsymbol{V}) = 0, \tag{5.37}$$

其中 ρ_m 为介质密度，P 是保守力密度（例如压力）的位势，$\rho_m \boldsymbol{g}$ 为重力密度，$\boldsymbol{F}$ 是粘滞力密度，对于不可压缩的流体

$$\boldsymbol{F} = \rho_m \nu \nabla^2 \boldsymbol{V},$$

方程(5.26)与(5.36)联立，研究电磁场与运动介质的相互耦合，是地核内部和磁层电磁现象的基本方程。

（三）向量亥姆霍兹方程和贝塞耳函数

地球电磁学中一类重要方程，拉普拉斯方程（5.25）的解析解以及与其相联系的连带勒让德函数已在第二章“位论简述”一节中叙述了。导体地球中的扩散方程(5.19)、(5.20)（扩散波动方程(5.13)、(5.14)也同样)可以转化为向量亥姆霍兹方程。这一节将介绍这一类方程的求解方法以及与其相联系的另一类特殊函数——贝塞耳函数。

若(5.19)、(5.20)中的磁场 $\boldsymbol{H}$ 或电场 $\boldsymbol{E}$ 用 $\boldsymbol{C}$ 表示，设

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) T(t),$$

则(5.19)、(5.20)转化为

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} + \lambda^2 T(t) = 0, \tag{5.38}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) + k^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{5.39}$$

$$k^2 = \frac{\lambda^2}{\eta},$$

方程(5.39)即为向量亥姆霍兹方程。其中 λ^2 是分离变量常数，由场向量 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}, t)$ 的时间变化性质确定，例如当时间因子是 $e^{i\omega t}$ 时，$\lambda^2 = -i\omega$。

1. 向量亥姆霍兹方程的解

设标量函数 ψ 满足

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \tag{5.40}$$

则(5.39)中向量 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 三个独立的解可表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_l &= \nabla\phi \\ \boldsymbol{R}_t &= \nabla \times \boldsymbol{i}\phi \\ \boldsymbol{R}_s &= \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{i}\phi \end{aligned}\right\}, \tag{5.41}$$

其中 $\boldsymbol{i}$ 为空间任一单位常矢量。

不难验证解(5.41)满足方程(5.39)，例如将(5.41_2)代入(5.39)左端，得

$$\begin{aligned} &\nabla \times (\nabla^2(\boldsymbol{i}\phi) + k^2\boldsymbol{i}\phi) = \nabla \times [\nabla \cdot (\nabla\boldsymbol{i}\phi) + k^2\boldsymbol{i}\phi] \\ &= \nabla \times \{\nabla \cdot [(\nabla\phi)\boldsymbol{i} + \phi\nabla\boldsymbol{i}] + k^2\boldsymbol{i}\phi\} \\ &= \nabla \times \{\boldsymbol{i}\nabla^2\phi + (\nabla\phi \cdot \nabla)\boldsymbol{i} + \nabla\phi \cdot (\nabla\boldsymbol{i}) + \phi\nabla^2\boldsymbol{i} + k^2\boldsymbol{i}\phi\} \\ &= \nabla \times \{\boldsymbol{i}(\nabla^2\phi + k^2\phi)\}, \end{aligned}$$

由于 ϕ 满足方程(5.40)，则上式恒等于零，即(5.41_2)满足方程(5.39)。也容易看出(5.41)三个解是线性无关的。因为任何一个向量场都可以用空间三个独立的基向量完全描述，因此解(5.41)做为空间的基向量对于向量 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 的描述也是完全的。特别(5.41_1) $\boldsymbol{R}_l$ 是向量 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 的纵场部分，用标量场 ϕ 的梯度，完全描述一个纵向量场是读者所熟悉的，例如静磁场、静电场、重力场等，而对于 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 的横场部分 $\boldsymbol{R}_t$，因满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{R}_t = 0$，故只须空间两个独立的向量即可做完全的描述。因此只要标量函数 ϕ 是满足方程(5.40)和边条件的完备解，则(5.41)必然是满足向量亥姆霍兹方程(5.39)的 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 的完备解答。通过(5.41)形式的解，将向量亥姆霍兹方程(5.39)简化为求解标量亥姆霍兹方程问题。

显然对于磁场 $\boldsymbol{H}$，解只含有(5.41)中的横场部分(5.41_2)、(5.41_3)。对于地球电磁学问题，条件(5.12)一般能够满足，因此电场 $\boldsymbol{E}$ 同样也只含有(5.41_2)、(5.41_3)形式的解。

2. 柱坐标系中的亥姆霍兹方程和贝塞耳函数

在柱坐标系中，标量亥姆霍兹方程(5.40)写作

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + k^2\phi = 0, \tag{5.42}$$

用分离变量法，令 $\phi(r, \varphi, z) = R(r)\phi(\varphi)Z(z)$，得到 Z、ϕ、R 所满足的常微分方程

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \alpha^2 Z = 0, \tag{5.43}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \nu^2\phi = 0, \tag{5.44}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0, \tag{5.45}$$

其中

$$\beta^2 = k^2 - \alpha^2, \tag{5.46}$$

α^2, ν^2 是分离变量常数，由边界条件确定，例如，方程(5.44)和自然的周期条件构成本征值问题，本征值和本征函数是

$$\nu = m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi;$$

对于(5.43)，如果问题的边界条件全是齐次的，那就排除了 $\alpha^2 \leqslant 0$ 的可能，由具体边界条件的类型可确定本征值 α，相应的本征函数为

$$Z(z) = C\cos\alpha z + D\sin\alpha z。$$

经自变数的代换，$x = \beta r$，则方程(5.45)成为

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0, \tag{5.47}$$

(5.47)即为 ν 阶贝塞耳方程，它有两个奇点，$x = 0$ 和 $x = \infty$，其中 $x = 0$ 是正则奇点。方程(5.47)的解 $J_\nu(x)$ 称为 ν 阶贝塞耳函数，其中 ν 和 x 都可以是任何复数。由(5.47)的级数解法可以得到 $J_\nu(x)$ 的级数表达式，

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad |\arg x| < \pi, \tag{5.48}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

其中 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数，对于整数 n，$\Gamma(n+1) = n!$。当 ν 不是整数时，$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 是方程(5.47)的两个线性无关的解，$J_\nu(x)$ 相应级数的收敛范围是 $0 \leqslant |x| < \infty$，$J_{-\nu}(x)$ 相应级数的收敛范围是 $0 < |x| < \infty$。当 $\nu = n\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 时，

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{5.49}$$

容易证明，$J_{-n}(x)$ 不再是与 J_n 线性无关的解，

$$J_{-n}(x) = (-)^n J_n(x)$$

因此，需要另求方程(5.47)的第二解。贝塞耳方程(5.47)的第二解在应用上常采用函数

$$N_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \tag{5.50}$$

并称之为第2类贝塞耳函数或诺埃曼（Neumann）函数。当 ν 不是整数时，解 $N_\nu(x)$ 与 $J_\nu(x)$ 线性无关这一点是显然的。当 $\nu = n$ 时，(5.50)右方是一个不定式，其极限存在，而且是贝塞耳方程的解，与 $J_n(x)$ 线性无关。求 $\nu \to n$ 时，由(5.50)右方的极限可得到 $N_\nu(x)$ 的级数表达式(见郭敦仁《数学物理方法》17.8节)，

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \tag{5.51}$$

其中 $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$，$\psi(1) = -C = -0.577216$，$C$ 为欧勒常数。

有时取下列两个函数作为贝塞耳方程的两个线性独立的解，

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{5.52}$$

$H_\nu(x)$ 称为第三类贝塞耳函数或汉克耳（Hankel）函数。

为了以后应用的方便，现将贝塞耳函数的主要性质摘录如下：

(1) $x = 0$ 时的贝塞耳函数

由 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 的级数表达式不难看出，对于小的 x，

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu;$$

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right),\quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n};$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\quad (\nu \neq 0,\ \nu \neq 整数)。$$

当 $x \to 0$ 时，

$$J_0(x) = 1,\qquad J_\nu(x) = 0;$$

$$N_\nu(x) \to \infty;\quad J_{-\nu}(x) \to \infty。$$

因此，如果所研究的区域包含 $r=0$ 的圆柱体轴在内，解只能取第一类贝塞耳函数 $J_\nu(x)$，即

$$R(r) = AJ_\nu(\beta r), \tag{5.53}$$

如果所研究的问题不包含 $r=0$，例如同心圆柱间的区域，或者问题的物理情况需要具有奇异性的解，例如线电流、线电荷的情形，则必须同时考虑两种解，即

$$R(r) = AJ_\nu(\beta r) + BN_\nu(\beta r)。 \tag{5.54}$$

(2) 贝塞耳函数的递推公式

由 $J_\nu(x)$ 的级数表达式(5.48)两边乘上 x^ν 对 x 求微商，得

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu) = x^\nu J_{\nu-1}。$$

类似方法可得

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}。$$

由以上两式分别消去 J'_ν 和 J_ν，得递推关系

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu-1} + J_{\nu+1} &= \frac{2\nu}{x}J_\nu, \\ J_{\nu-1} - J_{\nu+1} &= 2J'_\nu。\end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

特别当 $\nu = 0$ 时，$J'_0 = -J_1$。

容易证明，$N_\nu(x)$ 和 $H_\nu(x)$ 有与 $J_\nu(x)$ 相同的递推公式。

(3) $J_n(x)$ 的母函数、积分表示和加法公式

把 $e^{\frac{1}{2}xz}$ 和 $e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}$ 分别展成为绝对收敛级数，然后逐次相乘可以得到

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n\quad (0<|z|<\infty), \tag{5.56$_1$}$$

$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 叫作 $J_n(x)$ 的母函数。令 $z = e^{i\zeta}$，则(5.56$_1$)成为

$$e^{ix\sin\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\zeta}, \tag{5.56$_2$}$$

若令 $\zeta = \psi - \frac{\pi}{2}$，(5.56$_2$)又改写成

$$e^{ix\cos\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x)e^{in\psi}, \tag{5.56$_3$}$$

(5.56)诸式是彼此等价的。

若把(5.56$_2$)右方看作复数形式的傅氏级数，则

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\zeta}e^{in\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\zeta-in\zeta}d\zeta, \tag{5.57$_1$}$$

又，$e^{ix\sin\zeta-in\zeta}=\cos(x\sin\zeta-n\zeta)+i\sin(x\sin\zeta-n\zeta)$，故

$$\begin{aligned}J_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\zeta-n\zeta)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\zeta-x\sin\zeta)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta,\end{aligned} \tag{5.57$_2$}$$

(5.57)即为 $J_n(x)$ 的积分表示。

根据(5.56$_1$)，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a+b)z^n=e^{\frac{1}{2}a\left(z-\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{2}b\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(a)z^k\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(b)z^m$$

比较两边的 z^n 的系数，即得加法公式

$$J_n(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(a)J_{n-k}(b)。 \tag{5.58}$$

(4) 渐近表达式

在一些物理问题中，当宗量 x 较大时，贝塞尔函数的近似表达式有重要的使用价值。当 $|x|\to\infty$ 时，

$$\left.\begin{aligned}J_\nu(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})\\N_\nu(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})\\H_\nu^{(1)}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O(x^{-\frac{3}{2}})\\H_\nu^{(2)}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O(x^{-\frac{3}{2}})\end{aligned}\right\}, \tag{5.59}$$

(5.59)式的证明读者可参见王竹溪等《特殊函数概论》7.10 节。

(5) 贝塞耳函数的零点

当 x 为实变数时，$J_n(x)$ 是一个衰减振荡函数，有无穷多个实数零点，而且只有实数零点。图 5.2 中画出了 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 在 $x>0$ 时的图形。由(5.49)容易看出，

$$J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x),$$

因此 $J_n(x)$ 的零点正负成对。当 $n\geqslant 1$ 时，除 $x=0$ 是 $J_n(x)$ 的 n 阶零点外，其余零点都是一阶的；因 $J_0(0)=1$，故 $J_0(x)$ 的零点都是一阶的。

当 x 很大时，可由(5.59)估计 $J_n(x)$ 的零点，在一般情况下，可由下列公式估计 $J_n(x)$ 的零点 $x_m^{(n)}$，

$$x_m^{(n)}=A-\frac{B-1}{8A}\left(1+\frac{C}{3(4A)^2}+\frac{D}{5(4A)^4}+\frac{E}{105(4A)^6}+\cdots\right),$$

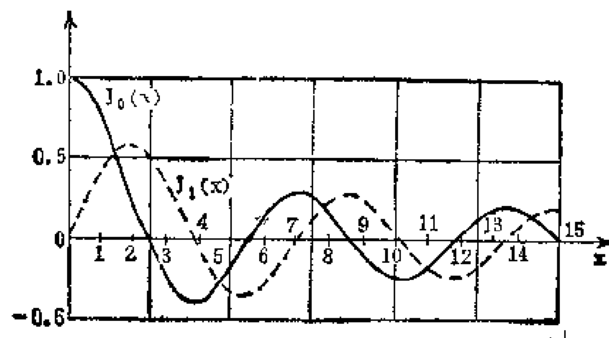


图5.2 $x \geqslant 0$ 时的 $J_0(x)$, $J_1(x)$ 图形

$$A = \left(n - \frac{1}{2} + 2m\right)\frac{\pi}{2},\quad B = 4n^2,$$

$$C = 7B - 31,\quad D = 83B^2 - 982B + 3779,$$

$$E = 6949B^3 - 153855B^2 + 1585743B - 6277237。$$

由贝塞耳函数或其导数的零点，可求得 $r = a$ 齐次边条件的本征值 β。例如对于第一、二、三类齐次边条件

$$\left[\alpha\left(\frac{dR}{dr}\right) + \beta R(r)\right]_{r=a} = 0,$$

(其中 $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$、$\beta \neq 0$ 分别对应于一、二、三类边条件)则方程(5.42)对于本征值 $\nu = m$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 得

$$\alpha\beta J'_m(\beta a) + \beta J_m(\beta a) = 0$$

求得本征值 $\beta_n^{(m)} = \dfrac{x_n^{(m)}}{a}$，相应本征函数 $R_n(r) = J_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{a} r\right)$,其中$J'_m(\beta r) = \left.\dfrac{dJ_m(x)}{dx}\right|_{x=\beta r}$。

容易证明,本征函数 $R_n(r)$ 在区间 $0 \leqslant r \leqslant a$，带权重 r 正交,即

$$\int_0^a R_i(r)R_j(r)rdr = \int_0^a J_m(\beta_i r)J_m(\beta_j r)rdr = 0,\quad i \neq j。\tag{5.60}$$

其归一因子

$$\begin{aligned} N_i &= \int_0^a R_i^2 rdr = \int_0^a J_m^2(\beta_i r)rdr \\ &= \frac{a^2}{2}\left\{[J'_m(\beta_i a)]^2 + \left(1 - \frac{m^2}{\beta_i^2 a^2}\right)J_m^2(\beta_i a)\right\}。\end{aligned}\tag{5.61}$$

既然 $J_m(\beta_i r)$ 在区间 $0 \leqslant r \leqslant a$ 为完备的正交函数族，故在同样区间满足狄里希累(Dirichlet) 条件(连续,只有有限个极值)的函数 $f(r)$ 可展开为傅里叶-贝塞耳级数，

$$\left.\begin{aligned} f(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_m(\beta_i r) \\ b_i &= \frac{1}{N_i}\int_0^a f(r)J_m(\beta_i r)rdr \end{aligned}\right\},\tag{5.62}$$

当 $a \to \infty$ 时,则有傅里叶-贝塞耳积分

$$f(r) = \int_0^\infty F(\omega)J_m(\omega r)\omega d\omega,$$

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(r)J_m(\omega r)rdr。\tag{5.63}$$

根据(5.61)不难写出一、二、三类齐次边条件相应本征函数 $J_m(\beta_i r)$ 的归一关系。

(6) 虚宗量贝塞耳函数

有时在一些边值问题中会出现下列微分方程，

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \tag{5.64}$$

若令 $Z=ix$，则(5.64)将转变为(5.47)，故称(5.64)为虚宗量(或变型)贝塞耳方程，当 ν 不是整数时(5.64)两个线性无关的解

$$I_{\pm\nu}(x)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu},$$

$$|\arg x|<\pi \tag{5.65}$$

不难验证

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix), \tag{5.66}$$

$I_\nu(x)$ 称为第一类虚宗量贝塞耳函数。显然当 $\nu=n$，$(n=0,1,2,\cdots)$ 时，$I_n(x)$ 与 $I_{-n}(x)$ 相关，

$$I_{-n}(x)=I_n(x)$$

通常将另一个线性无关的解记做 $K_\nu(x)$，

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\right],$$

其级数表达式为($\nu=n$时)

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\phi(n+k+1)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\phi(k+1)\right]\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}。$$

当 $x=0$ 时

$$K_0(x)\sim-\ln\frac{x}{2},\ K_n(x)\sim\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad(n\geqslant 1)$$

$$I_0(0)=0,\ I_n(0)=0\quad(n\geqslant 1)。$$

与 $J_n(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 相似，对于包含 $r=0$ 的区域，解只能取 $I_\nu(x)$，若在区间 $O<r\leqslant a$，则需同时考虑 $I_\nu(x)$ 和 $K_\nu(x)$。当 $x\to\infty$ 时，

$$I_\nu(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1+O(x^{-1})\right],$$

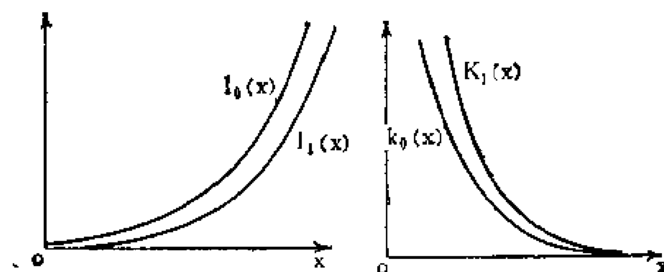


图 5.3

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}[1 + O(x^{-1})]。 \tag{5.67}$$

所以当 $x \to \infty$ 时，$K_\nu(x)$ 有界，而 $I_\nu(x)$ 趋于无穷。图 5.3 给出了 $I_0(x)$、$I_1(x)$ 和 $K_0(x)$、$K_1(x)$ 的图形表示。

由(5.65)容易看出，当 x 为实数时，与 $J_\nu(x)$ 不同，$I_\nu(x)$ 没有实的零点。

3.球坐标系中的亥姆霍兹方程和球贝塞耳函数

在球坐标系中，标量亥姆霍兹方程(5.41)写作

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + k^2\psi = 0。 \tag{5.68}$$

设

$$\psi(r,\theta,\lambda) = R(r)\Theta(\theta)\Lambda(\lambda),$$

经分离变数，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + m^2\Lambda = 0,\\
&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0,\\
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0。
\end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

其中 m^2、μ 为分离变量常数，由 $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$，$\Lambda(\lambda)$ 的单值自然边条件可知，$m = 0, 1, 2, \cdots$；(5.69_2) 即为连带勒让德方程，在第二章第 3 节中已经说明，为使 $\theta = 0$ 和 π 时，$\Theta(\theta)$ 有界，必须取

$$\mu = n(n+1),\quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则(5.69_2)中 $\Theta(\theta)$ 的解

$$\Theta(\theta) = P_{n,m}(\cos\theta),$$

(5.69)前两个方程的解即为球面谐函数，记作

$$Y_{n,m}(\theta,\lambda) = \begin{cases} Y^c_{n,m} = P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\lambda \\ Y^s_{n,m} = P_{n,m}(\cos\theta)\sin m\lambda。\end{cases} \tag{5.70}$$

$Y_{n,m}(\theta,\lambda)$ 的性质已在第二章中介绍，这里我们着重讨论方程(5.69_3)。

令 $x = kr$，并作变换

$$R(r) = x^{-\frac{1}{2}}y(x)\ 。 \tag{5.71}$$

则(5.69_3)成为

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + \left[1 - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y(x) = 0。 \tag{5.72}$$

与(5 47)比较，可知(5.72)即为 $l+\dfrac{1}{2}$ 阶的贝塞耳方程。与其相连系的方程(5.69_3)称为 l 阶球贝塞耳方程，其相应解称为 l 阶球贝塞耳函数，记作

$$\left.\begin{aligned}
j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(x), \\
n_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{l+\frac{1}{2}}(x), \\
h_l^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \\
h_l^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)。
\end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

当 l 为整数时，球贝塞耳函数可以用初等函数表示，

$$\left.\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x},\ j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}, \\
j_l(x) &= x^l\left(-\frac{d}{xdx}\right)^l \left\{\frac{\sin x}{x}\right\}, \\
n_l(x) &= (-1)^{l+1} j_{-l-1}(x)。
\end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

由贝塞耳函数的递推关系(5.55)不难得到球贝塞耳函数的递推公式，

$$\left.\begin{aligned}
R_{l-1} + R_{l+1} &= \frac{2l+1}{x} R_l, \\
lR_{l-1} - (l+1)R_{l+1} &= (2l+1)R_l。
\end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

利用(5.73)不难将以上所述贝塞耳函数的各种性质外推到球贝塞耳函数，这里勿需赘述。

在本节开头曾经指出，若磁场的时间因子为 $e^{i\omega t}$ 时，标量亥姆霍兹方程(5.40)中

$$k^2 = \frac{i\omega}{\eta} = -i4\pi\sigma\mu\omega,$$

则方程(5.69_3)成为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \left(ih^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R = 0。 \tag{5.76}$$

其中 $h^2 = 4\pi\sigma\mu\omega$。令 $x = \sqrt{-i}\,hr$，并作变换

$$R(r) = x^{-\frac{1}{2}}y(x)。$$

则方程(5.76)同样可化成 $\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 阶的贝塞耳方程(5.72)，只是这里宗量 x 为复数，相应贝塞耳函数的值也是复数，因此(5.76)是复宗量的球贝塞耳方程。这是在地球电磁学中经常遇到的一类方程。

利用(5.48)、(5.50)不难将复数球贝塞耳函数分成虚、实两部分。对于

$$j_l(\sqrt{-i}\,hr),$$

由(5.48)和(5.73)可得

$$j_l(\sqrt{-i}\,hr) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+1}}(\sqrt{-i}\,hr)^l\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\frac{1}{\Gamma\left(l+2k+\frac{3}{2}\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{hr}{2}\right)^{4k} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{\Gamma\left(l+2k+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{hr}{2}\right)^{2(2k+1)}\right\}。 \tag{5.77}$$

(5.77)右边花括号中已写成虚、实两部分，当 l 确定后，由复数因子 $(\sqrt{-i}\,hr)^l$ 即可将 j_l 分为

$$j_l = Rej_l(\sqrt{-i}\,hr) + iImj_l(\sqrt{-i}\,hr)。$$

例如，具体写出 j_0 的两部分，

$$Rej_0(\sqrt{-i}\,hr) = 1 - \frac{2^2}{5!!}\left(\frac{hr}{2}\right)^4 + \frac{2^4}{9!!}\left(\frac{hr}{2}\right)^8 - \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{2^{2k}}{(4k+1)!!}\left(\frac{hr}{2}\right)^{4k} + \cdots\cdots,$$

$$Imj_0(\sqrt{-i}\,hr) = \frac{2}{3!!}\left(\frac{hr}{2}\right)^2 - \frac{2^3}{7!!}\left(\frac{hr}{6}\right)^6 + \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{2^{(2k+1)}}{(4k+3)!!}\left(\frac{hr}{2}\right)^{2(2k+1)} + \cdots\cdots,$$

其中 $(2k+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \cdots \times (2k+1)$。

到此标量亥姆霍兹方程(5.40)在柱坐标和球坐标系中的求解问题已经解决。当将求得的标量场 ϕ 由(5.41)求解向量场 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})$ 时，还有常矢量 $\boldsymbol{i}$ 的选择问题。对于柱坐标系，选沿子方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_z$ 作为常矢量 $\boldsymbol{i}$ 显然是适宜的。但在球坐标系中的三个单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\lambda$，都不满足常矢量的条件，因此对于球坐标还必须选择适当的矢量，以使(5.41)形式的解满足方程(5.39)。可以证明，在球坐标系中用 $\boldsymbol{r}$ 代替 $\boldsymbol{i}$，解(5.41)仍然有效。因这种形式的解还具有新的物理内容，故放在下节做更进一步的讨论。

(四)"环型"和"极型"电磁场

在(5.41)中，令 $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_r u(r)$，我们试图寻找适当的 $u(r)$ 使 $\boldsymbol{R}_T = \nabla \times (\boldsymbol{e}_r u(r)\phi)$ 仍满足向量亥姆霍兹方程(5.39)。容易得到

$$R_T\boldsymbol{e}_r = 0,\quad R_T\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}(u\phi),\quad R_T\boldsymbol{e}_\lambda = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u\phi), \tag{5.78}$$

将(5.78)代人(5.39)，并改写为

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{R}_T - k^2\boldsymbol{R}_T = 0。 \tag{5.79}$$

利用公式

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_3) - \frac{\partial f_2}{\partial\lambda}\right]\boldsymbol{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_1}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial r}(rf_3)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rf_2) - \frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\lambda,$$

$$\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{e}_r + f_2\boldsymbol{e}_\theta + f_3\boldsymbol{e}_\lambda,$$

将(5.79)展成为 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\lambda$ 三个分量，其中经向 $(\boldsymbol{e}_r)$ 分量恒等于零，满足(5.79)，$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\lambda$ 两个分量有同样的方程

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u\phi)\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(u\phi) + k^2u\phi = 0。 \tag{5.80}$$

若取 $u(r)=r$，标量函数 ϕ 满足方程(5.40)，则不难看出(5.80)成立，即证明了当 $u(r)=r$ 时 $\boldsymbol{R}_T$ 满足方程(5.79)。因此

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_l &= \nabla\phi \\ \boldsymbol{R}_T &= \nabla\times(\boldsymbol{r}\phi) \\ \boldsymbol{R}_S &= \frac{1}{k}\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{r}\phi),\end{aligned}\right\} \tag{5.81}$$

是球坐标系中满足向量亥姆霍兹方程的三种独立的解。

(5.81_2)、(5.81_3)写成分量形式为

$$\boldsymbol{R}_T=\begin{cases}0 & \boldsymbol{e}_r,\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\phi_l}{\partial\lambda} & \boldsymbol{e}_\theta,\\ -\dfrac{\partial\phi_l}{\partial\theta} & \boldsymbol{e}_\lambda,\end{cases} \tag{5.82}$$

$$\boldsymbol{R}_S=\begin{cases}\dfrac{\partial^2(r\phi_l)}{k\partial r^2}+kr\phi_l=\dfrac{l(l+1)}{kr}\phi_l & \boldsymbol{e}_r,\\ \dfrac{1}{kr}\cdot\dfrac{\partial^2(r\phi_l)}{\partial r\,\partial\theta} & \boldsymbol{e}_\theta,\\ \dfrac{1}{kr\sin\theta}\dfrac{\partial^2(r\phi_l)}{\partial r\,\partial\lambda} & \boldsymbol{e}_\lambda。\end{cases} \tag{5.83}$$

其中 ϕ_l 为相应本征值 l 的本征函数。可以证明，$\boldsymbol{R}_l$、$\boldsymbol{R}_T$、$\boldsymbol{R}_S$ 三者有如下关系，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_S &= \frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{R}_T \\ \boldsymbol{R}_T &= \boldsymbol{R}_l\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{R}_S\end{aligned}\right\}, \tag{5.84}$$

除 $\boldsymbol{R}_T=\frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{R}_S$ 外，式(5.84)其余关系式都可一目了然。由式(5.79)得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{R}_T=k^2\boldsymbol{R}_T,$$

利用(5.84)关系式(1)

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{R}_T=\nabla\times k\boldsymbol{R}_S,$$

若 k 为常数，则

$$\boldsymbol{R}_T=\frac{1}{k}\nabla\times\boldsymbol{R}_S。$$

即式(5.84)中的关系式(3)。

可以明显看出，与解 $\boldsymbol{R}_T(\boldsymbol{r})$ 相应的磁场(或电场)没有径向分量，称为“环型”(toroidal)磁场(或电场)，记作 $\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{E}_T)$，而与解 $\boldsymbol{R}_S(\boldsymbol{r})$ 相应的磁场称为“极型”(poloidal)场，记作 $\boldsymbol{H}_S(\boldsymbol{E}_S)$。下面我们进一步讨论“环型”场和“极型”场的性质:

(1) 与环型磁场(电场)相应的电场(磁场)是极型场，反之亦然。

由麦克斯韦方程(5.1)、(5.2)和(5.84)不难证明上述结论。特别是对于静止介质，电磁场的这种关系是一一对应的，但当介质运动时，关系 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ 不再成立，这时对应关系仍然维持，但不再是一一对应了。

(2) 环型磁场只存在于球形导体内部，在导体外，处处为零。

设在球形导体内部环型磁场 $\boldsymbol{R}_T=\nabla\times(\boldsymbol{r}\phi)$，为了了解 $\boldsymbol{H}_T$ 在导体外部的分布，我们首先研究 $\boldsymbol{H}_T$ 在导体边界上的情况。考虑电流 $\boldsymbol{j}$ 法线分量的连续，在球形导体的边界 $r=a_-$ 时应有

$$\{(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\}_{r=a_-}=0,$$

对于环型磁场

$$\nabla\times\boldsymbol{R}_T=\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{r}\phi),$$

设

$$\phi=R(r)\Theta(\theta)\Lambda(\lambda),$$

则

$$(\nabla\times\boldsymbol{R}_T)\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{R(r)}{r}\left[\frac{\Lambda(\lambda)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin\theta}-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2}\right]。$$

当 $r=a_-$ 时，对于任何时刻 t，以及 θ、λ 的任何取值上式都等于零，除本征函数 Θ 和 Λ 为常数（相应于 $n=0$ 的本征函数 ϕ）外其充分必要条件是

$$R(a)=0,$$

而环型磁场

$$\boldsymbol{H}_T=-\boldsymbol{r}\times\nabla\phi=R(r)T(t)\left[\left(\Theta\frac{\partial\Lambda}{\sin\theta\partial\lambda}\right)\boldsymbol{e}_\theta-\left(\Lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\lambda\right],$$

因此在球面上

$$(\boldsymbol{R}_T)_{r=a_-}=0,$$

考虑磁场的连续条件，在导体外边界 $r=a_+$，$\boldsymbol{R}_T$ 也必然为零，即

$$(\boldsymbol{R}_T)_{r=a_+}=0。$$

而在导体外，由麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}_T=0,\quad\nabla\times\boldsymbol{H}_T=0。$$

既然在导体外，边值为零，场的旋度、散度也为零，那么在导体外的整个空间场必然处处为零。

环型磁场的这种性质，在地球电磁学中有重要的意义。因为在自由空间不存在环型磁场，故当考虑球内外电磁场的关系时，例如第六章中的地球电磁感应问题，可不考虑式(5.81)中的环型磁场，这样将使定解问题大大简化。

从以上分析不难相信，尽管式(5.40)、(5.41)是求解向量亥姆霍兹方程时得到的，但对于任何无源矢量场，即横场 $(\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0)$，都可分解为“环型”矢量和“极型”矢量两部分。这种场的划分对地球电磁场的许多问题的处理是方便的。但需指出，环型和极型电磁场之间所满足的关系式(5.84)，只有当 k 是常数时才成立。当 k 不是常数时，虽然仍可将其分解为环型、极型两部分，但一般情况下，环型、极型场的标量函数 ϕ 将满足不同的标量方程。对于 k 是半径 r 的函数的特殊情况读者可参阅第七章第 2 节。

二、地磁场的高斯理论

（一）地磁场的数学表述

假设地球是一个半径为 a 的标准球体，采用如图 5.4 所示球极坐标系，原点为球心

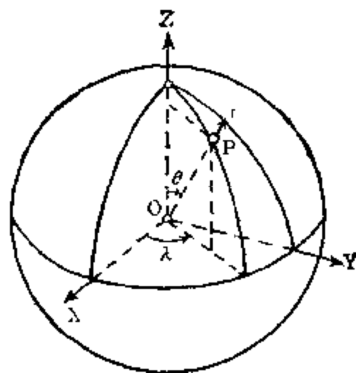


图 5 4

O，Z 轴为地理轴，指向北极，xy 为赤道平面，x 轴过格林尼治子午线。θ 为观测点 P 的余纬，λ 为经度。若假定空气为绝缘体，则 $r > a$ 为自由空间，$\sigma = 0$，地球电磁场应满足方程(5.25)，即磁场

$$H = -\nabla W,$$

磁势W满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 W = 0。$$

在球极坐标系中，其形式与(2.20)相同，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda^2}=0, \qquad (5.85)$$

方程(5.85)的解(2.23 或 2.31)在地磁学中通常写作

$$W(r,\theta,\lambda,t)=a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}(g_{ni}^m(t)\cos m\lambda+h_{ni}^m(t)\sin m\lambda)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{r}{a}\right)^n(g_{ne}^m(t)\cos m\lambda+h_{ne}^m(t)\sin m\lambda)\right]P_n^m(\cos\theta)\right\}, \qquad (5.86)$$

或改写为

$$W(r,\theta,\lambda,t)=a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}[g_{ni}^m(t)Y_{nc}^m(\theta,\lambda)+h_{ni}^m(t)Y_{ns}^m(\theta,\lambda)]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{r}{a}\right)^n[g_{ne}^m(t)Y_{nc}^m(\theta,\lambda)+h_{ne}^m(t)Y_{ns}^m(\theta,\lambda)]\right\}。 \qquad (5.87)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}Y_{nc}^m(\theta,\lambda)&=P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda,\\Y_{ns}^m(\theta,\lambda)&=P_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda,\end{aligned}\right\} \qquad (5.88)$$

为球面谐函数。

我们对解(5.86)做如下几点说明:

(1) 在(5.86)和(5.87)中，不包含 $n=0$ 的项，这是磁场与电场及重力场拉普拉斯方程解的不同之处，这是因为不存在单一磁荷或磁场的散度处处为零，方程(5.3)。

(2) 在第一章第 1 节中已经指出，方程(5.85)不仅适应于静磁场，也适应于随时间缓慢变化的似稳磁场，因此(5.86)中的系数 g、h 一般应是时间 t 的缓变函数。

(3) 常系数 g_i、h_i 和 g_e、h_e 分别代表球内场源 ($r < a$) 和球外场源所产生的磁场。

设场源只存在于球内，则当 $r\to\infty$ 时，场势 W 应趋于零，这时 (5.86) 中应只保留 $\sim\frac{1}{r^{n+1}}$ 的项，自然，与它相应的系数 g_i、h_i 与球内源场相对应。反之，从场源只存在于球外，可以说明 g_e、h_e 与球外源场相对应。关于待定常系数的确定，留待下一节讨论。

(4) 在解(5.86)、(5.87)时，在常系数中引入了一个特定的因子(地球半径) a，这样可使常系数 g、h 有与磁场相同的量纲，特别在地球表面 ($r=a$)，内外场系数之比，可直接代表内外场自身强度之比。由(2.50)可以看出，函数 $P_{n,m}$ 对于相同的 n，当 m 不同时差异很大，$\left(\text{例如 } P_{4,1} \text{ 与 } P_{4,4} \text{ 在单位球面上的平方平均值之比是 } \frac{5!/3!}{8!/1!}=\frac{1}{2016}\right)$，这在实际计算时颇不方便，为此，1895 年施密特 (Schmidt) 引入了不同形式的连带勒让德函数，记作 P_n^m，它与普通 $P_{n,m}$ 的关系为：

$$\left.\begin{aligned} &P_n^m(\cos\theta)=P_{n,m}(\cos\theta),\quad m=0\\ &P_n^m(\cos\theta)=\left[\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}}P_{n,m}(\cos\theta),\ m\geqslant 1。\end{aligned}\right\}\tag{5.89}$$

由 $P_{n,m}$ 的正交关系(2.50)可直接得出：

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\begin{cases}0 & n\neq n'\\ \dfrac{4}{\delta_m(2n+1)} & n=n',\end{cases}\tag{5.90}$$

$$\delta_m=\begin{cases}2 & m=0\\ 1 & m\geqslant 1。\end{cases}$$

相应面谐函数的正交关系和模为：

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}Y_n^m(\theta,\lambda)Y_{n'}^{m'}(\theta,\lambda)\sin\theta d\theta d\lambda=\begin{cases}0 & n\neq n' \text{ 或 } m\neq m',\\ \dfrac{1}{2n+1}, & n=n',\ m=m'。\end{cases}\tag{5.91}$$

虽然 P_n^m 仍不是标准归一化的正交函数，但已经改变了相应常系数对于 m 的显著依赖。在分析中施密特也曾试用过在球面上完全归一化的函数 R_n^m (相应于 2.53)，由(5.91)不难得出，它与函数 P_n^m 的关系

$$R_n^m=(2n+1)^{1/2}P_n^m(\cos\theta)。\tag{5.92}$$

高斯最早采用的函数与以上几种形式不同，为了区别，施密特把它记作 $P^{n,m}$，

$$P^{n,m}=\frac{(n-m)!}{(2n-1)!!}P_{n,m},\quad (2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)。\tag{5.93}$$

因常数 g、h 与所选用的函数形式有直接关系，以上我们特别介绍了几种函数形式的特点和对 g，h 的影响。在实际分析或运用已有结果时，必须注意具体函数形式的差别。考虑到这种影响，国际地磁地电协会在 1939 年华盛顿会议上，推荐在球谐分析中使用施密特函数。但由于是高斯在 1839 年最先把(5.86)用于地磁分析的，人们仍通称常系数 g、h 为高斯系数或高斯-施密特系数。称这种分析为高斯分析或球谐分析。正是高斯的分析方法奠定了地磁学的数理基础，至今仍在地磁学中广泛应用。

(二) 地磁场的高斯(球谐)分析

在上节已将拉普拉斯方程的解表示成为适于地磁分析的“高斯形式”(5.86)，剩下的

是定解问题，即根据已知条件，确定解中的待定常数。地磁场的球谐分析就是如何根据地磁场的观测值确定(5.86)中的高斯系数 g 和 h。

设某一时间 t_0，地球表面 $(r=a)$ 的场势W已知。由(5.86)得

$$W(a,\theta,\lambda,t_0)=a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{[(g_{ni}^m(t_0)+g_{ne}^m(t_0))\cos m\lambda + (h_{ni}^m(t_0)+h_{ne}^m(t_0))\sin m\lambda]P_n^m(\cos\theta)\}。\tag{5.94}$$

由(5.94)利用球面函数的正交性(5.91)可以得出：

$$\left.\begin{aligned} g_{ni}^m(t_0)+g_{ne}^m(t_0) &= \frac{2n+1}{4\pi a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi} W(a,\theta,\lambda,t_0)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda\sin\theta d\theta d\lambda,\\ h_{ni}^m(t_0)+h_{ne}^m(t_0) &= \frac{2n+1}{4\pi a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi} W(a,\theta,\lambda,t_0)P_n^m(\cos\theta)\sin m\lambda\sin\theta d\theta d\lambda。\end{aligned}\right\}\tag{5.95}$$

(5.95)式表明，即使在边界 $r=a$ 处 $W(a,\theta,\lambda,t_0)$ 为已知，由 (5.95) 也只能确定内外场系数之和 g_i+g_e 及 h_i+h_e，还不能最后确定全部高斯系数。这是不难理解的，因为拉普拉斯方程已知边值的定解问题，即第一边值 (Dirichlet) 问题，只有当满足方程的场所定域的空间的全部边界的场值已知时，方程的解才是唯一确定的。解 (5.86) 既然包括外源场部分，那么方程 (5.85) 所定域的空间除了内边界 $(r=a)$，还必然存在一个外部边界 $(r_{外}=a+h)$，而这里的定解条件仅仅是其内部边值，因此，解当然不能唯一确定。容易看出，若外部边值已知，则由 (5.86) 和球面函数的正交性，可以得到关于 g_i、g_e 和 h_i、h_e的另一组方程，它和(5.95)一起就可以唯一确定全部常系数。这样的定解条件，即除内部边值外，还要已知外部边值，不仅在 19 世纪 30 年代不可能做到，就是在空间探测技术高度发展的今天也是困难的。人们对地磁场的观测始于地球表面，对地面上磁场的观测和认识也是较为充分的。因此如何由地面磁场的观测，唯一确定解(5.86)的全部常系数，从而认识场在整个空间的全貌，是定解问题的关键所在。正是高斯从理论和实践上解决了这一问题。作为高斯分析的基础知识，这里先概要介绍一下地面测点上地磁场的描述和观测。

1. 地磁要素及其测量

地磁场是一个向量场，所以需要三个独立的分量。这种分量可以有多种方式的选择，

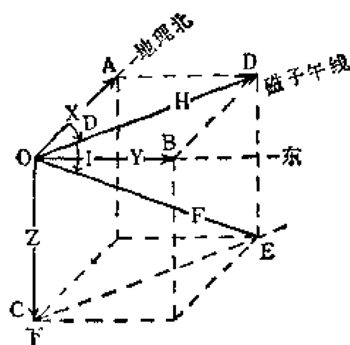


图 5.5

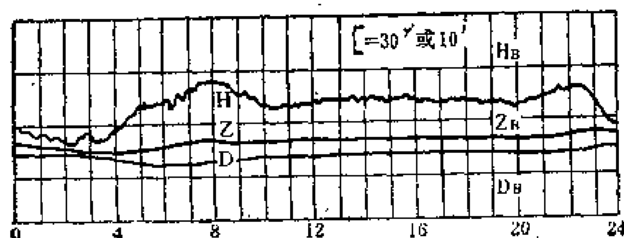


图 5.6

在地磁学中把这种用来确定某一观测点地磁场的各独立分量称为地磁要素。如图 5.5 所示，O 为观测点，OXY 为地平面，OX 指向地理北极，OZ 垂直地面，向下为正，OF 为地磁场向量 $\boldsymbol{H}$，它的模 OF 称为地磁场的总强度，通常用 F 表示；OF 可分解为向北、向东、向下三个分量 OA、OB、OC，用 X、Y、Z 表示；最常用的另一组分量是：OF 在水平面上的投影 OD，叫做水平分量 (H)；OD 与正北方向的夹角 D，叫做地磁偏角。水平分量 H，磁偏角 D，连同垂直分量 Z 一起构成一组描写观测点 O 地磁向量 OF 的独立分量；还有 OF 对于水平面的倾角 I，叫做地磁倾角。总强度 F，偏角 D 和倾角 I 又可构成另一组独立的分量系统。当然还可以有其他的组合方式。以上七个常用的可供选择的分量 F、X、Y、Z、H、D 和 I 通称作地磁要素。它们之间有如下简单关系：

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;\ H^2 = X^2 + Y^2,$$
$$Y = H\sin D,\ Z = H\tan I。\tag{5.96}$$

如果已知其中独立的三个，其他四个要素也可以计算出来。

地磁测量就是应用地磁仪器观测某一测点独立的地磁三要素。完成这种观测任务的测点通常分成两类，一类是能连续记录地磁场随时间变化的测点，叫做地磁台。一般台站都装备两套观测系统，一套叫做磁变仪，用来连续记录地磁场随时间的相对变化，通常选用 H、D、Z 三个要素。经典的记录方式是把地磁变化转换为光点的移动，用照相的方法把这种变化记录下来，这种记录叫做磁照图。图 5.6 为我国某地磁台世界日一天的磁照图，图中三条曲线即为 H、I、D 三要素随时间的变化。现在美、日等国已逐步采用数字化仪器和记录系统；另一套是测定地磁要素绝对值的仪器，叫做磁强计或磁力仪，其中用来测定偏角和倾角的经典仪器又叫作地磁经纬仪。磁强计不做连续记录，而是在特定的时间(一般每周两次)进行观测，目的是用来标定相对记录的磁变仪。两套仪器配合把地磁台站的磁场绝对值及其随时间的变化连续地确定下来。除地磁台站外，另一类是野外磁测点。野外磁测点不能连续测定地磁场随时间的变化，而是间断地(例如 3—5 年)进行地磁要素的绝对测量。但不同磁测点的观测不可能都在同一时刻进行，为了便于分析，还必须将各测点不同时间的观测值，按照地磁场的时间变化规律，归算到同一指定时刻。野外磁测点和地磁台相互补充，构成全球性或局部地区的地磁测网。此外还有航空测量(一般测 F) 和近代发展起来的卫星测量，美国 79 年发射了专门的磁测卫星。地磁台站和野外磁测点所取得的特定时刻地磁场各要素的数值和它们随时间的变化，构成了地磁场分析研究的基础资料，是进行高斯分析的边值条件。

2. 高斯系数的确定和内外源场的区分

地磁七个要素每三个独立分量的组合，虽都能等价地有效地表征地磁向量 H，但它们各具特点，在使用上又各有便利之处。例如，以角度为主的组合 D、H、I 和 D、F、I 能够直观地表征磁场向量的方向，而在分析计算中则多采用 X、Y、Z 三个要素的组合。这里高斯系数的确定所要回答的中心问题有两个，一是当内边界（即地球表面 $r = a$）那些条件已知时，才能可能唯一确定全部高斯系数 g_i、g_e 和 h_i、h_e；第二是如何根据实测点的观测结果，计算各级常系数 g_{ni}^m、g_{ne}^m 和 h_{ni}^m、h_{ne}^m。

设除已知 W 在内边界 $(r = a)$ 的分布外，还知道 W 在界面上的法向导数，由(5.86)可得

$$Z = \frac{\partial W}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(ng_{ne}^{m}(t)\cos m\lambda + nh_{ne}^{m}(t)\sin m\lambda)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}((n+1)g_{ni}^{m}(t)\cos m\lambda + (n+1)h_{ni}^{m}(t)\sin m\lambda)\right]P_n^m(\cos\theta)\right\}。\quad (5.97)$$

当 $r = a$ 时，对于特定时刻 t_0

$$Z(a, \theta, \lambda, t_0) = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{\substack{r=a\\ t=t_0}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{[(ng_{ne}^{m}(t_0) - (n+1)g_{ni}^{m}(t_0))\cos m\lambda + (nh_{ne}^{m}(t_0)$$
$$- (n+1)h_{ni}^{m}(t_0))\sin m\lambda]P_n^m(\cos\theta)\}。\quad (5.98)$$

与(5.95)相似，由球面函数正交性(5.91)和地面垂直分量 Z 的分布(5.97)可以得到

$$\left.\begin{aligned} ng_{ne}^{m}(t_0) - (n+1)g_{ni}^{m}(t_0) &= \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Z(a, \theta, \lambda, t_0)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda \\ &\quad \cdot \sin\theta d\theta d\lambda, \\ nh_{ne}^{m}(t_0) - (n+1)h_{ni}^{m}(t_0) &= \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Z(a, \theta, \lambda, t_0)P_n^m(\cos\theta) \\ &\quad \cdot \sin m\lambda \sin\theta d\theta d\lambda。\end{aligned}\right\}\quad (5.99)$$

若在内边界 $r = a$，W 及其法向导数 Z 已知，则方程 (5.95) 和 (5.99) 右端为已知量。(5.95)和 (5.99) 构成一组关于 g_e、g_i 和 h_e、h_i 四个未知量的四个线性独立的方程组，这个方程组可以唯一确定全部高斯系数 g_e、g_i 和 h_e、h_i。需要指出，这里给出的定解条件既不同于一般椭圆方程已知全部边界场值的第一边界条件(Dirichlet 问题)，也不同于已知全部边界场的法向导数的第二边界条件 (Neumann 问题)，当然更不是混合边界条件(已知场和场的法向导数的线性组合)的劳平(Robin)问题，而是仅在其内边界上独立给出第一、第二种边界条件。由以上分析可以看出这种边界条件的定解问题同样是唯一的。这种唯一性连同球面函数的正交性可以保证我们在用 (5.95) 和(5.99)确定某一阶 (或级) 常系数 g_{ni}^{m}、g_{ne}^{m} 和 h_{ni}^{m}、h_{ne}^{m} 时，与其他阶(或级)常系数是否已经求出无关。因而在(5.86)中，取项数多少只影响解的精确程度，而与级数各项本身无关，这种性质对于解的收敛快慢尚未确定之前，根据已经取得的结果研究场的性质有特别重要的意义。

在实际计算中，由于场位W无法直接观测，还不能直接由(5.95)和(5.99)直接确定高斯系数。设在地球表面 ($r = a$) 除已知垂直分量 Z 外 (5.98)，北向分量X和东向分量 Y 也已给定。由 (5.86)

$$X(r, \theta, \lambda, t) = \frac{\partial W}{r\partial\theta}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}(g_{ni}^{m}(t)\cos m\lambda + h_{ni}^{m}(t)\sin m\lambda)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(g_{ne}^{m}(t)\cos m\lambda + h_{ne}^{m}(t)\sin m\lambda)\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right\},\quad (5.100)$$
$$Y(r, \theta, \lambda, t) = -\frac{\partial W}{r\sin\theta\partial\lambda}$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}(mg_{ni}^{m}(t)\sin m\lambda - mh_{ni}^{m}(t)\cos m\lambda)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(mg_{ne}^{m}(t)\sin m\lambda - mh_{ne}^{m}(t)\cos m\lambda)\right]P_n^m(\cos\theta)\right\}, \tag{5.101}$$

当 $r = a$ 时，对于特定时刻 t_0

$$X(a, \theta, \lambda, t_0) = \left(\frac{\partial W}{r\partial\theta}\right)_{\substack{r=a\\t=t_0}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{[(g_{ni}^{m}(t_0) + g_{ne}^{m}(t_0))\cos m\lambda\right.$$

$$\left.+(h_{ni}^{m}(t_0) + h_{ne}^{m}(t_0))\sin m\lambda]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right\}, \tag{5.102}$$

$$Y(a, \theta, \lambda, t_0) = \left(-\frac{\partial W}{r\sin\theta\partial\lambda}\right)_{\substack{r=a\\t=t_0}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left\{[(g_{ni}^{m}(t_0) + g_{ne}^{m}(t_0))\sin m\lambda\right.$$

$$\left.-(h_{ni}^{m}(t_0) + h_{ne}^{m}(t_0))\cos m\lambda]\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right\}。 \tag{5.103}$$

由(5.102)和(5.103)可以看出，与(5.94)场位 W 一样，北向分量 X 和东向分量 Y 也是与关于高斯系数的内外场之和 $g_i + g_e$, $h_i + h_e$ 相联系。可以证明在界面上已知 X 或 Y 和已知 W 是完全等效的。由关系

$$W(a, \theta, \lambda) = a\int_0^{\theta} X(a, \theta, \lambda)d\theta, \tag{5.104}$$

$$W(a, \theta, \lambda) = -a\sin\theta\int_0^{\lambda} Y(a, \theta, \lambda)d\lambda + W(a, \theta, \lambda)_{\lambda=0} \tag{5.105}$$

可直接看出，北向分量 X 与 W 是等效的((5.104))，但(5.105)尚有一依赖于 $X(a,\theta,\lambda)|_{\lambda=0}$ 的项 $W(a,\theta,\lambda)|_{\lambda=0}$，即仅由 Y 还不能完全确定场位 W（除允许差任意常数外）。将(5.105)代入(5.95)，由

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} W(a, \theta, \lambda)_{\lambda=0}P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda}\sin\theta d\theta d\lambda = 0$$

可知，依赖于 $X|_{\lambda=0}$ 的项 $W|_{\lambda=0}$ 的存在与高斯常系数的确定无关。这就证明了 X 或 Y 与 W 的上述等效性。因此在地球表面，与 W、Z 一样，已知强度 X（或 Y）、Z 的分布也能唯一确定全部高斯系数。这种等效性和唯一性也可以由 X、Y 分量的级数表达式(5.102)、(5.103)直接证明。对于 Y 分量，由(5.103)可以得出，

$$Y(a, \theta, \lambda, t_0)\sin\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[(g_{ni}^{m} + g_{ne}^{m})\sin\lambda - (h_{ni}^{m} + h_{ne}^{m})\cos m\lambda]mP_n^m(\cos\theta)。 \tag{5.106}$$

由 P_n^m 的正交性容易得到

$$\left.\begin{aligned}g_{ni}^{m} + g_{ne}^{m} &= \frac{2n+1}{4m\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi} Y(a, \theta, \lambda)\sin m\lambda P_n^m(\cos\theta)\sin^2\theta d\theta d\lambda\\ h_{ni}^{m} + h_{ne}^{m} &= -\frac{2n+1}{4m\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi} Y(a, \theta, \lambda)\cos m\lambda P_n^m(\cos\theta)\sin^2\theta d\theta d\lambda\end{aligned}\right\}, \tag{5.107}$$

(5.107)式与(5.95)等效，即与场位W一样，已知分量Y的面值分布，可唯一确定内外场高斯系数之和。对于X分量，这种等效性的证明不像Y分量这样直接。利用公式[3]

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}\sin\theta\frac{dP_n^m}{d\theta}=\frac{\{(n+1)^2-m^2\}^{\frac{1}{2}}}{n+1}P_{n+1}^m-\frac{(n^2-m^2)^{\frac{1}{2}}}{n}P_{n-1}^m$$

可得

$$X(a,\theta,\lambda,t_0)\sin\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[(g_{ni}^m+g_{ne}^m)\cos m\lambda+(h_{ni}^m+h_{ne}^m)\sin m\lambda]$$

$$\cdot\left\{\frac{n[(n+1)^2-m^2]^{\frac{1}{2}}}{2n+1}P_{n+1}^m-\frac{(n+1)(n^2-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2n+1}P_{n-1}^m\right\},\tag{5.108}$$

将上式并项后，得

$$X(a,\theta,\lambda,t_0)\sin\theta=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(b_l^{m,c}\cos m\lambda+b_l^{m,s}\sin m\lambda)P_l^m,\tag{5.109}$$

$$b_l^{m,c}=\frac{(l-1)(l^2-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2l-1}(g_{(l-1)i}^m+g_{(l-1)e}^m)$$

$$-\frac{(l+2)[(l+1)^2-m^2]^{\frac{1}{2}}}{2l+3}(g_{(l+1)i}^m+g_{(l+1)e}^m),\tag{5.110}$$

$$b_l^{m,s}=\frac{(l-1)(l^2-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2l-1}(h_{(l-1)i}^m+h_{(l-1)e}^m)$$

$$-\frac{(l+2)[(l+1)^2-m^2]^{\frac{1}{2}}}{2l+3}(h_{(l+1)i}^m+h_{(l+1)e}^m)。\tag{5.111}$$

利用球谐函数的正交性，由(5.109)式立得

$$b_l^{m,c}=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}X(a,\theta,\lambda)P_l^m\cos m\lambda\sin^2\theta d\theta d\lambda\tag{5.112}$$

$$b_l^{m,s}=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\lambda=0}^{2\pi}X(a,\theta,\lambda)P_l^m\sin m\lambda\sin^2\theta d\theta d\lambda\tag{5.113}$$

即当X分量的面值已知时，(5.110)，(5.111)式中的$b_l^{m,c}$、$b_l^{m,s}$为已知量。不难看出，与待定量高斯系数g_n^m和h_n^m有关的方程(5.110)和(5.111)是彼此独立的，其中任何一组奇数和偶数阶高斯系数已知，不难由(5.110)和(5.111)式用递推办法求解全部高斯系数。但由于(5.109)式是一个无穷级数，除$m=0$各阶高斯系数可由递推办法确定外，一般情况高斯系数的定解问题乃是无穷多个未知数的线性方程组(5.110)和(5.116)的求解问题。如果这个方程组的解存在而且是唯一的，则$g_{ni}^m+g_{ne}^m$可由X分量的面值分布唯一确定，即证明了X分量与场势W等价。关于无穷多个未知数的线性方程组解的存在和唯一性的严格理论读者可参阅斯米尔诺夫著《高等数学教程》三卷一分册第二章第48节和五卷二分册第四章第1节。

到此我们已经从理论上解决了拉普拉斯方程(5.85)的普遍解(5.86)的定解问题，肯定了能够由地面磁场强度的分布唯一确定(5.86)中内外场的全部高斯常系数，并且给出了可供实际应用的方程(5.95)、(5.106)、(5.113)和(5.99)，为地磁场的分析奠定了理论基础。但在高斯系数的实际计算中一般不采用(5.95)、(5.106)、(5.113)和(5.99)的形式，而是把地面地磁场强度的观测值$Z(a,\theta,\lambda,t_0)$、$Y(a,\theta,\lambda,t_0)$、$Z(a,\theta,\lambda,t_0)$分别直接代入(5.102)、(5.103)和(5.97)求解g_{ni}^m、g_{ne}^m和h_{ni}^m、h_{ne}^m的线性代数方程组，来确定高斯系数

g_i、h_i、g_e、h_{eo} 当观测点的数目足够多，特别是在同一纬度圈上测点够多时，还可采取如下具体计算步骤：首先对地球表面同一纬度的观测值 X、Y、Z 进行关于经度 λ 的傅里叶分析，即

$$X(a, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{m=0}^{\infty} (x_{mg}^{(\theta)} \cos m\lambda + x_{mh}^{(\theta)} \sin m\lambda), \tag{5.114}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{og}^{(\theta)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(a, \theta, \lambda, t_0) d\lambda \\ x_{mg}^{(\theta)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X(a, \theta, \lambda, t_0) \cos m\lambda d\lambda \\ x_{mh}^{(\theta)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} X(a, \theta, \lambda, t_0) \sin m\lambda d\lambda \end{aligned}\right\}, \tag{5.115}$$

对于 Y、Z 有相同的公式，相应系数分别记作 $y_{mg}^{(\theta)}$, $y_{mh}^{(\theta)}$ 和 $z_{mg}^{(\theta)}$, $z_{mh}^{(\theta)}$, 与此相应 X、Y、Z 在地球表面的表示式(5.102)、(5.103)和(5.97)可改写为

$$X(a, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 X_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n^m X_n^m(\theta)\right)\cos m\lambda + \left(\sum_{m=n}^{\infty} b_n^m X_n^m(\theta)\right)\sin m\lambda\right\}, \tag{5.116}$$

$$Y(a, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 Y_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n^m Y_n^m(\theta)\right)\cos m\lambda + \left(\sum_{n=m}^{\infty} b_n^m Y_n^m(\theta)\right)\sin m\lambda\right\}, \tag{5.117}$$

$$Z(a, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^0 P_n(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\left(\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n^m P_n^m(\theta)\right)\cos m\lambda + \left(\sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^m P_n^m(\theta)\right)\sin m\lambda\right\}, \tag{5.118}$$

其中

$$X_n^m(\theta) = \frac{1}{n}\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}, \quad Y_n^m(\theta) = \frac{m}{n}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}, \tag{5.119}$$

$$a_n^m = n(g_{ni}^m + g_{ne}^m), \quad b_n^m = n(h_{ni}^m + h_{ne}^m), \tag{5.120}$$

$$\alpha_n^m = ng_{ne}^m - (n+1)g_{ni}^m, \quad \beta_n^m = h_{ne}^m - (n+1)h_{ni}^m, \tag{5.121}$$

$X_n^m(\theta)$、$Y_n^m(\theta)$ 与连带勒让德函数的关系读者可参阅[3,p608-622]，为了使用方便，施密特同时给出了 $X_n^m(\theta)$ 和 $Y_n^m(\theta)$ 的函数表。比较 (5.114)（包括相应的 Y、Z 的公式）和(5.116)、(5.117)、(5.118)可以得到

$$x_{og}^{(\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 X_n^0(\theta), \quad x_{mg}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^m X_n^m(\theta) \quad (m > 0), \tag{5.122}$$

$$y_{og}^{(\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 Y_n^0(\theta), \quad y_{mg}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^m Y_n^m(\theta) \quad (m > 0), \tag{5.123}$$

$$x_{mh}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n^m X_n^m(\theta) \quad m > 0, \tag{5.124}$$

$$y_{mn}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n^m Y_n^m(\theta) \quad m > 0, \tag{5.125}$$

$$z_{0g}^{(\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^0 P_n(\cos\theta), \quad z_{mg}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n^m P_n^m(\cos\theta) \quad m > 0, \tag{5.126}$$

$$z_{nm}^{(\theta)} = \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^m P_n^m(\cos\theta) \quad m > 0。 \tag{5.127}$$

由 X、Y、Z 的地面观测值按公式(5.115)求出不同纬度关于经度 λ 的傅氏系数 $x_{mg}^{(\theta)}$、$x_{mh}^{(\theta)}$、$y_{mg}^{(\theta)}$、$y_{mh}^{(\theta)}$ 和 $z_{mg}^{(\theta)}$、$z_{mh}^{(\theta)}$，再应用线性方程组(5.122)—(5.127)求解 a_n^m、b_n^m、α_n^m、β_n^m，最后利用(5.120)、(5.121)就可将内外场系数区分开，从而得到各级高斯常系数 g_{ni}^m、g_{ne}^m 和 h_{ni}^m、h_{ne}^m。实际计算中无论是由场强的观测值直接代入方程(5.116)、(5.117)、(5.118)，还是先由观测值求出关于经度 λ 的傅氏系数，再利用方程组 (5.122)—(5.127) 来求解高斯常系数，各公式中的 n 及相应的 m 都不可能是无限的。这相应于用有限项级数代替关于场的无穷级数。显然这种近似的可能性取决于场的级数展开式 (5.86) 的收敛性。实际分析表明，级数(5.86)收敛是迅速的，$n = 1$ 的级数项约占 80—85%。正是这种迅速的收敛性，保证了理论上完备的高斯分析能够用于地磁场的分析实际。若级数最高阶数取为 n，则全部高斯系数的个数为 $2n(n+2)$，系数 a_n^m、b_n^m 和 α_n^m、β_n^m 的个数相同，各为 $n(n+2)$，每个测点可以提供两个关于 a_n^m、b_n^m 的方程 (X、Y)，一个 α_n^m、β_n^m 的方程 (Z)，因此要确定全部 $2n(n+2)$ 个高斯系数至少必须有 $n(n+2)$ 个三分量的测点。实际计算中，观测点的数目必须远大于上述极限数目，这一方面是因为观测点数够多，可以提供较多的方程，利用最小二乘法解有关方程组，可以保证常系数的精度；容易证明，若每个测点以所代表的面积加权，则利用加权最小二乘法求解有关方程组等效于用求和代替积分(5.95)、(5.99)，因此足够的测点和全球较为合理的分布可以近似满足球谐函数的正交关系，以尽可能保证实际计算中各阶高斯系数的独立性。关于后一点往往被人忽视，他们把高斯分析仅仅理解为解方程组 (5.116)、(5.117) 或 (5.118)，用局部有限的测点去求高斯系数并区分内外场。对此这里有特别强调之必要。设在地球表面某一区域 S 有 n 个测点，(5.116) 和 (5.118) 中各包含 n 个待定系数 a_n^m、b_n^m 和 α_n^m、β_n^m，则(5.116)和(5.118)将各提供 n 个独立的方程。为方便将方程组形式改写为

$$(\alpha_{ij})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{5.128}$$

其中常数 b_n 为测点磁场值 $X(a, \theta, \lambda, t_0)$ 或 $Z(a, \theta, \lambda, t_0)$，$x_n$ 为待定系数 a_n^m、b_n^m 或 α_n^m、β_n^m，(α_{ij}) 为 n 阶系数矩阵，其元素 α_{ij} 由 $\begin{matrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{matrix} P_n^m(\cos\theta)$ 或 $\begin{matrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{matrix} X_n^m(\theta)$ 确定，λ，$\theta \in S$，若测点数多于 n，则(5.128)是正则化后的 n 阶线性方程组。设在区域 S，系数矩阵 (α_{ij}) 中第 l 列和第 n 列元素近似相等(或线性相关)，即

$$\alpha_{il} \approx \alpha_{in}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)。 \tag{5.129}$$

其余列（或行）线性无关。因区域 S 局限于地表的某一局部区域，(5.129) 式成立是可能

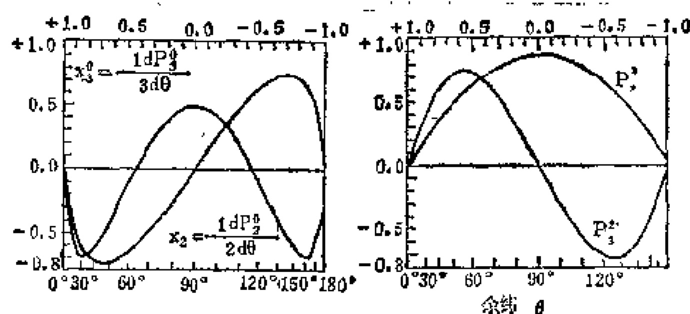


图 5.7

的，例如像图 5.7 所示，在区间 $0\leqslant\theta\leqslant 60°$，$P_2^2$ 和 P_3^2，$X_3^0(\theta)$ 和 $X_2^0(\theta)$ 差别不大，因此对同一经度，方程 (5.116) 中待定常数 a_2^2 和 a_3^2 的系数以及 b_2^2 和 b_3^2 的系数近似相等；方程 (5.118) 中 α_2^0、β_2^0 分别与 α_3^0、β_3^0 项的系数近似相等。若(5.129)式成立，则方程组(5.128)系数行列式 $|\alpha_{ij}|=0$，矩阵 (α_{ij}) 的秩为 $n-1$，方程组 (5.128) 有解的充分必要条件是其特征行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & b_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}=0, \qquad (5.130)$$

不难看出，只有当(5.118)或(5.116)中所取项数 n 已近似或完全描述了真实磁场时，条件(5.130)才能成立。很显然，若(5.130)式成立，则方程组(5.128)有无穷多组解，只有 x_1^0，$x_2^0,\cdots,(x_i+x_n)^0,\cdots x_{n-1}^0$ 才是唯一确定的。这表明，当 (5.129) 式成立时，即使满足条件(5.130)，也无法由观测值根据 (5.116)、(5.118) 确定全部高斯系数。因此可以得出，只有当：第一，在局部区域 S 内，磁场所包含的全部球谐项已知（在一定的精度范围），以保证线性方程组(5.128)的所有特征行列式的秩与行列式的秩相同，即(5.130)式成立；第二，各球谐函数间在区域 S 内有明显差异，即没有任何两个不同球谐函数满足 (5.129) 式，两个条件都具备时在区域 S 内做球谐分析才是可能的。否则由(5.116)、(5.118)计算所得全部系数，无论与实测值符合多好，磁场表达式(5.116)、(5.118) 只能是一种插值表示方法，而不再具有上述高斯分析的意义。换句话说，即这样求得的"高斯系数"只在二维公式(5.116)、(5.118)中才有意义，而在三维公式(5.86)、(5.100)、(5.101)中不再具有任何意义了。但当 S 扩展到全部球面，且测点分布较为均匀合理时，即使(5.116)、(5.118)中不包括全部球谐项，即条件(5.130)不满足，方程组(5.128)的解仍然是唯一确定的。

如前所述，高斯系数 g_i、h_i 和 g_e、h_e 具有明确的物理意义，分别代表地球内部和外部场源所产生的磁场，地磁场高斯分析的结果表明，在地球表面地磁场的绝大部分来源于地球内部，外源部分仅占万分之几到千分之几偶尔可达百分之几，因此高斯理论的成功，除了给出地磁场严格的数学表述外，还在于它把几百年来人们只能猜测的关于地磁场来源所在地的问题，变成了可以通过分析做出客观判断的现实课题。高斯理论的建立和实际分析的结果，证实了早在 1600 年吉尔伯特关于地球是一个大磁体的论断。地磁场还随

时间不断地变化，因此不同时间的地磁场所确定的高斯系数是不同的，即高斯系数是时间 t 的函数。地磁场随时间的变化有缓慢变化和较快速变化两类。来源于地球内部，基本上稳定，只随时间非常缓慢变化的成分，是地磁场的主要部分，称为地球的"基本磁场"；来源于高空，随时间变化较快的成分，称为地球的"变化磁场"。下面将分述基本磁场和变化磁场时空变化的基本形态。

三、地球的基本磁场及其长期变化

（一）地球的基本磁场

1. 基本磁场的高斯分析和地磁图

基本磁场是地磁场中的稳定部分，在现有的精度范围内，可以认为地球基本磁场全部来源于地球内部。这样，上述球谐分析各公式中与外源场有关的高斯系数 g_e 和 h_e 全部为零。省略表示内源场的脚标 i，则公式(5.86)、(5.87)、(5.100)、(5.101)简化为

$$W(r,\theta,\lambda)=a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\sin\theta)\right],\quad(5.131)$$

$$\left.\begin{aligned}X(r,\theta,\lambda)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}(g_n^m\cos m\lambda\right.\\&\qquad\left.+h_n^m\sin m\lambda)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right]\\Y(r,\theta,\lambda)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}(g_n^m\sin m\lambda\right.\\&\qquad\left.+h_n^m\cos m\lambda)\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]\\Z(r,\theta,\lambda)&=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[(n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}(g_n^m\cos m\lambda\right.\\&\qquad\left.+h_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta)\right]\end{aligned}\right\}\quad(5.132)$$

关于高斯系数 g、h 的确定，本章第 1，2 节所述理论和方法全部适用。只是这里，W、X、Y 和 Z 之中任何一个量在地球表面的分布已知，都可唯一确定(5.131)或(5.132)中的全部高斯系数。这相应于拉普拉斯方程第一边值（已知W或 X、Y）和第二边值（已知 Z）问题，与第 1，2 节定解问题的这种差异，是由于这里没有外源场，相应外部边界条件为无穷远点，而这种无穷远点的自然边界条件，解(5.131)已经自然满足。实际计算中，当最高阶数取为 n 时，这里球谐系数的总数为 $n(n+2)$，只要有 $n(n+2)$ 个独立的方程，就能确定全部高斯系数。地磁场的球谐分析除采用上述球极坐标外，施密特和阿达姆斯（Adams）等人还曾考虑地球扁率的影响。但计算结果两者差异并不显著[3][4]。表 5.7 列出了不同年代低阶高斯系数的结果。

五十年代末和六十年代，随着全球范围，特别是航空、海上和卫星地磁测量的发展，大大丰富了人们对于地磁场空间分布的认识，为全球范围的基本磁场的分析提供了良好的

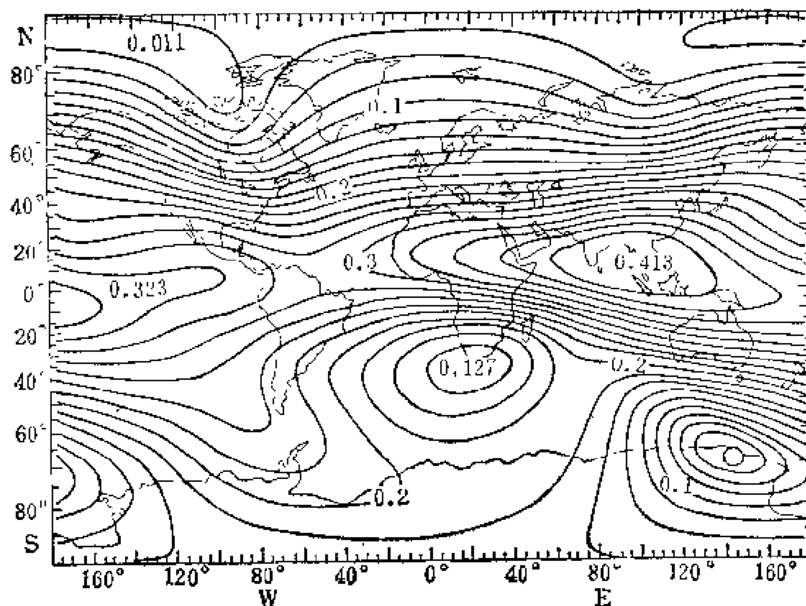
表 5.1　$n=2$ 阶高斯系数[7]（单位 γ）

作　　者	年代	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	h_2^1	g_2^2	h_2^2
Erman Petexsen	1829	−3201	−284	601	−8	257	−4	−14	146
Gauss	1835	−3235	−311	625	51	292	12	−2	157
Adams	1845	−3219	−278	578	9	284	−10	4	135
Adams	1880	−3168	243	603	−49	297	−75	61	149
Schmidt	1885	−3168	−222	595	−50	278	−71	65	149
Futsche	1885	−3164	−241	591	−35	286	−75	68	142
Neumeyer Peterson	1885	−3157	−248	603	−53	288	−75	65	146
Dyson、Furner	1922	−3095	−226	592	−89	299	−124	144	84
Jones Melotte	1942	−3039	−218	555	−117	294	−150	157	51
Atauasieva	1945	−3032	−229	590	−125	288	−146	150	48
Vestine et al.	1945	−3057	−221	581	−127	296	−166	164	54
Finch, Leaton	1955	−3055	−227	590	−152	303	−190	158	24
Cain et al.	1965	−3040.1	−216.4	577.8	−154.0	299.8	−193.2	159.0	20.3
Leaton et al.	1965	−3037.5	−208.7	576.9	−164.8	295.4	−199.5	157.9	11.6

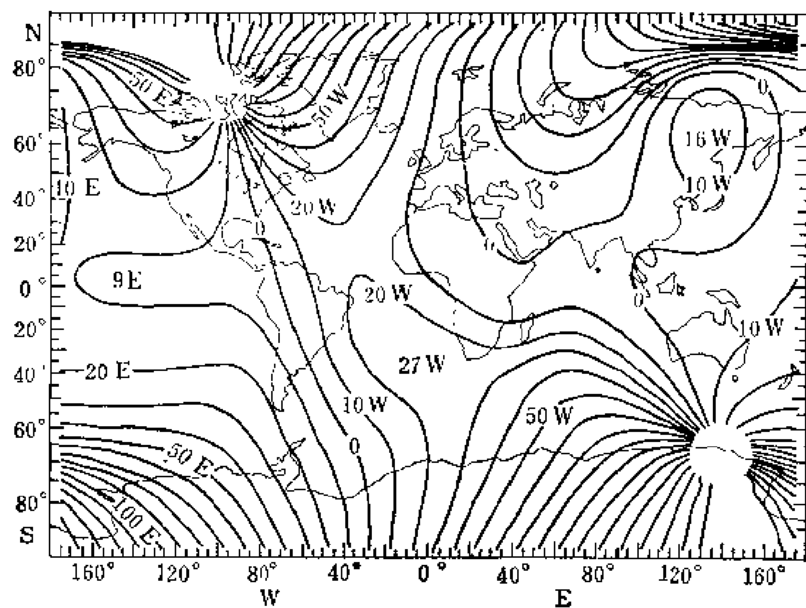
表 5.2　1965.0 年代国际地磁参考场的高斯系数[1]

		基本磁场		长期变化				基本磁场		长期变化	
n	m	$g_n^m(\gamma)$	$h_n^m(\gamma)$	$\dot{g}_n^m$ (γ/年)	$\dot{h}_n^m$ (γ/年)	n	m	$g_n^m(\gamma)$	$h_n^m(\gamma)$	$\dot{g}_n^m$ (γ/年)	$\dot{h}_n^m$ (γ/年)
1	0	−30339		15.3		6	2	4	106	1.1	−0.4
1	1	−2123	5758	8.7	−2.3	6	3	−229	68	1.9	2.0
2	0	−1645		−24.4		6	4	3	−32	−0.4	−1.1
2	1	2994	−2006	0.3	−11.8	6	5	−4	−10	−0.4	0.1
2	2	1567	130	−1.6	−16.7	6	6	−112	−13	−0.2	0.9
3	0	1297		0.2		7	0	71		−0.5	
3	1	−2036	−403	−10.8	4.2	7	1	−54	−57	−0.3	−1.1
3	2	1289	242	0.7	0.7	7	2	0	−27	−0.7	0.3
3	3	843	−176	−3.8	−7.7	7	3	12	−8	−0.5	0.4
4	0	958		−0.7		7	4	−25	9	0.3	0.2
4	1	805	149	0.2	−0.1	7	5	−9	23	0.0	0.4
4	2	492	−208	−3.0	1.6	7	6	13	−19	−0.2	0.2
4	3	−392	8	−0.1	2.9	7	7	−2	−17	−0.6	0.3
4	4	256	−265	−2.1	−4.2	8	0	10		0.1	
5	0	−223		1.9		8	1	9	3	0.4	0.1
5	1	357	16	1.1	2.3	8	2	−3	−13	0.6	−0.2
5	2	246	125	2.9	1.7	8	3	−12	5	0.0	−0.3
5	3	−26	−123	0.6	−2.4	8	4	−4	−17	0.0	−0.2
5	4	−161	−107	0.0	0.8	8	5	7	4	−0.1	−0.3
5	5	−51	77	1.3	−0.3	8	6	−5	22	0.3	−0.4
6	0	47		−0.1		8	7	12	−3	−0.3	−0.3
6	1	60	−14	−0.3	−0.9	8	8	6	−16	−0.5	−0.3

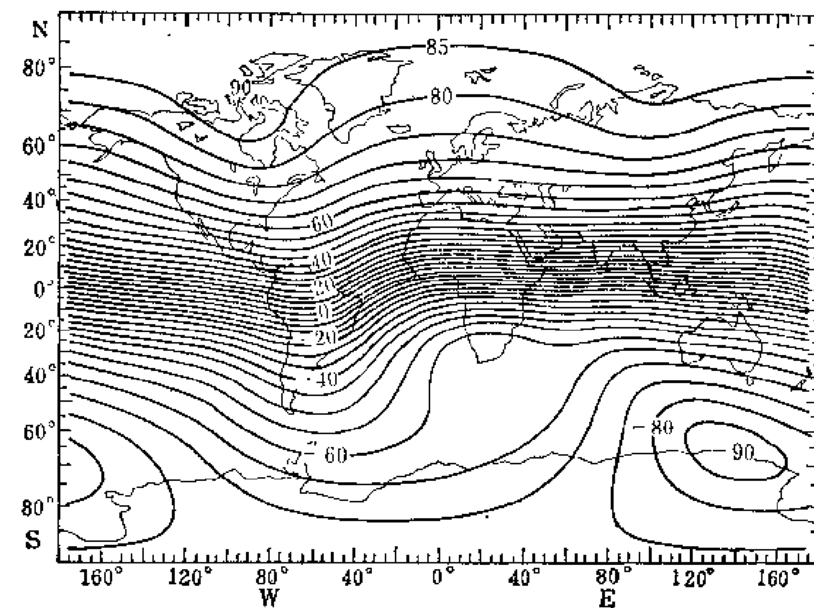
条件。但由于人们占有资料的不同，这种分析结果会有明显的差异。全球性的分析结果是判断区域性和局部地区地磁异常的标准，应能客观地反映全球范围地磁场的基本特征。为此国际地磁和高空物理协会（IAGA）除成立世界地磁测量（WMS）的国际合作机构负责协调各国陆上、海上、航空和卫星测量任务外，还于 1968 年 10 月在华盛顿召开的专


N
80°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
80°
S
0.011
0.1
0.2
0.3
0.413
0.323
0.127
0.2
0.2
0.1
160°
120°
80°
40°
0°
40°
80°
120°
160°
W
E

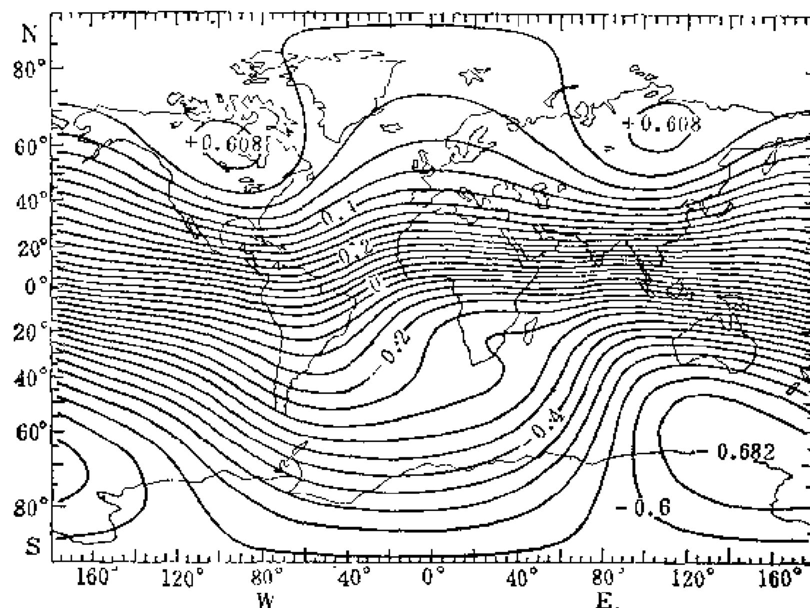
(a)


N
80°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
80°
S
50 E
50 W
10 E
20 W
0
16 W
10 W
0
9E
20 W
10 W
20 E
27 W
10 W
50 W
0
50 E
100 E
160°
120°
80°
40°
0°
40°
80°
120°
160°
W
E

(b)


N
80°
60°
40°
20°
0°
20°
40°
60°
80°
S
85
90
80
60
40
20
0
20
40
60
80
90
160°
120°
80°
40°
0°
40°
80°
120°
160°
W
E

(c)



(d)

图 5.8

门会议上提出并通过了 1965.0 年代的国际地磁参考场（IGRF），做为全世界通用的正常地磁场的标准[5]。1965.0 年代的国际地磁参考场取 $n=8$ 共 80 个高斯系数，表 5.2，由公式(5.131)、(5.132)给出。它的有效期是 1965.0—1975.0，其他年代的高斯系数

$$G_n^m(t) = G_n^m(t_0) + \dot{G}_n^m(t - t_0) \tag{5.133}$$

其中 $t_0 = 1965.0$，$\dot{G}_n^m$ 是高斯系数的年变率，单位为伽玛/年，表 5.2。

表 5.3 是 1975.0 年代国际地磁参考场 80 项高斯系数和年变率的数值。它是国际地磁和高空物理协会（IAGA）在 1975 年 8 月全体会议上通过的，使用期是 1975.0—1980.0[6]。

需要指出，因人们占有资料的不同和资料精度的差异，上述做为地磁正常场标准的地磁场模型也有不同，如 1975.0 年代的模型除 IGRF 外尚有（IGS75）模型和 AWC75 模型[8]，目前各国地磁学家，特别是国际地磁和高空物理协会第一分组，正从资料的选取和方法的改进上致力于完善统一这些模型。

以上关于地磁场的数学表述，把空间分布复杂的地磁场，成功地统一于一个数学解析表达式(5.131)、(5.132)，这对于实际应用和理论计算都是很方便的。但这种抽象的描述不能给出地磁场分布和变化的直观图像，地磁图就是地磁场直观图象的一种好的表示方法。

把第 2 节所述地磁台和已归算到特定时刻的野外测点各地磁要素的数值，标绘于地图上，再把数值相等的点用曲线连起来构成一幅相应要素的等值线图，通常称作地磁图。它包括等偏图（偏角 D），等倾图（倾角 I）和等强度图（X、Y、Z、H、F）。图 5.8(a)—(d) 是水平强度 H，偏角 D，倾角 I，垂直强度 Z 1965.0 年代的世界地磁图。地磁图也可以由高斯系数，按公式(5.132)和(5.96)计算得到相应年代各地地磁要素的数值编绘而成。

表5.3 1975.0年代国际地磁参考场的高斯系数[6]

		基本磁场		长期变化				基本磁场		长期变化	
n	m	$g_n^m(\gamma)$	$h_n^m(\gamma)$	$\dot{g}_n^m$ (γ/年)	$\dot{h}_n^m$ (γ/年)	n	m	$g_n^m(\gamma)$	$h_n^m(\gamma)$	$\dot{g}_n^m$ (γ/年)	$\dot{h}_n^m$ (γ/年)
1	0	−30186		25.6		6	2	15	102	2.0	−0.1
1	1	−2036	5735	10.0	−10.2	6	3	−210	88	2.8	−0.2
2	0	−1898		−24.9		6	4	−1	−43	0.0	−1.3
2	1	2997	−2124	0.7	−3.0	6	5	−8	−9	0.9	0.7
2	2	1551	−37	4.3	−18.9	6	6	−114	−4	−0.1	1.7
3	0	1299		−3.8		7	0	66		0.0	
3	1	−2144	−361	−10.4	6.9	7	1	−57	−68	0.0	−1.4
3	2	1296	249	−4.1	2.5	7	2	−7	−24	0.0	−0.1
3	3	805	−253	−4.2	−5.0	7	3	7	−4	0.6	0.3
4	0	951		−0.2		7	4	−22	11	0.9	0.3
4	1	807	148	−2.0	5.0	7	5	−9	27	0.3	−0.7
4	2	462	−264	−3.9	0.8	7	6	11	−17	0.3	0.1
4	3	−393	39	−2.1	1.7	7	7	−8	−14	−0.5	0.8
4	4	235	−307	−3.1	−1.0	8	0	11		0.2	
5	0	−204		0.3		8	1	13	4	0.3	−0.2
5	1	368	39	−0.7	1.2	8	2	3	−15	0.0	−0.4
5	2	275	142	1.1	2.3	8	3	−12	2	0.2	−0.2
5	3	−20	−147	−1.6	−2.0	8	4	−4	−19	−0.4	0.3
5	4	−161	−99	−0.5	1.3	8	5	6	1	−0.3	0.4
5	5	−38	74	1.0	1.1	8	6	−2	18	0.6	−0.3
6	0	46		0.2		8	7	9	−6	−0.3	−0.6
6	1	57	−23	0.5	0.5	8	8	1	−19	−0.1	0.3

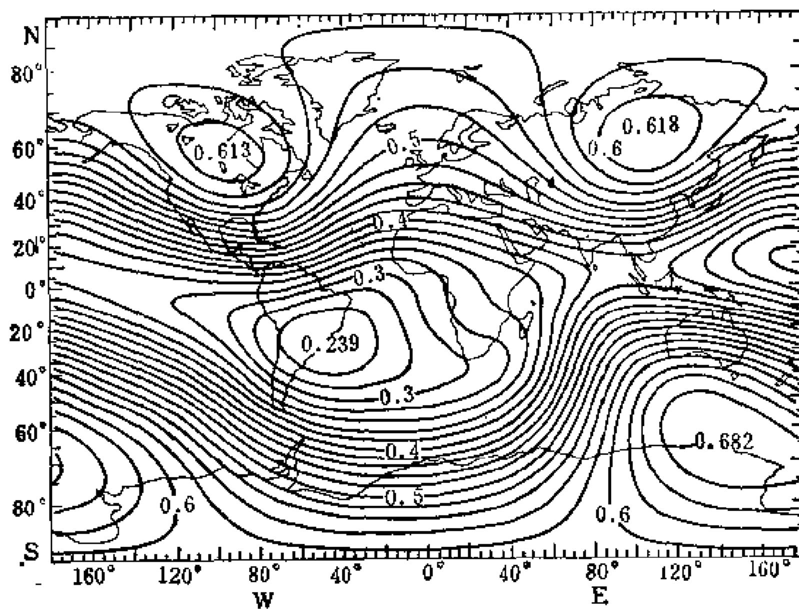


图5.9 1965.0年代国际地磁参考场(F)[6]

图 5.9 是由表 5.3 高斯系数计算编绘的 1965.0 年代的国际地磁参考场总强度 F 等值图。鉴于地磁场有缓慢的长期变化,地磁图一般每 5—10 年编绘一次。

地磁图上倾角为 90°,水平强度为零的点(实际上是一个小的区域(图 5.8(c)))称为磁极 (magnetic pole)。由偏角的定义不难相信,等偏线将汇集于地磁南北极和地理南北极四个点。1965.0 年代的北磁极和南磁极分别位于 74.9°N, 101.0°W; 67.1°S, 142.7°E。

倾角为零的等值线称为磁倾赤道。由各地磁倾角按偶极磁场模式(见第 3 节)

$$\tan\Phi = \frac{1}{2}\tan I \tag{5.134}$$

所计算的纬度 Φ 称为磁倾纬度。

地磁场的球谐分析和地磁图描述了地磁场主要部分的空间分布,以下我们将分述这种空间分布的主要特征。

2. 中心偶极子磁场和地磁坐标

如前所述球谐分析中 $n = 1$ 的项,约占全部磁场的 80—85%,代表了地磁场空间分布的主要特征。由下面的分析可以看出,它相当于一个在地心按一定方位放置、磁矩为 M 的偶极子所产生的磁场,这个偶极子称为"中心偶极子"。这就是通常所说的均匀磁化(总磁化强度为 M)球体的磁场,因为一个均匀磁化的球体与一个中心偶极子在球外所产生的磁场是一样的。

由(5.131),取 $n = 1$,其磁位

$$W = a\left(\frac{a}{r}\right)^2 [g_1^0\cos\theta + g_1^1\sin\theta\cos\lambda + h_1^1\sin\theta\sin\lambda]。\tag{5.135}$$

取如图 5.10 所示坐标系,O 为地心,Oz 与极轴重合指向地理北极,xy 为赤道平面,Ox 指向格林尼治子午圈。考察 O 点一轴向偶极子 M_z 在观测点 P 所产生的磁场,设其磁势为 W_P,

$$W_P = \frac{M_z\cos\theta}{r^2}, \tag{5.136$_1$}$$

与(5.135)比较可得

$$M_z = a^3 g_1^0, \tag{5.137$_1$}$$

因此,(5.135)与 g_1^0 有关的项相当于一个地心轴向偶极子的磁场,其磁矩与 g_1^0 的关系由(5.137$_1$)确定。

设在地心沿赤道平面放置一偶极子 M_E,M_E 与 x 轴的夹角为 λ,则其磁势 W_E 为

$$W_E = \frac{\boldsymbol{M}_E\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{M_x x + M_y y}{r^3},$$

x、y 为观测点 $P(r, \theta, \lambda)$ 的向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分量(图 5.10),由坐标关系

$$x = r\sin\theta\cos\lambda,\quad y = r\sin\theta\sin\lambda,$$

得到

$$W_E = \frac{M_x}{r^2}\sin\theta\cos\lambda + \frac{M_y}{r^2}\sin\theta\sin\lambda, \tag{5.136$_2$}$$

与(5.135)比较可得:

$$M_x = a^3 g_1^1;\quad M_y = a^3 h_1^1。\tag{5.137$_2$}$$

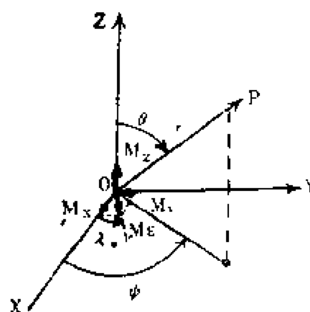


图 5.10

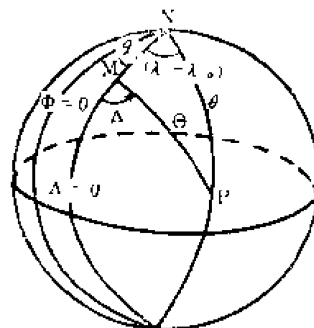


图 5.11

即(5.135)中与 g_1^1 和 h_1^1 有关的项相当于一个在赤道平面放置的中心偶极子的磁场，其偶极子强度与高斯系数的关系由(5.137₂)式确定。

综合(5.136)、(5.137)可以看出，与球谐分析 $n=1$ 相应的磁场(5.135)等效于一个中心偶极子的磁场，偶极子的强度

$$M = a^3[(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{5.138}$$

偶极子的方位 (θ_0, λ_0)

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta_0 &= \frac{[(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2]^{1/2}}{g_1^0}, \\ \tan\lambda_0 &= \frac{h_1^1}{g_1^1}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.139}$$

当由观测值的球谐分析(5.131)、(5.132)确定了高斯系数 g_1^0、g_1^1 和 h_1^1 后，便可由(5.138)和(5.139)计算中心偶极子的强度和方向。由 O 到 (θ_0, λ_0) 的连线叫做磁轴，磁轴与地面的交点叫做地磁极(geomagnetic pole)。必须注意，这里所说的地磁极与第 3 节中由地磁图所定义的磁极(magnetic pole)位置和名称都不相同。由地磁极的定义可知地磁南北极一定是球对称的，磁北极和磁南极则不一定有这种对称性。根据 1965.0 年代国际地磁参考场的高斯系数 g_1^0、g_1^1 和 h_1^1 按(5.139)式计算的地磁极的位置是：地磁北极 78.6°N，69.8°W，位于格陵兰岛，地磁南极 78.6°S，110.2°E，在南极大陆内。

许多与地磁场有关的物理现象不是相对于地理轴而是相对于地磁轴有明显的对称性，这种现象用地磁坐标描述是方便的。地面一点地磁坐标的定义是：观测点的向径 $\boldsymbol{r}$ 与地磁轴的夹角定义为地磁余纬 Θ，过观测点和地磁极的子午面与过地磁极和地理极的子午面的夹角定义为地磁经度 Λ。若已知地磁极 M 的地理坐标 (θ_0, φ_0) 和观测点 P 的地理坐标 (θ, φ)。由图 5.11 所示球面三角形 NMP 可求出 P 点的地磁坐标 (Θ, Λ)，在球面三角形 NMP 中：

$$\overset{\frown}{NM} = \theta_0, \quad \overset{\frown}{NP} = \theta$$

$$\overset{\frown}{MP} = \Theta, \quad \angle MNP = \lambda - \lambda_0$$

$$\angle PMN = 180^\circ - \Lambda$$

由球面三角余弦和正弦定理

$$\left.\begin{aligned} \cos\Theta &= \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\lambda - \lambda_0) \\ \sin\Lambda &= \frac{\sin\theta\sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin\Theta} \end{aligned}\right\} \tag{5.140}$$

便可计算出 P 点的地磁坐标 (Θ, Λ)。这样计算的地磁纬度和由(5.134)式所定义的磁倾纬度不同，磁倾纬度是由实测倾角值计算得到。

和地磁坐标相应可定义地磁时，太阳两次经过观测点所在磁子午面的时间（上中天，下中天）定义为地磁午夜和正午的时间。磁时常用角度表示，即某一时刻太阳所在磁子午面与过观测点的磁子午面的夹角为这一点该时刻的地方磁时。若采用地磁坐标，则(5.135)简化为

$$W(r, \Theta, \Lambda) = a\left(\frac{a}{r}\right)^2 G_1^0 \cos\Theta \tag{5.141}$$

其中 G_1^0 是新坐标系中的高斯系数。由(5.141)可得

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{\partial W}{\partial r} = -2\left(\frac{a}{r}\right)^3 G_1^0 \cos\Theta, \\ X &= \frac{\partial W}{r\partial\Theta} = -\left(\frac{a}{r}\right)^3 G_1^0 \sin\Theta, \\ Y &= \frac{-\partial W}{r\sin\Theta\partial\Lambda} = 0。\end{aligned}\right\} \tag{5.142}$$

其中 X、Y 为磁北、磁东分量。由(5.142)即可得到(5.134)式。(5.134)是偶极子磁场的重要关系式，它在古地磁学的研究中有重要应用。

3. 非偶极子磁场和偏心偶极子

地磁场除去与 $n=1$ 项相联系的中心偶极子的磁场后，剩下部分称为非偶极子磁场。非偶极磁场约占总磁场的 10—20%，图 5.12 是 1965.0 年代的非偶极子磁场图，它是间隔为 2000 伽ㄇ的垂直强度 (Z) 等值线图，图上同时用水平箭头的长度和方向标出水平强度 (H) 的大小和方向。图 (5.12) 表明，地磁非偶极子磁场有几个正负中心，其中以亚洲（中国北部和蒙古）、非洲和南极大陆的中心最为明显。

中心偶极子磁场做为地磁场的近似描述是成功的，这种近似对于与地磁有关的物理现象的理论研究和计算都是方便的。为提高这种描述的近似程度，施密特和巴特尔斯 (Bartels) 提出了偏心偶极子的描述方法。所谓偏心偶极子是指强度和方向与中心偶极子相同，但偏离地心放置的偶极子，从以下证明将会看到，这样的偶极子所产生的磁场，在地心球极坐标系中，$n=1$ 的项与中心偶极子完全相同，而 $n=2$ 项的高斯系数与偶极子的位置有关。偏心偶极子的位置是这样确定的，使得它的 $n=2$ 项的高斯系数与地磁场 $n=2$ 阶高斯系数的差的平方和为最小。

如图 5.13a 所示，设 O 为地心，Oz 为地球自转轴，xy 为赤道平面，Ox, Oy 为 $\lambda=0$, $\lambda=90°$ 的方向，$O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ 与 Ox, Oy, Oz 平行，观测点 P 在两个坐标系中的坐标分别为 $P(r, \theta, \lambda)$, $P(x, y, z)$ 和 $P(r', \theta', \lambda')$, $P(x', y', z')$, O' 点的坐标为 $(r_0, \theta_0, \lambda_0)$ 或 (x_0, y_0, z_0)。若将一偶极子放于 O'，其强度和方向与(5.138)(5.139)所定义的中心偶极子相同。由(5.138)和(5.139)不难看出，这样的偶极子所产生的磁势在以 O' 为中心的球极坐标系中的表达式为：

$$W(r', \theta', \lambda') = a\left(\frac{a}{r'}\right)^2 [g_1^0\cos\theta' + g_1^1\sin\theta'\cos\lambda' + h_1^1\sin\theta'\sin\lambda'], \tag{5.143}$$

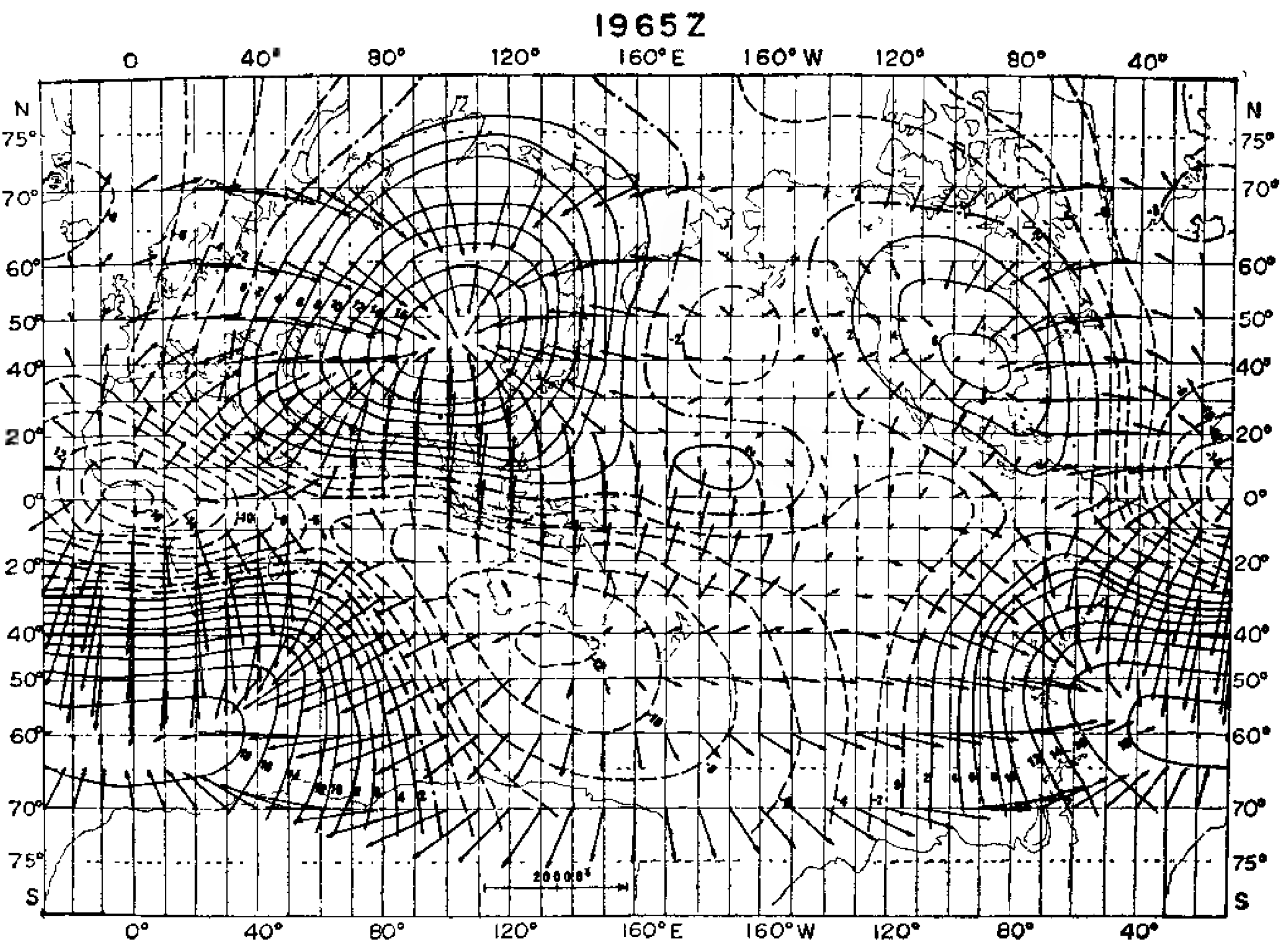


图 5.12　1965.0 年代的非偶极子磁场[10]

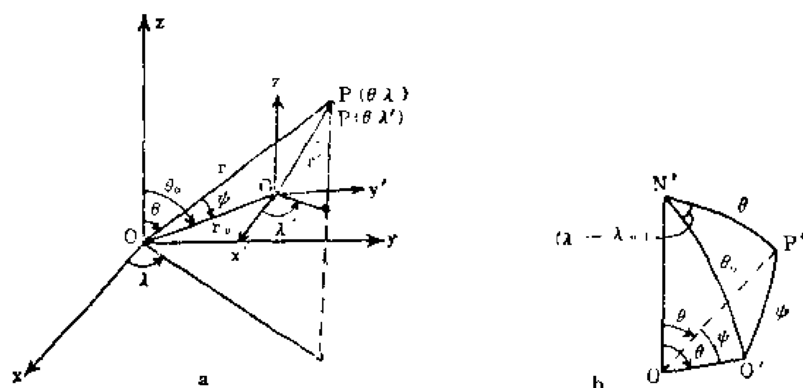


图 5.13

由关系式：

$$x' = x - x_0,\quad y' = y - y_0,\quad z' = z - z_0,$$

将(5.143)改写为：

$$W = \left(\frac{a}{r'}\right)^3 [(g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y) - (g_1^0 z_0 + g_1^1 x_0 + h_1^1 y_0)], \tag{5.144}$$

由图(5.13)不难得出：

$$r'^2 = r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\phi,$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)\cos\phi\right] + \cdots\right\}, \tag{5.145}$$

代(5.145)到(5.143)，则场势W在球极坐标系 (r', θ', λ') 的表达式 (5.143) 将转换到球极坐标系 (r, θ, λ)，

$$W(r, \theta, \lambda) = a\left(\frac{a}{r}\right)^2 [g_1^0 \cos\theta + g_1^1 \sin\theta\cos\lambda + h_1^1 \sin\theta\sin\lambda]$$

$$+ \left(\frac{a}{r}\right)^3 [- g_1^0 z_0 + g_1^1 x_0 + h_1^1 y_0] + 3 r_0 \cos\phi [g_1^0 \cos\theta +$$

$$g_1^1 \sin\theta\cos\lambda + h_1^1 \sin\theta\sin\lambda] + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \tag{5.146}$$

其中 $O\left(\frac{1}{r^4}\right)$ 代表阶数 $n \geqslant 4$ 的其余各项。由 (5.146) 看出，中心偶极子沿经向平移后与 $\frac{1}{r^2}$ 相应的偶极项确实不变，与(5.135)所示地磁中心偶极子的场完全相同。这就证明了本节开始所说偏心偶极子的第一个论断：强度和方向与中心偶极子相同，但偏离地心放置的偶极子在地心坐标系中 $n = 1$ 的项与中心偶极子的场完全相同。

下面由与 $\frac{1}{r^3}$ 有关的项来确定偏心偶极子的坐标。将北极N和观测点P投影到以O为球心以 r_0 为半径的球面上，相应投影点为 N'，P'，由球面三角 $O'N'P'$ (图 5.13b) 可以得出：

$$\cos\phi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\lambda - \lambda_0),$$

$$r_0\cos\phi = z_0\cos\theta + x_0\sin\theta\cos\lambda + y_0\sin\theta\sin\lambda, \tag{5.147}$$

将(5.147)代入(5.146)，并将(5.146)中与 $\frac{1}{r^3}$ 有关的项记作 W_3，

$$W_2(r,\theta,\lambda)=\left(\frac{a}{r}\right)^3(A_0+A_1\cos 2\theta+A_2\sin 2\theta\cos\lambda+A_3\sin 2\theta\sin\lambda$$
$$+A_4\sin^2\theta\cos 2\lambda+A_5\sin^2\theta\sin 2\lambda),\tag{5.148}$$

其中 A_i 为与 x_0、y_0、z_0 和 g_1^0, g_1^1, h_1^1 有关的常系数，

$$\left.\begin{aligned}
&A_0=\frac{1}{2}g_1^0z_0-\frac{1}{4}g_1^1x_0-\frac{1}{4}h_1^1y_0,\\
&A_1=3A_0,\quad A_2=\frac{3}{2}(g_1^0x_0+g_1^1z_0),\\
&A_3=\frac{3}{2}(g_1^0y_0+h_1^1z_0),\quad A_4=\frac{3}{2}(g_1^1x_0-h_1^1y_0),\\
&A_5=\frac{3}{2}(g_1^1y_0+h_1^1x_0)。
\end{aligned}\right\}\tag{5.149}$$

进一步由二阶连带勒让德函数

$$\left.\begin{aligned}
&P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)\\
&P_2^1(\cos\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\\
&P_2^2(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta
\end{aligned}\right\},\tag{5.150}$$

将(5.148)改写为球函数形式

$$W_2=a\left(\frac{a}{r}\right)^3[g_2'^0P_2(\cos\theta)+g_2'^1\cos\lambda P_2^1(\cos\theta)+h_2'^1\sin\lambda P_2^1(\cos\theta)$$
$$+g_2'^2\cos 2\lambda P_2^2(\cos\theta)+h_2'^2\sin 2\lambda P_2^2(\cos\theta)]。\tag{5.151}$$

其中

$$ag_2'^0=4A_0,\quad ag_2'^1=\frac{2}{\sqrt{3}}A_2,\quad ag_2'^2=\frac{2}{\sqrt{3}}A_4$$
$$ah_2^1=\frac{2}{\sqrt{3}}A_3,\quad ah_2'^2=\frac{2}{\sqrt{3}}A_5。\tag{5.152}$$

在地磁场球谐函数表达式(5.131)中，$n=2$ 的高斯系数为 g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2 和 h_2^2。为使偏心偶极子磁场尽可能与(5.131)中 $n=1$, 2 的场相近，上面已经证明 $n=1$ 的场是完全相同的，那么必须使(5.151) W_2 的系数与(5.131)中 $n=2$ 的相应高斯系数的差的平方和为最小，即

$$\Sigma_{G_1}=(g_2^0-g_2'^0)^2+(g_2^1-g_2'^1)^2+(g_2^2-g_2'^2)^2+(h_2^1-h_2'^1)^2+(h_2^2-h_2'^2)^2\tag{5.153}$$

为最小。由(5.153)为最小的条件便可确定偏心偶极子的坐标：

$$\left.\begin{aligned}
&x_0=a(L_1-g_1^1E)/3H_0^2\\
&y_0=a(L_2-h_1^1E)/3H_0^2\\
&z_0=a(L_3-g_1^0E)/3H_0^2
\end{aligned}\right\},\tag{5.154}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&H_0^2=(g_1^0)^2+(g_1^1)^2+(h_1^1)^2\\
&L_0=2g_1^0g_2^0+\sqrt{3}(g_1^1g_2^1+h_1^1h_2^1)\\
&L_1=-g_1^1g_2^0+\sqrt{3}(g_1^0g_2^1+g_1^1g_2^2+h_1^1h_2^2)\\
&L_2=-h_1^1g_2^0+\sqrt{3}(g_1^0h_2^1-h_1^1g_2^2+g_1^1h_2^2)
\end{aligned}\right\}\tag{5.155}$$

$$E = (L_0 g_1^0 + L_1 g_1^1 + L_2 h_1^1)/4H_0^2$$

根据1955.0年代地磁资料求得偏心偶极子的位置为 15°41′N，150°49′E，离开地心的距离 $r_0 = 436$ 公里。

除偶极项和 W_2 外，(5.146) 中还有高阶项 $O\left(\frac{1}{r^4}\right)$。由(5.145)和(5.144)不难看出，这些高阶项中都含有 $\left(\frac{r_0}{r}\right)^n$ $(n \geqslant 2)$ 的因子，当偏心偶极子的位置 $r_0 \ll r$ 时，(5.146) 中 $O\left(\frac{1}{r^4}\right)$ 与 $n = 1$、2 项相比为高阶小量，因此可以忽略。

图 5.14 给出了中心偶极子和偏心偶极子地面磁场的比较。

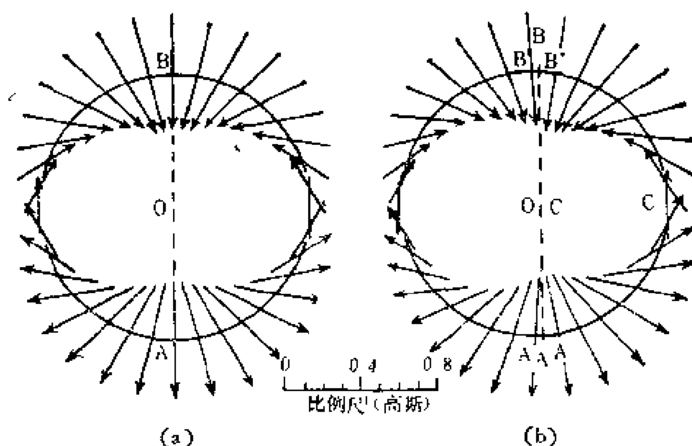


图 5.14 中心(a)和偏心(b)偶极子地面磁场的分布

（二）基本磁场的长期变化

观测和分析都表明地球基本磁场随时间有缓慢的变化。这种变化称为地磁场的长期变化，以伽玛/年（γ/年）表示。地磁场长期变化的时空规律是追踪地球内部物质运动的重要线索，是固体地球物理中的一个重要课题。由于长期变化具有全球性的统一特征，一般认为它是来源于地核内部或核幔边界。地磁长期变化的全球性主要特征是偶极子磁矩的衰减，非偶极子磁场的西向漂移和长期变化场自身的西向漂移。

1. 长期变化现象

最早长期变化现象较为系统的记录是伦敦的偏角变化。图 5.15 同时绘出了伦敦和非洲南端希望峰偏角的变化，两者有类似的趋势，300 年间变化达几十度之多，继发现偏角变化之后，也发现其他地磁要素有性质类似的长趋势变化。

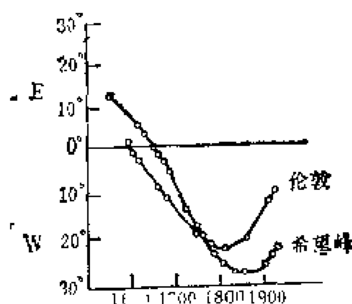


图 5.15 伦敦和希望峰偏角随时间的变化[7]

表5.4 不同年代地磁场高斯系数的年变率[7]

n	m	1902—20		1910—15		1920—25		1930—35		1940—45		1955		1958.5		1960		1965		IGRF 1965		IGRF 1975	
		g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m	g_n^m	h_n^m
1	0	42		25		28		23		9		10.0		13.6		18.9		15.3		15.3		25.6	
1	1	−9	12	1	−7	4	−7	1	−5	2	1	10.0	0.0	5.9	2.3	7.3	−1.9	8.3	0.6	8.7	−2.3	10.0	−10.2
2	0	−7		−7		−10		−14		−18		−20.5		−21.5		−24.8		−26.6		−24.4		−24.9	
2	1	8	−25	−1	−9	1	−14	1	−18	0	−20	0.0	−16.5	−1.8	−16.0	−0.8	−14.0	−1.3	−11.4	0.3	−11.8	0.7	−3.0
2	2	13	−8	24	−17	17	−17	10	−14	2	−14	0.0	−13.0	−0.1	−17.1	0.8	−17.7	1.3	−18.2	−1.6	−16.7	4.3	−18.9
3	0			7		4		2		6		−0.7		1.9		−0.4		0.0		0.2		−3.8	
3	1			−7	−6	−7	−5	7	−5	0	−1	−12.7	7.3	−8.2	8.2	−10.5	1.9	−9.5	3.2	−10.8	4.2	−10.4	6.9
3	2			−1	3	−2	3	1	4	3	4	1.3	4.0	1.1	3.5	3.4	4.0	−1.9	1.6	0.7	0.7	4.1	2.5
3	3			13	−11	7	−11	3	−13	0	−10	−2.3	−10.0	−0.5	−6.7	−1.9	−9.0	−0.6	−8.5	−3.8	−7.7	−4.2	−5.0
4	0											1.8				0.8		0.6		−0.7		−0.2	
4	1											3.0	−2.5	2.7	0.0	5.4	−0.9	1.0	3.0	0.2	−0.1	−2.0	5.0
4	2											−3.3	−2.0	2.0	−1.1	−1.9	−1.7	−2.2	−0.7	−3.0	1.6	−3.9	0.8
4	3											1.0	1.5	1.0	3.5	−0.2	3.2	0.2	2.7	−0.1	2.9	−2.1	1.7
4	4											1.3	−6.0	2.2	−2.1	0.8	−5.5	−3.0	−2.7	−2.1	−4.2	−3.1	−1.0
5	0											−1.6		2.1		3.5		0.8		1.9		0.3	
5	1											0.2	5.2	1.8	1.8	−0.7	1.8	0.4	1.9	1.1	2.3	−0.7	1.2
5	2											2.8	1.2	0.2	1.7	2.5	2.9	1.6	2.3	2.9	1.7	1.1	2.3
5	3											0.2	−2.6	1.0	3.8	0.6	−0.8	−0.3	−1.8	0.6	−2.4	−1.6	−2.0
5	4											−1.0	1.6	0.5	0.7	0.0	−0.4	−1.1	1.4	0.0	0.8	−0.5	1.3
5	5											0.4	0.4	0.2	0.2	1.6	−0.2	1.7	0.5	1.3	−0.3	1.0	1.1
6	0											0.2		1.7				0.0		−0.1		0.2	
6	1											1.0	3.3	2.1	−0.7			−0.5	−2.2	−0.3	[illegible]	0.5	−0.5
6	2											1.2	−0.8	0.1	−0.2			1.8	0.2	1.1	−0.4	2.0	−0.1
6	3											1.0	2.0	−0.2	1.5			1.4	0.9	1.9	2.0	2.8	−0.2
6	4											−0.5	−1.7	1.5	−1.1			0.6	−2.1	−0.4	−1.1	0.0	−1.3
6	5											0.2	2.5	0.5	0.7			0.2	−0.1	−0.4	0.1	0.9	0.7
6	6											−1.7	0.0	−0.6	1.0			−2.2	0.2	−0.2	0.9	−0.1	1.7

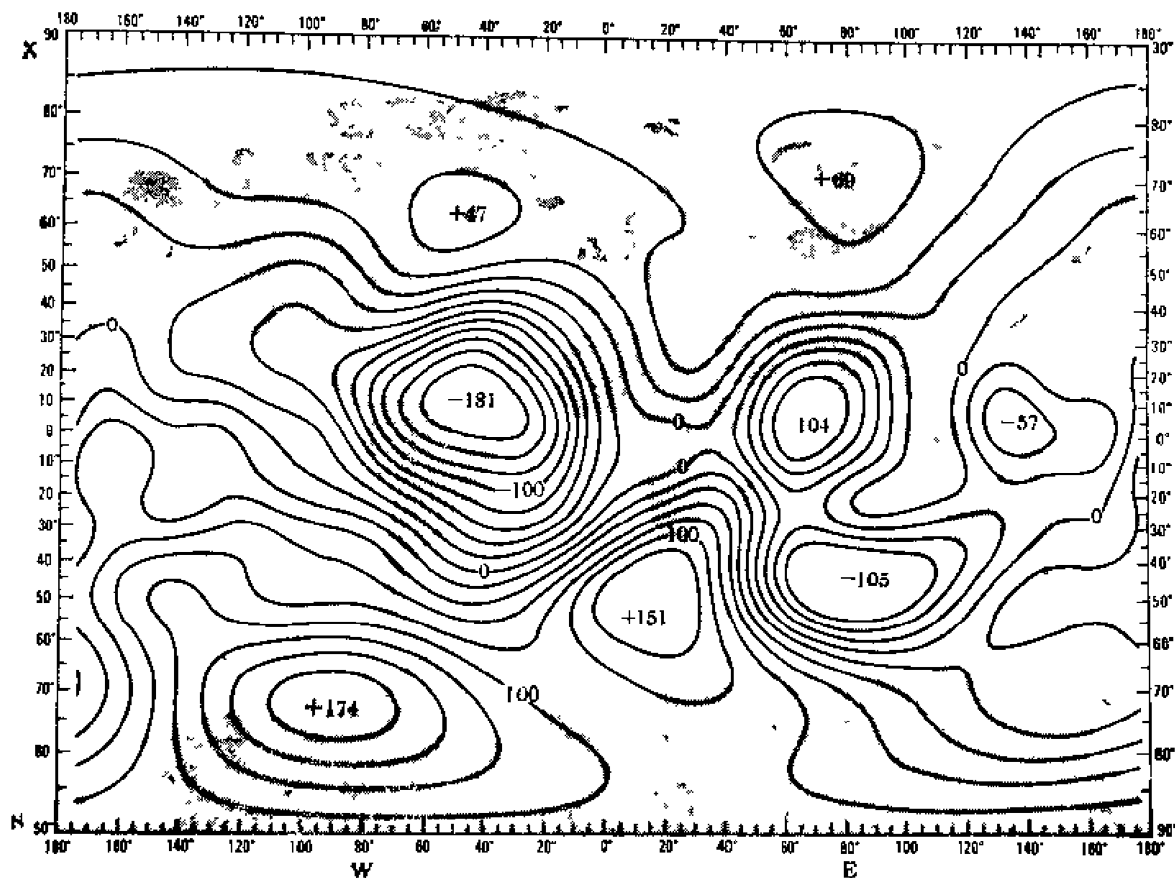


图 5.16　1965.0 年代 Z 长期变化等值线图（Z 为等值线，单位 γ/年）[9]

和地磁图一样，也可以把各要素长期变化的等值线绘于地图上，图 5.16 为 1965.0 年代垂直分量（Z）长期变化等值图，由图 5.16 看出，地磁长期变化有几个变化较大的中心，例如：在大西洋赤道附近的中心可达 -180γ/年，南极大陆有同等强度的正的长期变化；同时还可以看到，在太平洋中部长期变化很小的事实。从不同年代长期变化地磁图的比较还发现，长期变化中心有缓慢向西移动的趋势，其平均移动趋势约为 0.3°/年。

在本章第二节中已经指出，上述长期变化的事实也将反映在不同年代地磁场球谐分析高斯系数的变化上。这种高斯系数随时间的变化可以由不同年代高斯系数的比较得出，但由全球地磁测量按公式(5.132)计算得到的高斯系数 g_n^m、h_n^m 会受到具体测点局部磁异常和局部干扰的影响，不难了解，这种影响将会带到由不同年代高斯系数的比较所确定的时间变化率 $\dot{g}_n^m$、$\dot{h}_n^m$ 中去，因此通常不采用这种直接比较方法，而是首先计算出各测点地磁要素的长期变化，然后由全球地磁长期变化（图 5.16）的球谐分析求得相应的球谐系数。第二节的表 5.3 所列 1965.0 和 1975.0 年代高斯系数的年变率就是这种球谐分析的结果。为了解不同年代长期变化的全貌，表 4 同时给出了各年代不同作者所得 $n \leqslant 6$ 阶高斯系数的年变率。由表 5.4 不难看出，与基本磁场不同，长期变化的球谐系数 $\dot{g}_2^1$ 和 $\dot{h}_2^1$ 项最为显著，其收敛性也不像基本磁场那样迅速。

2. 偶极子磁矩的衰减

根据不同年代地磁场球谐分析 $n=1$ 阶的高斯系数，由公式(5.138)可以算出各年代

表 5.5　不同年代的地磁场偶极矩

作　　者	年　　代	偶极矩(10^{25}高斯·厘米^3)
Erman & Petersen	1829	8.45
Gauss	1835	8.56
Adams	1845	8.49
Adams	1880	8.36
Schmidt	1885	8.35
Fritsche	1885	8.34
Neumeyer & Petersen	1885	8.33
Cain & Hendricks	1900	8.30
Cain & Hendricks	1920	8.20
Dyson & Furner	1922	8.17
Cain & Hendricks	1940	8.10
Jones & Melotte	1942	8.01
Afanasieva	1945	8.01
Vestine and Others	1945	8.07
Finch & Leaton	1955	8.06
Cain & Hendricks	1960	8.02
Hurwitz and Others	1965	8.00
Leaton and Others	1965	8.00

的偶极子的磁矩。其结果列于表 5.5 和图 5.17。

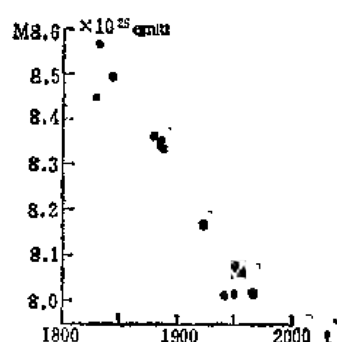


图 5.17　地球磁偶极矩随时间的变化[7,84,33]

由表 5.5 和图 5.17 清楚地看到，近百余年来地磁偶极矩一直是单调衰减，其衰减速率 100 年可达 5%，若假定这种衰减趋势今后一直维持的话，大约 2000 年后，偶极子磁场即将消失，然而古地磁学的研究得出，这种衰减速度并不是不变的，特别重要的事实是在约 2000 年之前它是上升的。

3. 非偶极子磁场的西向漂移和偏心偶极子的移动

早在 17 世纪英国天文学家哈利 (E. Halley) 在分析地磁偏角的变化时就曾指出，地磁场的分布图形有缓慢向西移动的事实。但西向漂移比较系统的研究却是在本世纪五十年代开始的[11][12][13][14][15]。分析结果表明，西向漂移的主要成分是非偶极子磁场。

与流体中的物理场相似，地磁场的时间变化包括测点场的时间变化率和场的空间运动两个部份。若以 X_i 表示磁场的各分量或磁位，则有

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)X_i。 \tag{5.156}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 即为场的运动速度，$\boldsymbol{u}$ 沿纬圈的分量，$-u_\lambda$ 即为西向漂移速度。倘若假定西向漂移是非偶极子磁场长期变化的主要部份，则按(5.156)可由观测资料确定西向漂移速度。

将公式(5.131)改写为：

$$\left.\begin{aligned} W &= a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p_n^m(\cos\theta)G_n^m\cos m(\lambda+\lambda_n^m), \\ (G_n^m)^2 &= (g_n^m)^2+(h_n^m)^2, \quad \tan m\lambda_n^m = \frac{-h_n^m}{g_n^m}。\end{aligned}\right\} \tag{5.157}$$

因只考虑非偶极子磁场，计算中应除去 $n=1$ 项。(5.157) 中相位角 λ_n^m 随时间的变化 $\frac{\partial \lambda_n^m}{\partial t}$，即为高斯分析中相应各阶磁场的西向漂移速度。进一步，为研究不同纬度非偶极磁场的西向漂移，可将同一纬度不同经度处的非偶极磁场做关于经度 λ 的傅氏分析，即

$$W=\Sigma C_m \cos(\lambda+\lambda_m), \tag{5.158}$$

同样 $\frac{\partial \lambda_m}{\partial t}$ 即为该纬度非偶极子磁场的西向漂移速度。(5.158)中傅氏系数 C_m 和 λ_m 与高斯系数的关系为：

$$\left.\begin{aligned}(C_m)^2 &= \left[\sum_{n=m}^{\infty} g_n^m P_n^m(\cos\theta)\right]^2+\left[\sum_{n=m}^{\infty} h_n^m P_n^m(\cos\theta)\right]^2 \\ \tan m\lambda_m &= -\left[\sum_{n=m}^{\infty} h_n^m P_n^m(\cos\theta)\right]\Big/\left[\sum_{n=m}^{\infty} g_n^m P_n^m(\cos\theta)\right]\end{aligned}\right\}, \tag{5.159}$$

行武毅[12] 利用 (5.159) 研究了 1829—1955 年间 λ_m 的平均变化，其结果列于表 5.6。由表 5.6 看出 $\frac{\partial \lambda_m}{\partial t}$ 取正值，这意味着磁场确实向西漂移，$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}$ 的平均值为 0.224°/年。若上述计算中不除去偶极子磁场(与轴向偶极子无关)，则 $\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}$ 的平均值仅为 0.062°/年。这说明地磁场的西向漂移中，非偶极子磁场确实是主要的。

表 5.6 不同纬度 λ_m 随时间的变化率[14] (度/年)

纬 度	$\partial\lambda_1/\partial t$	$\partial\lambda_2/\partial t$	$\partial\lambda_3/\partial t$
80°N	0.097	0.000	−0.012
60	0.275	0.050	−0.060
40	0.370	0.115	−0.384
20	0.318	0.216	0.295
0	0.075	0.339	0.250
20	0.391	0.580	0.230
40	0.168	0.970	0.188
60	0 146	1.11	0.165
80S	0.180	1.10	0.148

按西向漂移的意义，由场的时间变化率和经度变化率亦可求得西向漂移速度 u，计算公式为：

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial W}{\partial t}-u\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right]^2 d\lambda = \text{极小}, \tag{5.160}$$

$$\int_0^{t}\left[\frac{\partial H_P}{\partial t}-u\frac{\partial H_P}{\partial \lambda}\right]^2 dt = \text{极小}。 \tag{5.161}$$

由(5.160)(5.161)取极小值的条件，便可确定漂移速度 u。(5.160)要求已知同一纬度圈各处的磁位 W 及其时间变化率，它决定了同一纬度不同经度各测点的平均漂移速度；(5.161) 是已知某观测点 P 的时间变化率和经度变化率，求得 P 点漂移速度 u 的时间平均值。前者不能显示漂移速度的经度差异，后者不能反映漂移速度的时间变化。行武毅[12] 利用(5.160)和(5.161)式计算所得西向漂移速度分别列于表 5.7 和表 5.8。

由表 5.6—5.8 我们看到，用不同方法求得的结果，其漂移速度都接近 0.2°/年。这种结果支持非偶极子磁场整体向西漂移的论断。从西向漂移的定义和相应计算公式不难了

表 5.7 由(5.160)式计算的漂移速度 u(度/年)[12]

纬　度	1922.5	1942.5	1957.5
80°N	0.345	0.176	0.115
60N	0.187	0.093	0.200
40N	0.154	0.099	0.266
20N	0.236	0.188	0.275
0	0.353	0.196	0.208
20S	0.402	0.210	0.272
40S	0.145	0.243	0.226
60S	0.092	0.205	0.228
80S	0.075	0.181	0.246
平 均	0.221	0.180	0.226

表 5.8 34 个台站不同要素西向漂移速度的平均值[12]

地　磁　要　素	漂 移 速 度 u (度/年)
X	0.125±0.016
Y	0.192±0.006
Z	0.236±0.013

解,不管怎样,在一定条件下的漂移速度总是可以计算的,问题的关键在于,这样计算的漂移速度有意义,必须是在空间上具有整体的规律性,在时间上有一定的持续性。关于后者因地磁场全球可靠的记录时间不长,已有的分析结果还难以断言。而空间整体的规律性,虽然如上所述平均漂移速度都接近 0.2°/年,但不同纬度分散较大,且没有显示任何明显的规律性(表 5.6, 5.7),表 5.8 所得平均结果中原各测点的漂移速度分散可达 0.1°—0.4°,特别还存在少数测点有完全相反的漂移趋势。因此尽管目前多数学者都相信地磁场有西向漂移的趋势,但仍有人认为它并没有什么实质意义[15][22]。我们在了解上述计算结果时必须充分注意到这种现实。

上述事实也在非偶极子磁场的地磁图上反映出来。我们在前面已经指出,非偶极子磁场存在几个强度较大的正负中心(图 5.12)。行武毅等人[11]追踪这些中心的动向发现,有的中心呈现出西向漂移,而有的却没有明显的变位。图 5.18 是非洲负中心和蒙古正中心的位置和强度随时间的变化。图 5.18 显示出,非洲中心位置以大约 0.28°/年的速度向西移动,在 350 年间强度变化了 50%。但蒙古中心虽然强度有显著增强,但中心位置似乎没有变化,此外位于太平洋的两个正负中心也没有显示出明显的变位。

是非偶极子磁场西向漂移并无全球性特征,还是这种特征被其他因素所掩盖,或者需要重新探索地磁长期变化的规律性,这正是地磁长期变化研究所面临的课题。行武毅(T. Yukutake)假定,地磁场除去球谐分析中 $m=0$ 的各项后,其余成分可区分为停滞部分和移动部分[17]。他认为上述关于漂移速度在不同地区的差异是由于被磁场停滞部分掩盖的结果。

最后需要指出,无论是上述的偶极矩的衰减部分,还是非偶极场的西向漂移,都不能包括长期变化相当显著的高斯系数 g_2^0 的变化。由图 5.19 看出,g_2^0 取负号,绝对值在继续增大,150 年间增加了 2000 余伽码。

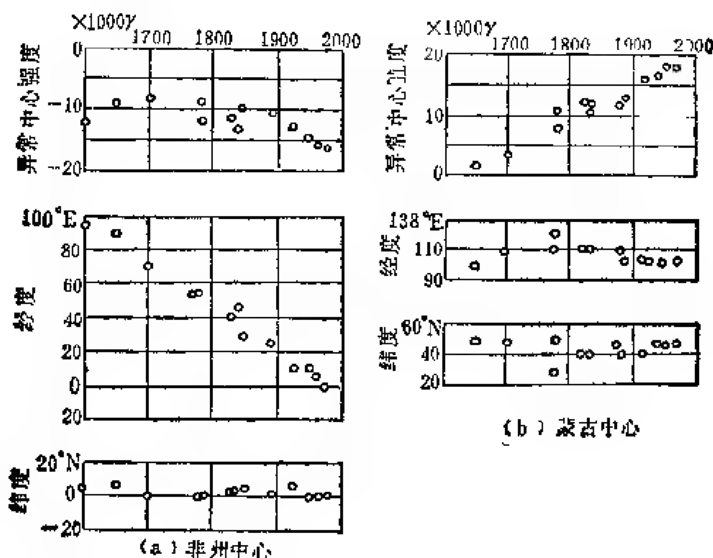


图 5.18　非洲和蒙古中心位置和强度的变化

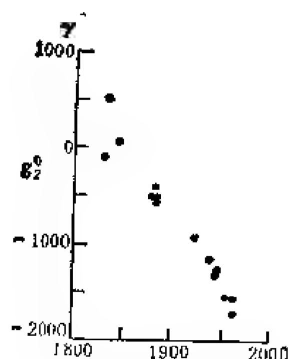


图 5.19　高斯系数 g_2^0 的时间变化[7]

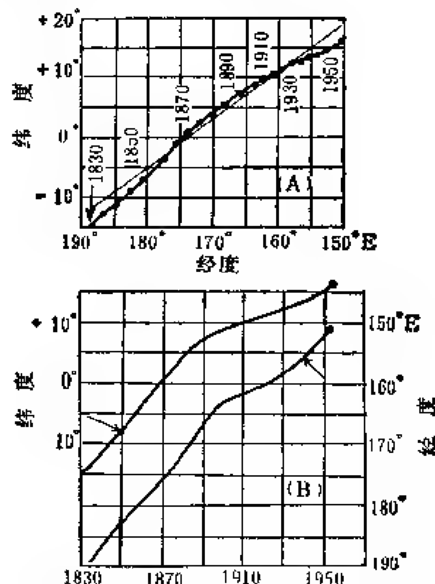


图 5.20　偏心偶极子的移动[7]

魏斯汀 (E.H. Vestine)[19] 研究了偏心偶极子的长期变化，发现它有向北、向西移动的趋势，西向漂移速度约为 0.29°/年，北向速度约为 0.2°/年。但很显然偏心偶极子的移动与上述非偶极子磁场的漂移和 g_2^0 的变化之间并不是相互独立的成分，而是不同方式的一种描述而已。偏心偶极子的移动绘于图 5.20。魏斯汀 (Vestine) 还提出，长期变化与地球转速的变化有关[18][19]，但有人对此持怀疑态度[20]，行武毅则认为只有地球偶极子强度的变化才与地球转速相关[21]。

四、地球的变化磁场

除稳定的基本磁场及其缓慢的长期变化外，地磁场还存在各种类型的短期变化，叫作

地球的变化磁场。与基本磁场不同，变化磁场主要来源于地球外部。在地球表面这种变化磁场比起基本磁场要小得多，通常约为万分之几到千分之几，偶尔可达百分之几。变化磁场在地面上的数量虽小，但由于它来源于高空，因此其空间分布和时间变化能够反映高空各种电磁过程，对于研究高空物理现象，空间介质的性质和运动状态是很重要的。正如本章开始所说，地球变化磁场和空间电磁过程的关系，是地磁学迅速发展的一个分支领域，构成了空间物理的部分研究内容。

变化磁场包括非常复杂的多种类型。根据出现时间的特点可以划分为平静变化和干扰变化两类。平静变化是指时间上连续存在的周期性变化，它包括太阳静日变化（S_q）和太阴日变化（L）；所谓干扰变化是偶尔出现，持续时间有长有短各类变化的总称，它包括太阳扰日变化（S_D），磁暴场（D），钩扰（C_r）和地磁脉动 P。磁暴场（D）又可区分为暴时变化（D_{st}），暴时扰日变化（D_s），和极区亚暴（D_p）。其中 D_p 在中低纬度又称为湾扰（B），暴时日变化（D_s）是通常扰日变化（S_D）在磁暴时的特殊形式。以上各种变化除静日变化 S_q，太阴日变化 L，湾扰 B 和钩扰 C_r 与地方时有关外，其余变化场都与世界时有关，在全球各地依照同一的时间规律发生和演变。以上各类变化场 δH 的分类可概括为

$$\delta H = \delta H_q + \delta H_D, \qquad \delta H_q = S_q + L$$

$$\delta H_D = S_D + D + C_r + P, \quad D = D_{st} + D_s + D_p\ (\text{或 } B)$$

变化磁场的产生与太阳活动有关。太阳活动又有粒子辐射和光辐射之分。按着这种辐射源的不同，地磁学中又常将变化磁场分为“K”变化和非“K”变化两类。所谓K变化，是指由于太阳辐射的高速等离子体到达地球与地磁场相互作用而产生的变化磁场；而非“K”变化则是由于太阳紫外辐射使高空大气电离，这种电离的大气在地磁场中运动所产生的附加磁场。除太阳静日变化，太阴日变化和钩扰是非“K”一类变化外，其余均为“K”变化。

从上述简要叙述已经可以看出，各种变化磁场不仅来源各异，其时间和空间变化规律也是相当复杂的。详细叙述各种变化的规律和理论远远超出了本书的限度。下面仅对其中较为重要的类型和概念，诸如地磁指数，太阳日变化，磁暴和磁亚暴等分段逐一介绍。

（一）地磁指数，国际磁静日和磁扰日

既然地磁场存在有干扰变化，那末“干扰程度”的度量标准在地磁学中就应是必不可少的了。地磁场的干扰与太阳活动有关。这种干扰程度与太阳活动的统计相关性是日地关系研究的重要内容，也是探讨干扰的具体太阳活动源的向导。诚然，直接用磁场的度量标准做这种干扰程度的量度来进行上述统计相关也未尝不可。但很显然，由于干扰在地磁场中的表现千差万别，具体磁场数值的罗列很难直观反映这种干扰程度，在统计计算中也是不方便的。为此国际地磁和高空物理协会（IAGA）及其前身国际地磁和地电协会（IAME）规定了各种地磁指数作为地磁干扰程度的度量标准。这种地磁指数不下十多种，鉴于地磁指数概念在地磁学中经常遇到，是建立地磁静扰日的基础，在这里就其中常用的几个做简要介绍。

1. 磁情记数 C 和 C_i

磁情记数 C 是逐日静扰情况的量度，以 0、1、2 三个数字表示干扰程度。对于每个地磁台由世界时 0^h 至 24^h，即一个整世界日的地磁记录，凭经验作出判断：若干扰程度适中，处于该地的平均状态，C 记做“1”，平静记做“0”，干扰强则记做“2”。磁情记数 C 虽然粗糙，但却是干扰程度一种方便而迅速的量度。

各个国际合作台站把所得磁情记数 C 迅速寄往荷兰德俾尔（De Bilt）中心台，然后将各台 C 取算术平均并保留一位小数，这样得到的指数称为国际磁情记数，用 C_i 表示。C_i 由 0 到 2 共 21 个等级，表示各世界日全球扰动的程度。

2. 磁情指数 K 和行星性指数 K_p

对于小于一天的各不同时段扰动程度的区分，磁情记数 C 和 C_i 是无能为力的。因此国际地磁和地电协会于 1939 年又确定了新的磁情指数 K。与凭经验选取的指数 C 不同，磁情指数 K 是太阳粒子辐射引起地磁扰动程度的一种较为精确的量度。K 的标度为从 0 至 9 的所有整数，共 10 级，每一级对应一定的干扰幅度 R。将各台一个世界日水平强度的磁照图按每三小时一个时段划分 8 段，消去非 K 变化 S_q 和 C_r 后，按每时段的扰动幅度 R 求得对应的指数 K。由于扰动幅度 R 随纬度有显著差异，而指数 K 是同一扰动源的客观量度，因此不同纬度的台站，幅度 R 与 K 的对应有不同的标度。关于各台对应标度的选取，老的台站是由 1938 年每个台的 R 值与相应时段标准台的 R 比较而统一建立的。新的台站可通过与同纬度各台的比较统计得出。并且规定 $K=9$ 的下限幅度 R 应与国际地磁和高空物理协会协商确定。表 5.9 为国际标准地磁台和我国北京地磁台的 K 与 R 的对应关系。

表 5.9 标准台（Niemegk, 52°04′N, 12°40′E）

$K=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$R=$	5	10	20	40	70	120	200	330	500		(γ)

北京台

$K=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$R=$	3	6	12	24	40	70	120	200	300		(γ)

尽管 K 与 R 的对应考虑了干扰的地理分布的影响，但这仅仅是统计意义上的，对于具体的一个台站，每个世界日 8 个具体的数 K 仍包含有局部因素。为此又选取全球分布适当的 12 个台站，将每日 K 指数汇集平均，得到消除局部影响的所谓行星性磁情指数 K_p（Planetary index）。当 12 个台站 K 值取平均时，将每一级又分为三级，如 $K=4$ 分成 4_-，4_0，4_+，0 和 9 只有 0_0，0_+，9_-，9_0，这样指数 K_p 从 0 至 9 共 28 级。

3. 指数 A_k 和 A_p

由于指数 C 和 C_i 作为逐日扰动程度的量度比较粗糙，不能完全满足统计研究的要求，人们又选择了量度逐日扰动程度的新指数。能否采用 3 小时指数 K 或 K_p 一天 8 个数的总和作为新的逐日干扰的量度呢？从下面例子容易理解，这显然是不合适的。例如某日 K 为 1 1 1 1 1 1 1 1，另一天为 0 0 0 0 0 0 0 8，两天 K 的总和全为 8，但前者相当平静，而后者最后三小时却存在很强的扰动。这种弊病的产生是由于 K 指数的级数

和磁场扰动幅度为准对数关系，直接相加等权求和是不适宜的。为克服这种弊病，可以把 K 恢复为扰动量的磁场数，这与前面所说直接使用磁场数值量度干扰程度的不方便并不矛盾，这里采用的是已经按扰动规范化了的磁场数值。恢复的办法是按表 5.10 所定规范把 K 与磁场幅度联系起来。

表 5.10　K 与等价幅度 ak 的转换表

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ak	0	3	7	15	27	48	80	140	240	400

不同台站 ak 的单位因子不同，由台站 $K=9$ 的下限幅度 R 除以 250 来定。例如标准台（Niemegk）$K=9$，$R=500$，则 ak 单位为 2 伽玛。这样由表 5.10 和 $K=9$ 的下限幅度 R 即可确定指数 K 对应的扰动幅度 ak，将每天 8 个 ak 数平均，即得 A_k 指数。由于这里 ak 已变为线性尺度，则指数 A_k 不仅可做为逐日干扰程度的量度，同样可以由 ak 的月，季或年均值来量度逐月或逐年的干扰程度。

同样方式亦可将三小时 K_p 指数按一定规范转换成扰动幅度得到指数 A_p，其转换标准如表 5.11 所示。

表 5.11　K_p 与等价幅度 ap 的转换表

K_p	0_0	0_+	1_-	1_0	1_+	2_-	2_0	2_+	3_-	3_0	3_+	4_-	4_0	4_+
ap	0	2	3	4	5	6	7	9	12	15	18	22	27	32
K_p	5_-	5_0	5_+	6_-	6_0	6_+	7_-	7_0	7_+	8_-	8_0	8_+	9_-	9_0
ap	39	48	56	67	80	94	111	132	154	179	207	236	300	400

对于世界标准台 ap 的单位为 2 伽玛。

此外还有 15 分钟指数 Q 和用来反映赤道环电流的月指数 u 等，这里不再逐一介绍。

4. 国际地磁静扰日

地磁静扰日的划分对于变化磁场的许多研究是必须的。划分的标准是以 K_p 指数为基础，根据世界日每天 ① 8 个 K_p 指数的和；② 8 个 K_p 指数的平方和；③ 8 个 K_p 指数中最大的一个；求出这三个数的平均。其中每月这个平均数最大的五天定为国际磁扰日，由最小的 10 天再选出五天即为国际磁静日。从这种选择方式可以看出，静扰日并不表示绝对的静扰程度，它有赖于每月实际扰动的强弱。

（二）太阳静日变化 S_q

太阳静日变化是以太阳日（24 小时）为周期的平静日变化，由每月 5 天磁静日统计得出，通常记作 S_q。

静日某一时刻 S_q 的数值为该时刻磁场值减去 S_q 为零的基线值。零基线一般采用当天的日均值。恰普曼（S. Chapman）和普赖斯（A. T. Price）都曾先后提出，选用夜间值作为 S_q 基线比起日均值更为适宜。但随后发现，即使在夜间与 S_q 相联系的高空电流体系也并不为零。因此至今 S_q 的基线标准还无定论，通常仍沿用简便的日均值基线[22]。磁静日并非绝对的平静，还会包含一定的干扰成分，这种干扰的多数随机部分可由许多静日相同时刻的数值统计叠加消除之，而磁暴之后地磁场缓慢恢复的所谓“扰后效应”对磁静日的影响，则要通过非周期改正消除。其改正值是把每日地方时 24^h 和 0^h 的差值线性分配

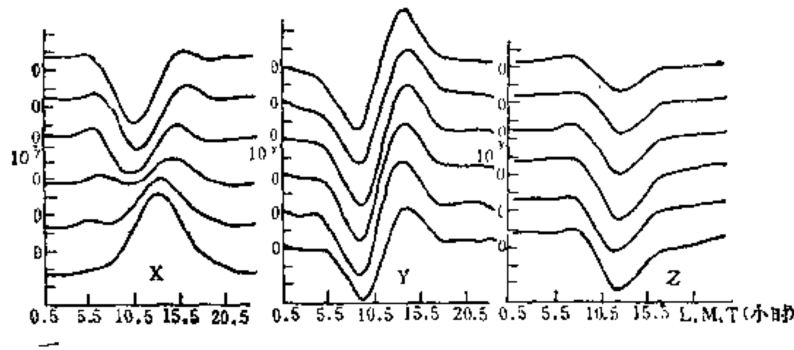


图 5.21 我国六个台站 1959 年平均日变化 S_q (Y 向西为正)[123]
自上至下: 长春,北京,兰州,佘山,拉萨,广州。

在每一时刻。为了反映 S_q 场的季节差异，上述统计经常按天文季节进行，通常分为冬季(1，2 和 11，12 月)，春秋季(3，4 和 9，10 月)和夏季(5，6，7，8 月)三个季节。图 5.21 即为我国部分台站按上述计算步骤所得 S_q 变化。

下面分段叙述 S_q 场的形态,球谐分析和高空电流体系。

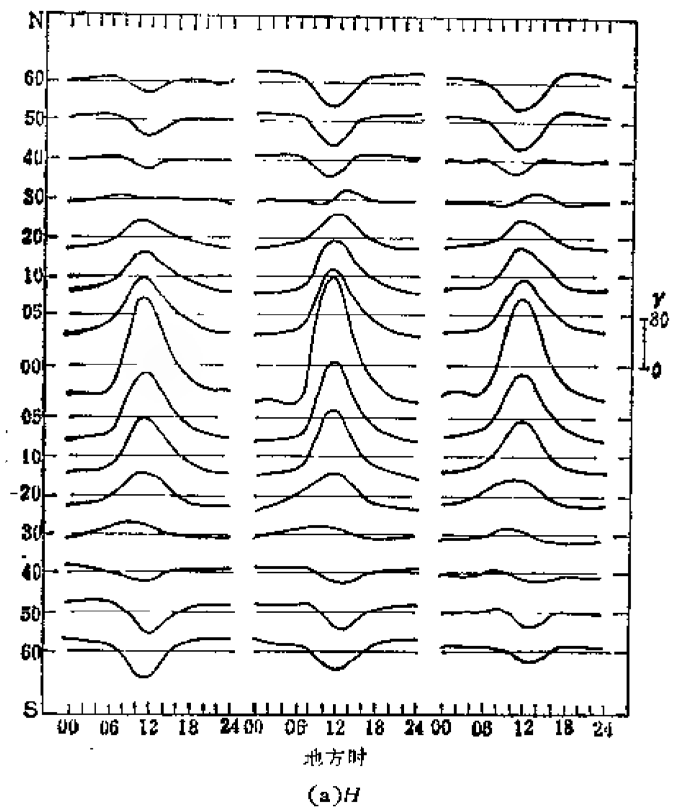
1. S_q 的形态和纬度变化

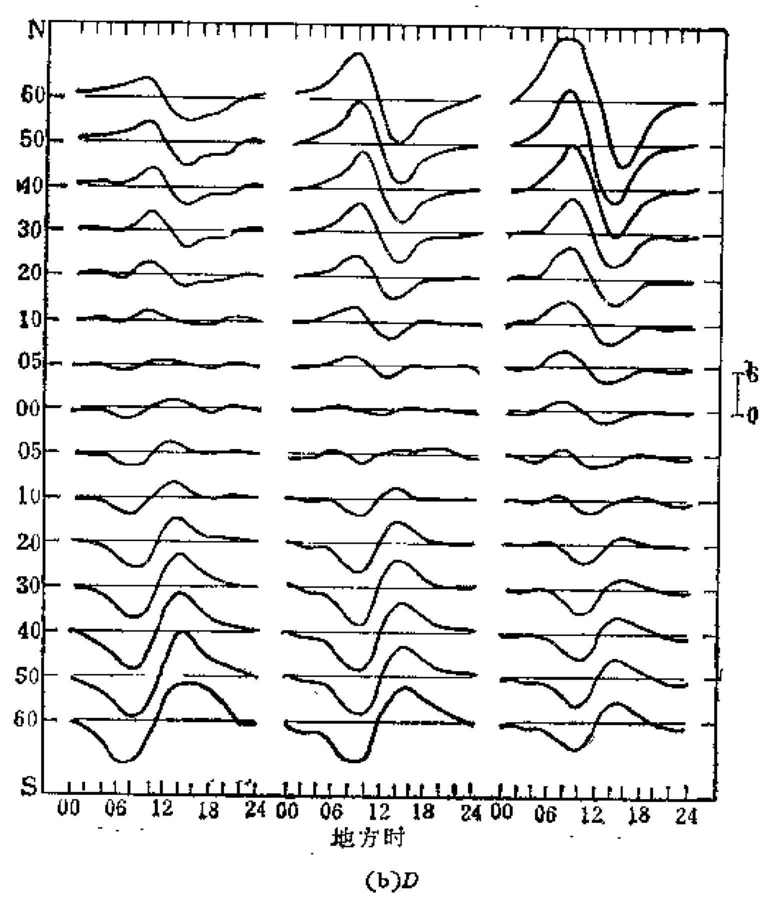
S_q 除随地方时变化外,在空间不同的地方有不同的特征。不过在同一纬度的各处,其周日变化差异较小,主要是随纬度而变化。图 5.22 为全球各纬度不同季节水平分量(H)偏角(D)和垂直分量(Z)的 S_q 变化。由图 5.21，5.22 不难看出，S_q 的周日变化，不同分量规律不同，北向分量 X(或 H) 和垂直分量 Z 在地方时 11^h，12^h 附近有一个明显的极值,而另一个极值则不明显;偏角 D(或 Y)形似正弦波,有两个明显的极值，分别在 9^h 和 15^h 附近。S_q 的纬度变化主要表现在,X 分量南北半球呈反对称分布(春秋季),在南北 30° 纬度线上变幅最小，30° 南北两侧极值反向，在 30°N 和 30°S 之间，11^h 附近有极大值,30°N 以北和30°S 以南两侧 11^h 则为极小值;与此相对应 Z 分量南北半球为对称分布(春秋季),在赤道附近极值反向，南北 30° 纬度线变幅最大，偏角 D 与 Z 一样在赤道处反相，南北半球呈对称分布(春秋季)，但变幅则是从赤道向南北两侧逐渐增加。从上述 S_q 场的时空分布可以看出，南北纬度 30° 和地方时 11^h 附近具有特殊的意义。下面将会看到，这正是 S_q 高空电流体系焦点的位置。S_q 的季节变化主要是幅度的不同，冬季变幅最小,夏季和春秋相差不大。太阳活动的高年和低年，S_q 场不仅是幅度变化,其相位也有移动。从图 5.21 可以看出,我国地区的 S_q 场的时空变化和全球特征是一致的。

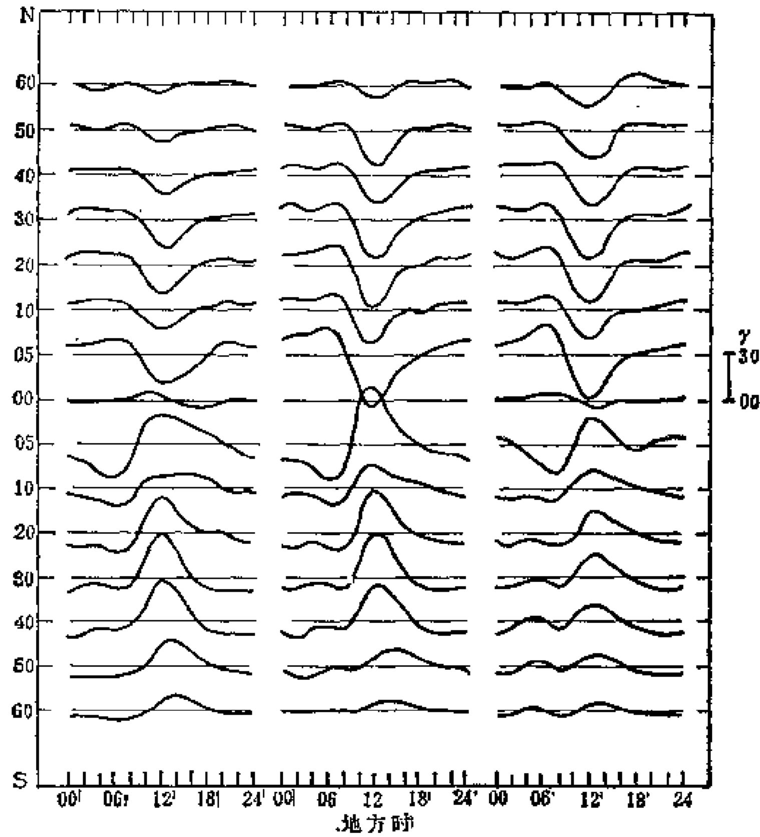
2. S_q 场的球谐分析

与基本磁场不同 S_q 场球谐分析同时包括内源场和外源场两部分，且(5.87)式中高斯系数 g, h 将为时间 t 的周期函数。因此可将它展成傅氏级数,即

$$
\begin{aligned}
&(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} [(g_{na}^{ms} \cos st' + g_{nb}^{ms} \sin st') \cos m\lambda \\
&\quad + (h_{na}^{ms} \cos st' + h_{nb}^{ms} \sin st') \sin m\lambda]。
\end{aligned}
\tag{5.162}
$$


N
60
50
40
30
20
10
05
00
05
10
20
30
40
50
60
S
00 06 12 18 24 00 06 12 18 24 00 06 12 18 24
地方时
γ
80
0
(a)H


N
60
50
40
30
20
10
05
00
05
10
20
30
40
50
60
S
00 06 12 18 24 00 06 12 18 24 00 06 12 18 24
地方时
0
(b)D



(c)Z

图 5.22 S_q 场随纬度的分布[22]

g_{na}^{ms}, g_{nb}^{ms}, h_{na}^{ms} 和 h_{nb}^{ms} 分别为 g_n^m 和 h_n^m 的傅氏系数，t' 为世界时。若采用日均值做为日变场的基线，则(5.162)中 s 从 1 开始。利用关系式

$$t = \lambda + t'。$$

将(5.162)中世界时 t' 换成地方时 t，得

$$\begin{aligned} g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda = & \sum_{s=1}^{\infty} [g_{n\cdot a}^{m\cdot s} \cos s\lambda \cos m\lambda + h_{n\cdot b}^{m\cdot s} \sin s\lambda \sin m\lambda \\ & + g_{n\cdot b}^{m\cdot s} \sin s\lambda \cos m\lambda + h_{n\cdot a}^{m\cdot s} \cos s\lambda \sin m\lambda] \cos st + [g_{n\cdot a}^{m\cdot s} \sin s\lambda \cos m\lambda \\ & - h_{n\cdot a}^{m\cdot s} \cos s\lambda \sin m\lambda + h_{n\cdot a}^{m\cdot s} \sin s\lambda \sin m\lambda - g_{n\cdot b}^{m\cdot s} \cos s\lambda \cos m\lambda] \sin st \\ = & \sum_{s=1}^{\infty} [p_{n\cdot a}^{m\cdot s} \cos(m+s)\lambda + q_{n\cdot a}^{m\cdot s} \sin(m+s)\lambda + r_{n\cdot a}^{m\cdot s} \cos(m-s)\lambda \\ & + h_{n\cdot a}^{m\cdot s} \sin(m-s)\lambda] \cos st + [p_{n\cdot b}^{m\cdot s} \cos(m+s)\lambda + q_{n\cdot b}^{m\cdot s} \sin(m+s)\lambda \\ & + r_{n\cdot b}^{m\cdot s} \cos(m-s)\lambda + k_{n\cdot b}^{m\cdot s} \sin(m-s)\lambda] \sin st。 \end{aligned} \tag{5.163}$$

考虑到 S_q 的空间分布主要是随纬度变化，做为近似，假定它与经度无关，则 (5.163) 只有一种可能的选择，即 $m = s$, $p = q = 0$。这时(5.163)简化为

$$g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda = \sum_{m=1}^{n} r_{n\cdot a}^{m} \cos st + r_{n\cdot b}^{m} \sin st。 \tag{5.164}$$

将(5.164)代入(5.86)并仍沿用符号 g、h，得

$$W = a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}g_n^{mi} + \left(\frac{r}{a}\right)^n g_n^{me}\right]\cos mt + \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}h_n^{mi} + \left(\frac{r}{a}\right)^n h_n^{me}\right]\sin mt\right\}P_n^m(\cos\theta)。 \tag{5.165}$$

虽然(5.165)与(5.161)形式相似，但两者系数意义不同，这里 g、h 是高斯系数的傅氏系数，已不再是时间 t 的函数。在地球表面(5.165)简化为：

$$\begin{aligned} W|_{r=a} &= a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(a_n^m\cos mt + b_n^m\sin mt)P_n^m(\cos\theta) \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}[E_n^m\cos(mt+\varepsilon_n^m) + I_n^m\cos(mt+L_n^m)]P_n^m(\cos\theta) \\ &= a\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}[C_n^m\cos(mt+\delta_n^m)]P_n^m(\cos\theta)。 \end{aligned} \tag{5.166}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &a_n^m = g_n^{mi} + g_n^{me};\quad b_n^m = h_n^{mi} + h_n^{me}。\\ &(E_n^m)^2 = (g_n^{me})^2 + (h_n^{me})^2;\ (I_n^m)^2 = (g_n^{mi})^2 + (h_n^{mi})^2。\\ &\tan\varepsilon_n^m = \frac{h_n^{me}}{g_n^{me}};\ \tan L_n^m = \frac{h_n^{mi}}{g_n^{mi}}。\\ &(C_n^m)^2 = (a_n^m)^2 + (b_n^m)^2;\ \tan\delta_n^m = \frac{b_n^m}{a_n^m}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.167}$$

北向分量(X)，东向分量(Y)和垂直分量(Z)，可由(5.165)微分求出，在地球表面

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial W}{r\,\partial\theta}\bigg|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(a_n^m\cos mt + b_n^m\sin mt)\frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}, \\ Y &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\bigg|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(a_n^m\sin mt - b_n^m\cos mt)\frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}, \\ Z &= \frac{\partial W}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(\alpha_n^m\cos mt + \beta_n^m\sin mt)P_n^m(\cos\theta)。 \end{aligned}\right\} \tag{5.168}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n^m &= ng_n^{me} - (n+1)g_n^{mi}, \\ \beta_n^m &= nh_n^{me} - (n+1)h_n^{mi}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.169}$$

(5.168)可改写为

$$\begin{aligned} X &= \sum_{m=1}\left[\left(\sum_{n=m}^{\infty}a_n^m\frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)\cos mt + \left(\sum_{n=m}^{\infty}b_n^m\frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)\sin mt\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^x\cos mt + b_m^x\sin mt), \end{aligned} \tag{5.170}$$

其中 a_m^x, b_m^x 是 X 分量的傅氏系数：

$$\begin{aligned} a_m^x &= \sum_{n=m}^{\infty}\left(a_n^m\frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}\right), \\ b_m^x &= \sum_{n=m}^{\infty}\left(b_n^m\frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)。 \end{aligned} \tag{5.171}$$

对于 Y, Z 分量有与(5.170)(5.171)相似的结果,相应的傅氏系数为 a_m^Y, b_m^Y, a_m^Z, b_m^Z, 它们与球谐系数的关系为:

$$\left.\begin{aligned} a_m^Y &= -\sum_{n=m}^{\infty} b_n^m \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}, \\ b_m^Y &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n^m \frac{mP_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}。\end{aligned}\right\} \tag{5.172}$$

$$\left.\begin{aligned} a_m^Z &= \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n^m P_n^m(\cos\theta), \\ b_m^Z &= \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n^m P_n^m(\cos\theta)。\end{aligned}\right\} \tag{5.173}$$

分析工作就是根据 (5.170), 首先求出各不同纬度台站日变场 S_q 的相应分量的傅氏系数 a_m, b_m, 再由 (5.171)—(5.173) 用最小二乘法解出球谐系数 a_n^m, b_n^m 和 α_n^m, β_n^m, 并可根据(5.167),(5.169)将内外场区分开来。实际分析表明,日变场的傅氏分析取 $m=4$ 已足够精确。图 5.23 为我国长春台取 $m=4$ 的 X 分量的计算值与观测值的比较,可以看到,除个别点稍有偏离外,两者几近一致。

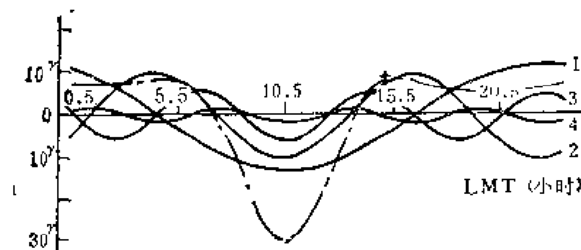


图 5.23 长春台 1959 年全年平均 X 分量观测值与傅氏分析计算值的比较(取 $m=4$)[23]

细实线: 日变傅氏级数各次谐波

粗虚线: 4 次谐波叠加值和实测值+偏离叠加值的实测值

1889 年舒斯特 (A. Schuster) 首先把高斯球谐分析用于 S_q 场,随后恰普曼,长谷川(M. Hasegawa)等人应用舒斯特方法获得了全球 S_q 场分析的重要结果。表 5.12、5.13 为各个作者所得不同年代 S_q 场的球谐系数 C_n^m, δ_n^m(见公式 5.166),外场与内场幅度之比 E_n^m/I_n^m 和位相差 $\varepsilon_n^m - L_n^m$。由表 5.12 看出,在地球表面 S_q 外场与内场之比约为 3:1,内场位相落后外场约一小时。在表 5.12、5.13 中,春秋季和冬夏平均的 S_q 仅包含 $n+m$ 为奇数之球谐函数,这表明与其相联系的场势相对于赤道呈对称分布,而夏冬两季之差则仅有 $n+m$ 为偶数之球谐系数,即场势相对于赤道是反对称的,这与上述 S_q 场的纬度变化特征相符。

3. S_q 场的电流体系

观测已经证明,S_q 的电流体系位于电离层的 E 区,因此首先简要叙述一下电离层的概貌。大约在 50 公里高度以上,大气由于太阳的光辐射而被电离,部分中性原子分解为正离子和电子,从而形成所谓电离层。因电离过程和离子成分的区别,电离层分为 D, E, F, 氦和质子等五个区。D区又可分为 C, D 两层,E、F 区也各自分为 E_1, E_2 和 F_1, F_2 两层(图 5.24)。各层高度并不完全确定,其典型高度和主要成分为: C层最低。C, D 层分界约在 70 公里,D层上界约在 90 公里,该区正离子大部分是 N_0^+, 负离子是电子和 O_2^-,

表 5.12 S_q 场球谐系数的内外场幅度比和相位差[22]

作者			Chapman (1919)				Mchich (1937)		Hasegawa & otu (1950)		Matsushita & Maeda	
年代			1902		1905		1923		1932—1933		1958	
黑子数			5 (低)		64 (高)		6 (低)		8 (低)		185 (高)	
台站数			21		21		5		46		69	
	m	n	E_n^m/I_n^m	$\varepsilon_n^m-L_n^m$ (度)	E_n^m/I_n^m	$\varepsilon_n^m-L_n^m$ (度)	E_n^m/I_n^m	$\varepsilon_n^m-L_n^m$	E_n^m/I_n^m	$\varepsilon_n^m-L_n^m$	E_n^m/I_n^m	$\varepsilon_n^m-L_n^m$(度)
冬夏季平均	1	2	3.0	−20	2.8	−0.3			2.3	−09	2.7	−13
	2	3	2.2	−18	2.3	−19			2.4	−10	2.3	−15
	3	4	2.4	−21	2.7	−20			2.2	−14	2.2	−09
	平均		2.5	−20	2.6	−14			2.3	−11	2.4	−12
	加权平均*		2.6	−20	2.6	−10			2.3	−10	2.5	−13
春秋季	1	2	2.7	−23	2.9	−0.5	2.4	−21			2.8	−13
	2	3	2.0	−17	2.4	−18	2.1	−13			2.3	−13
	3	4	2.5	−21	2.4	−21	1.9	−02			2.2	−11
	平均		2.4	−20	2.6	−15	2.1	−12			2.4	−14
	加权平均		2.5	−21	2.7	−11	2.2	−16			2.6	−13

* 加权平均系数对于 $n=2$、3、4 分别为 4，2，1。

表 5.13

球谐系数 C_n^m, δ_n^m, s——夏季, w——冬季, E——春秋季; 下标 n, s 指南北半球 $A\sim(s+w)/2$, $\Delta\sim(s-w)/2$, 奇~$n+m$ 为奇数, 偶~$n+m$ 为偶数[13]

作者			Schuster (1889)		Frisch (1905)		Chapman (1919)				Benkova (1940)		Hasegawa (1950)		Matsuchita and Maeda (1965a)							
年代			1870		1840—1896		1902		1905		1933		1932—1933		1958							
黑子数			139 (高)		混合		5 (低)		64 (高)		6 (低)		8 (低)		185 (高)							
台站数			4		18		21		21		46		46		69							
季节			A_n		$(A_n+A_s)/2$		$(A_n+A_s)/2$		$(A_n+A_s)/2$		$(A_n+W_s)/2$		$(A_n+A_s)/2$		$(E_n+E_s)/2$		$(Y_n+Y_s)/2$		$(A_n+A_s)/2$		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$	
	m	n	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$
奇	1	2	15.4	024	10.2	030	7.0	035	10.1	024	7.5	019	10.5	014	21.8	358	19.5	002	18.4	004	0.1	056
	2	3	7.1	211	4.8	205	4.5	215	5.9	207	4.2	209	5.2	198	11.3	190	9.7	192	8.9	193	1.2	129
	3	4	3.2	067	2.1	035	2.1	047	2.7	040	—	—	1.6	040	4.5	012	3.7	025	3.3	034	0.7	304
季节			Δ_n		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$		$(s_n-w_s)/2$		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$		$(E_n-E_s)/2$		$(Y_n-Y_s)/2$		$(A_n-A_s)/2$		$(\Delta_n+\Delta_s)/2$	
	m	n	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$	$C_n^m(r)$	$\delta_n^m(0)$
偶	1	1	5.4	027	5.9	028	4.3	023	4.7	027	5.0	039	3.8	005	2.9	281	2.3	320	2.2	310	6.5	064
	1	3	2.5	311	1.5	247	2.1	344	2.8	337	0.8	318	0.9	339	2.7	267	2.1	258	1.8	251	0.9	076
	2	2	3.9	255	2.9	242	2.1	343	3.0	243	2.8	244	0.9	198	5.1	246	3.2	239	2.3	232	3.4	246
	2	4	0.9	162	1.0	186	1.1	205	0.9	210	0.9	194	0.4	203	0.9	148	0.4	141	0.1	113	0.9	201
	3	3		—	1.4	088	1.2	091	1.4	104	—	—	—	—	3.4	082	2.0	078	1.3	072	2.0	067

虽然这一层离地面最近，但因对电磁波的吸收很强，粒子自由程短，不易观测，所以性质却是了解最差的一个区；E 区约由 90 公里至 120—150 公里，F 层与氦层，氦层与质子层界面高度各自约为 500 公里和 800 公里，其离子成份，各层（D 除外）主要负离子均为电子，E、F 层正离子为 O_2^+，N_0^+，F_2 层为 O^+，氦层和质子层分别为 H_e^+ 和 H^+。各层电子浓度以 D 区最低，其随高度的变化如图 5.24 所示。电离层为完全中性部分电离的气体，有较好的导电性能。由于太阳、月亮的潮汐作用以及压力温度的变化，电离层将产生以水平向为主的运动，这种运动和地磁场相互作用即产生涡电流，这就是通常所说的"发电机"效应。S_q 电流体系正是电离层这种发电机效应的结果。从图 5.24 可见，E，F 层都有较高的电子浓度，为什么 S_q 的电流体系不在 F 区而在 E 区呢？这主要是由于两层电导率的差异。电离气体的电导率不仅取决于电子浓度，还与各种离子质量，电荷自由程以及周围磁场的强度和方向有关。沿磁场的方向电导率较大，而在磁场的垂直方向电导率较小。这由方程 (5.27) 磁场的"冻结"效应不难理解。正是由于磁场的存在，电离层的电导率将是各向异性的。若忽略电离层的厚度，这种各向异性电导率可用一阶张量表示。为了便于比较，表 5.14 列出了 EF 两层不同地磁纬度的电导率。由表 5.14 明显看出，在 E 层其电导率要较 F 层高一个量级或更多。因此 S_q 电流体系处于 E 层就不难理解了。这里我们不准备叙述 S_q 发电机效应的数学理论，只重点介绍如何由地面 S_q 场的实际分析确定该电流体系的分布。

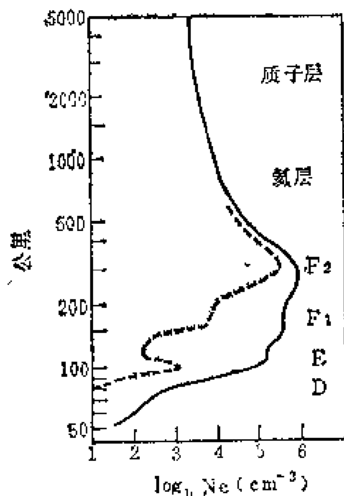


图 5.24 电离层分区和电子浓度的高度变化图[22]

设电离层 E 为与地心 O 同心，半径为 R 的球层（图 5.25）。层上电流密度为 $\boldsymbol{j}(\theta', \lambda')$，考虑 $\boldsymbol{j}(\theta', \lambda')$ 为无源场，$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$，可定义电流函数 $\Psi_e(\theta', \lambda')$

$$\boldsymbol{j} = \nabla\Psi_e \times \boldsymbol{e}_r$$

表 5.14 D、E、F 层不同地磁纬度的电导率（单位：e. m. u.）

磁纬(度)	区	Σ_{xx}	Σ_{xy}	Σ_{yy}
0°	F	4.30×10^{-4}	0	8.81×10^{-10}
	E	6.90×10^{-5}	0	7.58×10^{-8}
	D	7.78×10^{-10}	0	7.97×10^{-10}
30°	F	3.52×10^{-9}	2.14×10^{-11}	8.81×10^{-10}
	E	2.16×10^{-8}	1.89×10^{-8}	5.64×10^{-9}
	D	5.47×10^{-10}	2.95×10^{-10}	5.46×10^{-10}
60°	F	1.17×10^{-9}	1.24×10^{-11}	8.81×10^{-10}
	E	7.21×10^{-9}	1.09×10^{-8}	5.44×10^{-9}
	D	3.91×10^{-10}	2.99×10^{-10}	3.91×10^{-10}
90°	F	8.81×10^{-10}	1.07×10^{-11}	8.81×10^{-10}
	E	5.45×10^{-9}	9.44×10^{-9}	5.45×10^{-9}
	D	3.58×10^{-10}	3.26×10^{-10}	3.58×10^{-10}

Σ_{xx}，Σ_{xy}，Σ_{yy} 为各向异性电导率的一阶张量元素，x 向南，y 向东。

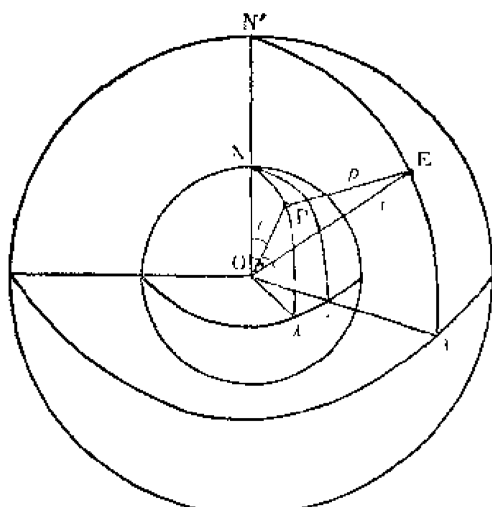


图 5.25

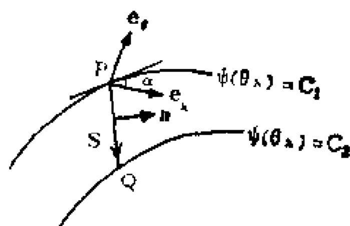


图 5.26

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Psi_e(\theta',\lambda')}{r\sin\theta'\partial\lambda'}&=je_\theta,\\-\frac{\partial\Psi_e(\theta',\lambda')}{r\partial\theta}&=je_\lambda。\end{aligned}\right\}\tag{5.174}$$

$\Psi_e(\theta\lambda)$ 的等值线有两个重要性质：① 等值线与电流密度 j 的流线重合。这由图 5.26 所示等值线 $\Psi(\theta\lambda)=c_1$ 上任一点 P 的切线

$$\tan\alpha=-\frac{\partial\Psi}{r\sin\theta\partial\lambda}\Big|_P\Big/\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}\Big|_P。$$

正好等于 $-\dfrac{je_\theta}{je_\lambda}$，不难证明。② 相邻两等值线 Ψ 的差，即为流过两等值线间的电流强度。证明如下：设 $\Psi(\theta,\lambda)=C_1$ 和 C_2 的两等值线间流过的电流强度为 I（图 5.26）

$$I=\int_P^Q\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS,$$

$\boldsymbol{n}$ 为 S 的法线，取 $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{r}$ 为右手螺旋，则

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\Psi}{\partial S},$$

于是

$$I=\int_P^Q\frac{\partial\Psi}{\partial S}dS=\int_P^Q d\Psi=C_2-C_1,\text{ 即}$$

I 为相邻 Ψ 等值线的差。由 Ψ_e 的上述性质不难得出 $\Psi(\theta',\lambda')$ 所定义的电流 j 在地面观测点 $P(\theta,\lambda)$ 的磁势

$$W_e(\theta,\lambda)=\iint\Psi_e'(\theta',\lambda')\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho}dS'。\tag{5.175}$$

积分遍及半径为 R 的球层（图 5.25），由图 5.26 三角形 OPE 可以得出

$$\rho^2=r^2+a^2-2ar\cos\delta=r^2\left[1-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\delta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\left[1-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\delta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}。\tag{5.176}$$

(5.176)方括号部分是关于 $\cos\delta$ 的勒让德函数的母函数即

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\delta),\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right)&=-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{a^n}{r^{n+2}}P_n(\cos\delta)。\end{aligned}\right\}\tag{5.177}$$

利用关系式

$$\cos\delta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda'-\lambda)。$$

将 $P_n(\cos\delta)$ 转变为对于极轴 ON，即关于 θ, θ', λ, λ' 的球面函数，

$$P_n(\cos\delta)=\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta')P_n^m(\cos\theta)\cos m(\lambda'-\lambda)。\tag{5.178}$$

同样，流函数 $\psi(\theta',\lambda')$ 亦可展成关于 θ', λ' 的球面函数，

$$\Psi_e(\theta',\lambda')=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\Psi_e^{kl}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}(a_l'^k\cos k\lambda'+b_l'^k\sin k\lambda')P_l^k(\cos\theta')。\tag{5.179}$$

由(5.177)，(5.178)和(5.179)可以得到

$$\begin{aligned}W(\theta,\lambda)=\iint\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}-(n+1)\frac{a^n}{r^{n+2}}P_n^m(\cos\theta')P_n^m(\cos\theta)\cos m(\lambda'-\lambda)\Big]\\ \times\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}[(a_l'^k\cos k\lambda'+b_l'^k\sin k\lambda')P_l^k(\cos\theta')]dS'。\end{aligned}\tag{5.180}$$

由球面函数的正交性(5.89)式不难相信，(5.180)只有当 $l=n$, $k=m$时才不为零。积分结果可得：

$$\begin{aligned}W_e(\theta,\lambda)&=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{4\pi(n+1)}{2n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^n[a_n'^m\cos m\lambda+b_n'^m\sin m\lambda]P_n^m(\cos\theta)\\ &=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{4\pi(n+1)}{2n+1}\left(\frac{a}{R}\right)^n\Psi_n^{ml}(\theta,\lambda)。\end{aligned}\tag{5.181}$$

由磁势 $W(\theta,\lambda)$ 在地球表面的球谐分析结果(5.166)中外源场部份和(5.181)比较，可得

$$\begin{aligned}\Psi_e(\theta,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\phi_{ne}^m(\theta,t)\\ &=-\frac{a}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n\sum_{m=0}^{n}[g_{nl}^m\cos mt+h_{nl}^m\sin mt]P_n^m(\cos\theta)\\ &=-\frac{a}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n\sum_{m=0}^{n}E_n^m\cos(mt+\varepsilon_n^m),\end{aligned}\tag{5.182}$$

或简化为

$$\phi_{nl}^m(\theta,t)=-\frac{1}{4\pi}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n W_{nl}^m(\theta,t)。\tag{5.183}$$

若 S_q 在地球表面的外源场球谐系数 g_{nl}^m、h_{nl}^m 或 E_n^m、ε_n^m 已知，则由(5.182)即可求出相应外源场的电流函数$\phi_l(\theta,t)$，ϕ_l 的等值线即为电流线，流线方向由(5.174)决定，ϕ_e 相邻两等值线之差就是在它们之间通过的电流强度。(5.182) 各量均为电磁单位 (e. m. u.)。若

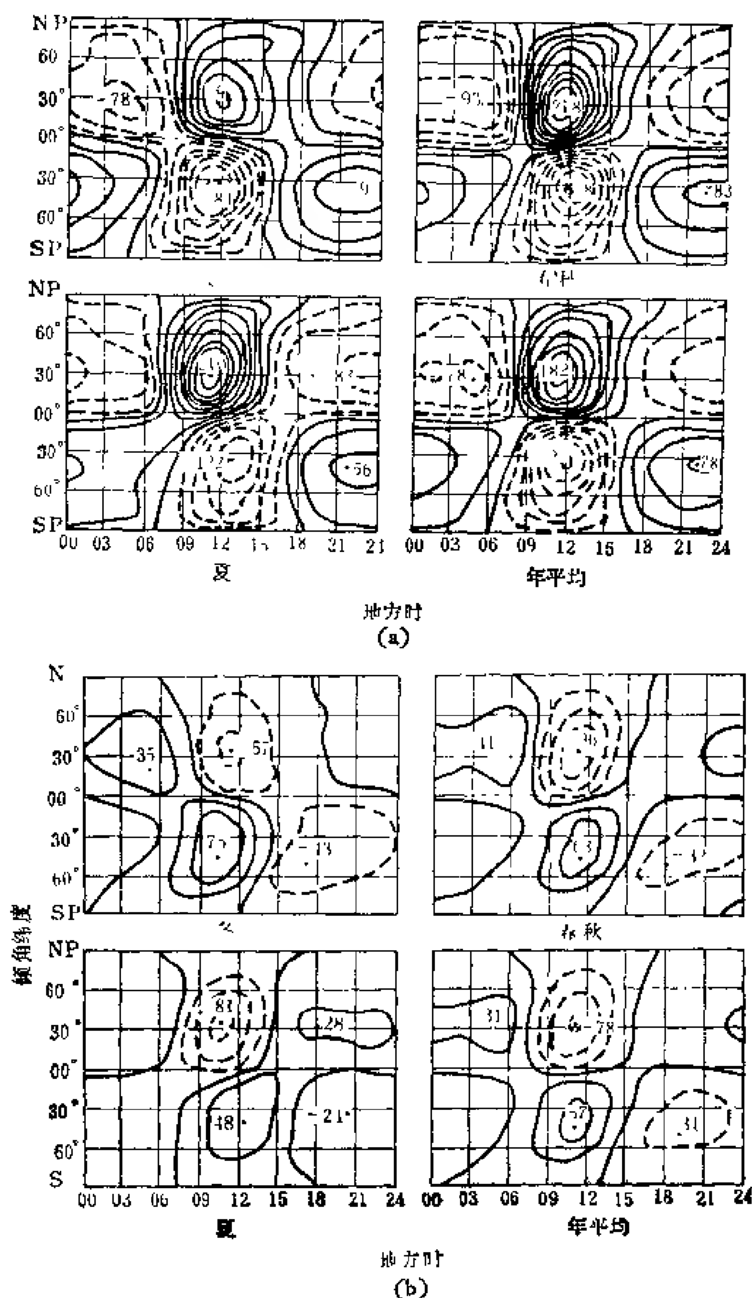


图 5.27 S_q 外源(a),内源(b)电流体系[22]

相邻流线间电流强度为 25×10³ 安培,实线为反时针方向,虚线顺时针方向,粗实线为零线,涡旋中心总电流强度单位为 10³ 安培

ϕ 以安培为单位,则需要乘以因子 10,即

$$\phi_n^{ml} = -\frac{10}{4\pi}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n W_{nl}^m。 \tag{5.184}$$

式(5.184)中 W_{nl}^m,若 a 以公里,g_{nl}^m、h_{nl}^m 以伽呜为单位,则 ϕ 单位仍为安培。同样可以得出相应内源场的电流函数 $\phi_{n_i}^m$,

$$\phi_{n_i}^m = \frac{10}{4\pi}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{a}{r_0}\right)^{n+1} W_{ni}^m, \tag{5.185}$$

其中 r_0 为内部电流体系的球层半径。在第六章地球内部的电磁感应一节将指出,内部电

流正是外部电流体系感应的结果。图 5.27*a*，*b* 为国际地球物理年期间(IGY)S_q 场的外源和内源平均电流体系。电流体系有四个涡流中心，南北各两个。夜间的强度远小于白天。最强的涡旋中心约在南北地磁纬度 30° 和地方时 11^h，12^h 附近，这与 S_q 场的时空规律相一致。但在春秋季南北半球电流体系并不完全对称。

4. S_q 场的经度效应和赤道异常

(5.165)，(5.166) 是在假定同一地方时 S_q 场与经度无关的条件下确立的。这一假定抓住了 S_q 场性质的主要方面，简化了分析方法，揭示了 S_q 场空间分布的基本规律。但 S_q 仍然存在着经度差异，即除随地方时变化外还有与世界时有关的部分。别科娃（N. P. Benkova）首先研究了全球 S_q 的经度效应，指出了 S_q 的经度变化约占总变化的 20%。这里不详细介绍这一方法的技术细节，读者可参阅有关文献[23][24]。松下（S. Matsushita）在分析 1958 年（IGY）S_q 的变化时把全球按地磁经度分成三个区，第一区为欧（洲）非（洲）带，磁经度在 45°E 和 165°E 之间，第二为亚澳带，165°E 和 285°E 之间，三为南北美带，285°E 和 45°E 之间[22]。分析结果显示出明显的经度差异。图 5.28 给出了反映这一差异主要特征的三个经度带外空电流体系焦点的位置和强度。

除上面所述 S_q 的正常变化规律外，在磁赤道两侧南北约 ±15° 的狭长条带地区，S_q 有显著的异常变化。当 1922 年在靠近磁赤道的秘鲁胡安·卡约(Huan Cuyo)地磁台首次

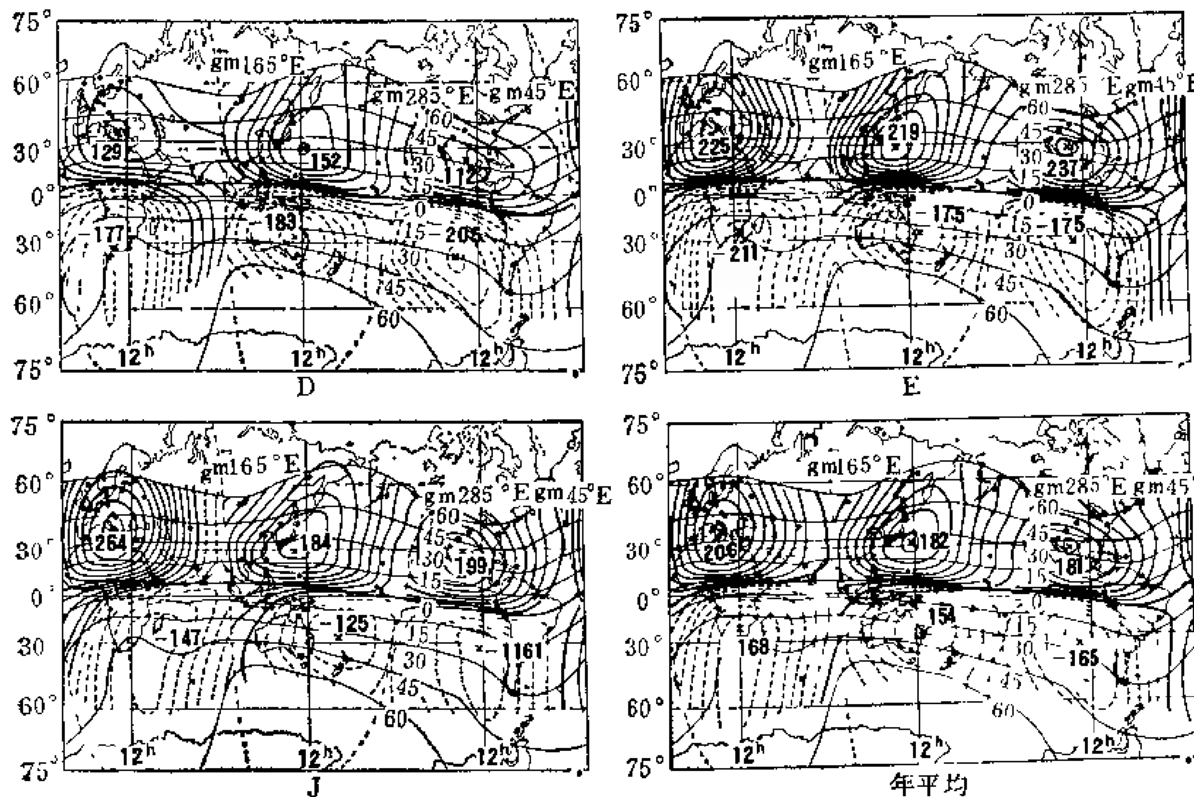


图 5.28 1958 年外空电流体系焦点的位置和强度在不同经度带上的分布[22]

经度分带用虚线标出，图中细实线为磁倾纬度

D. 冬季； *E*. 春秋； *J*. 夏

观测到这种出乎意料的异常变化时，人们甚至怀疑纪录的真实性。后来磁赤道附近相继观测到同样现象，才相信了这是磁赤道附近的规律性异常变化。现在已经清楚，这是由磁赤道上空电离层南北宽约 300 公里的狭长范围内自西向东的强电流引起的。这股西东向强电流称为“赤道电射流”。图 5.29 为电离层 E 区西东向电流的相对强度图。从图上可以看出，磁赤道附近的电流强度显著增强，由“赤道电射流”的强度和方向不难了解赤道附近 S_q 场各分量的变化特征：在南北磁纬 10° 附近北向分量 X 的变幅迅速增加，在磁赤道达到极大；垂直分量 Z 的变幅开始迅速增加，然后急剧下降，在磁赤道下降为零，赤道两侧位相相反；东向分量 Y 则影响不大。由图 5.30 S_q 全日波幅度和位相随磁纬的分布，明显的可以看出赤道 S_q 异常的这种空间分布规律。

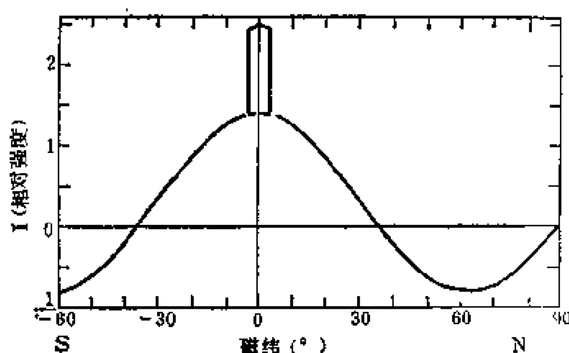


图 5.29 E 层自西向东的电流分量随磁倾纬度的变化（相对强度）

S_q 电流体系在磁赤道附近显著增强，主要原因是由于磁赤道处倾角为零、受磁场控制的电离层的电导率大大增加的缘故。这种增强可由图 5.31 所示简单的物理图象定性的说明：原 S_q 电流体系在磁赤道附近为西东向的 ($\boldsymbol{j}_0$)（图 5.27）；地磁场垂直纸面向里，用⊕表示；$\boldsymbol{j}_0$ 主要的载流电子在与其运动方向垂直的磁场作用下（$-e\boldsymbol{V}\times\mu\boldsymbol{H}$）将向上偏离，形成如图 5.31 所示的极化电场 $\boldsymbol{E}$；由导电介质中霍尔效应容易理解，与极化电场 $\boldsymbol{E}$ 相应的霍尔电流正比于 $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}$，为西东方向 ($\Delta\boldsymbol{j}$)。这就说明极化电场 $\boldsymbol{E}$ 的存在等效于增加了西东向的电导率。进一步分析不难了解，只有在磁赤道处上述极化电场最强，因为只有垂直于边界层（即上下方向）的电荷移动才能使介质极化，很显然，除磁赤道外，这种上下方向电荷的运动将有磁场方向的分量，这样运动的电荷将部分或全部沿磁力线漏掉。因此只有在磁赤道附近（倾角为 0°）上述西东向电导率的增强才是显著的（见表 5.14）。

平静变化除 S_q 外还有太阴日变化 L。太阴日变化是以太阴日为周期、强度较小的地磁变化，其变幅只有 $1—2^\gamma$，一个太阴日等于太阳时的 24 小时 50 分 28 秒，因 S_q 与 L 周期不同，可将地磁记录按太阴日时序排列，并把相同时刻磁场叠加统计得出太阴日变化 L。因 L 强度较小，与 S_q 周期较为接近，这种统计必须使用足够多的资料。

（三）磁　　暴

所谓磁暴是指全球同时发生磁情指数 $K\geqslant 5$ 的强烈磁扰。通常用 D 表示磁暴场，它是太阳活动喷发出来的等离子粒子流（太阳风）与地磁相互作用的结果。磁暴发生时往往同时出现极光，电离层骚扰和宇宙线暴。

本节开始已经指出，磁暴场可分为规则变化与不规则变化部分

$$D = D_{st} + D_s + D_p(B)$$

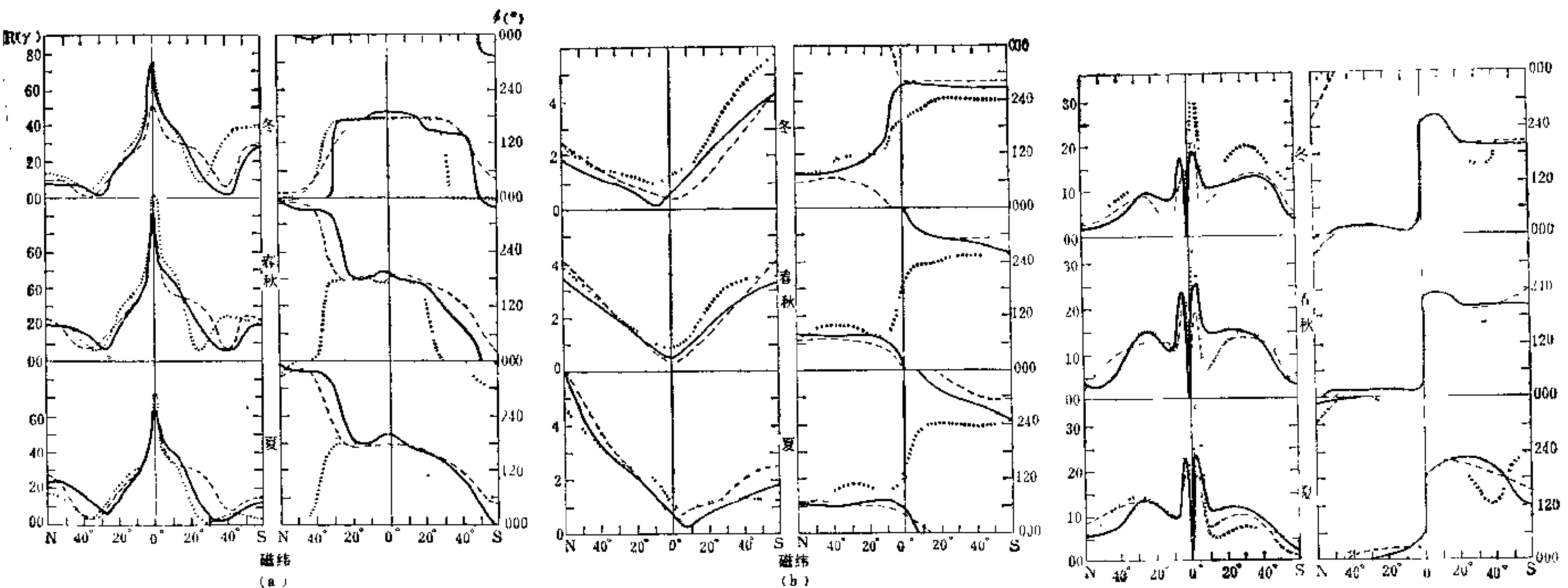


图 5.30 S_q 全日波幅度(左),位相(右)随纬度的分布[22]

虚线：经度第一区,实线：二区 点线：三区

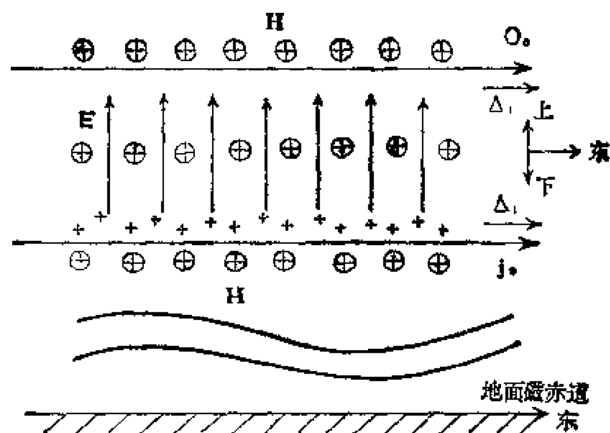


图 5.31　磁赤道西东向电流增强过程示意图

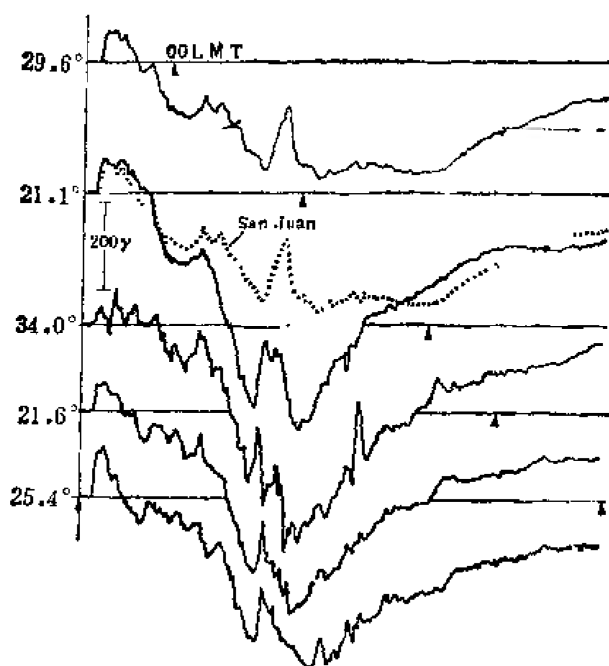


图 5.32　1957 年 9 月 13 日四个低纬台站的磁暴记录
纵坐标的数字为台站磁纬[9]

$$\text{磁暴场}(D)\begin{cases}\text{规则变化}\begin{cases}\text{暴时变化 } D_{st}\\ \text{扰日变化 } D_s\end{cases}\\ \text{不规则变化：极区磁亚暴 } D_p(B)\end{cases}$$

其中极区亚暴 D_p 在中低纬度称为湾扰，又是形态规则的变化。图 5.32 是 5 个中低纬度台站 1957 年 9 月 13 日的磁暴记录，它是国际地球物理年（IGY）期间最强的一个磁暴。图中所显示的各台形态相似的较大变化即为暴时变化 D_{st}。在 D_{st} 上叠加的许多强度不同的正负脉冲即为不规则变化 D_i，它是由与磁暴时相联系的极区电流体系所产生的，一般称为极区亚暴。下面重点介绍暴时变化 D_{st}，扰日变化 S_D 和极区磁亚暴 D_p。

1. 暴时变化 D_{st}

暴时变化 D_{st} 又称非周期变化，是磁暴场D的主要部分，反映了磁暴场的基本形态由图 5.32 可以看出，D_{st} 是全球同时出现的与世界时有关的规则变化。因此若以磁暴开始的小时记为零时，将磁暴时各地磁要素的时均值按磁暴零时顺序排列，许多不同磁暴但同时序叠加平均，若磁暴数目够多，磁暴零时又均匀分布在各地方时，则这种统计，可消除不规则成份 D_i 和以地方太阳日为周期的 S_q、S_D 变化，从而得到暴时变化 D_{st}。恰普曼1919 年首先做了磁暴场的这种统计分析，他选择了全球 11 个台站 40 个强度适中的磁暴，其结果如图 5.33 所示

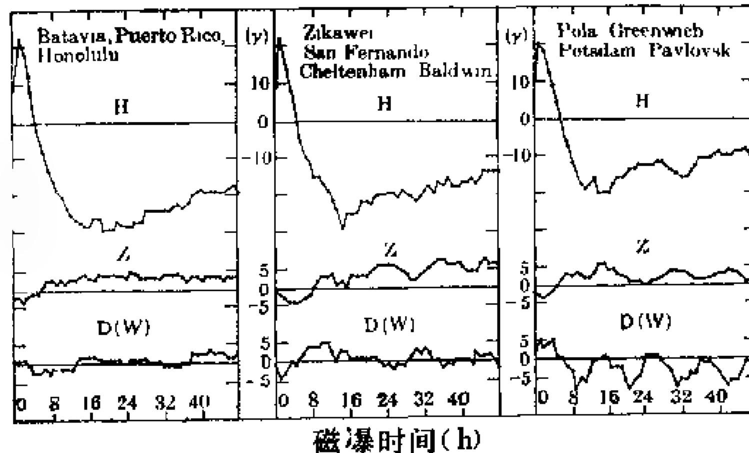


图 5.33　三个纬度带 D_{st} 的统计结果[9]

自左至右：平均纬度 22°，40°，51°，图上同时标出了台站名称

图 5.33 明显的显示出 D_{st} 水平分量的规则形态，D和Z的变化不仅强度小，且形态也不规则，典型的 D_{st} 可分为初相、主相和恢复期三个阶段。

(1) 初相 D_c：图 5.32、5.33 都清楚地显示出，磁暴开始时地磁场水平分量一般总是增加的。这种开始阶段磁场增强的过程称为磁暴的初相。强烈的磁暴，初相往往在一、二分钟内在全球同时开始，在几分钟内上升到最大值，这种现象称为急始 (SC)，相应磁暴称为急始型磁暴。若磁暴开始水平强度是缓慢上升，则称为缓始型磁暴 (GC)。初相持续时间平均约 2—4 小时，短的只有半小时，长的可达 6—8 小时，平均变幅约 15γ 左右。除磁赤道外，大小磁暴初相变幅差别不大。磁暴的急始和初相是由于太阳等离子粒子流和磁场作用、地磁场被压缩和恢复的结果。

(2) 主相 D_R 和恢复期，继磁暴初相后磁场水平强度降低的部分称为磁暴主相，主相持续期约一、二天。主相达到最低点后，磁场开始缓慢恢复，这个过程称为恢复期。磁暴主相是由于引起磁暴初相的粒子被磁场俘获而形成所谓赤道环电流的缘故。环电流和磁赤道平行自东向西，这种电流分布决定了磁暴空间分布的主要特征，如图 5.33 所示：D_{st} 变化的向量主要呈南北向，因而偏角和垂直分量变化很小；水平分量H在赤道处强度最大，主要随地磁纬度变化。磁暴按强度大小可分为：中常 (m) 磁暴，相应K指数为 5；中烈磁暴 (ms)，$K = 6$，7 和强烈 (s) 磁暴 $K = 8$，9。图 5.32 所示磁暴即为强烈磁暴。

许多磁暴具有 27 天(太阳平均自转周期)重现性，统计表明，重现型磁暴多为缓始型磁暴。磁暴的季节分布也不是均匀的，一般说来，春秋居多，冬夏较少。但非重现型磁暴的这种季节性差异不显著。磁暴频次随太阳活动还有明显的 11 年变化，太阳活动高年磁暴频次增多。

2. 扰日变化 S_D 和 D_S

S_D 是以太阳日为周期的干扰变化，与 S_q 的统计方法相同，可由每月 5 天磁扰日统计所得日变化 S_D 减去 S_q，或由通日(即所有日期)统计所得日变化 S 减去 S_q 得出。后者通常用 S_d 表示，图 5.34 为不同纬度 $S_D(H)$，$S_D(Z)$ 和 $S_D(D)$ 的统计结果。为了比较同时绘出了同纬度 S_q 的变化。恰普曼首先分析了 S_D 的变化，并建立了与其相应的理想的等效电流体系。S_D 等效电流体系在 F_2 层，是由于太阳粒子流从极区侵入而形成的。图 5.35 为理想电流体系的示意图。由图可见，电流主要集中在极光带（磁纬 67°）内，早晚各有一个涡，涡旋中心处于 6 时和 18 时。在中心南侧，电流集中于极光带边缘的狭长区域，称为极区“电射流”。早晨电流自西向东，晚上自东向西，这与图 5.34 55°N 以北 $S_D(H)$ 早晨下降(极值出现在 6 时)，下午上升(极值在 18 时)的正弦波的形态一致；早晨和晚上的东西向电射流全部流过极盖区，形成两个涡旋回路(总强度约为 275000 安培)。因此 $S_D(Z)$ 在极光带边缘，$S_D(H)$ 在极光带反相。电射流流过极盖区的同时，少量流入中低纬度又形成另一对(一早一晚)较弱的涡电流（强度为 100000 安培)，电流中心约在纬度 55° 和地方时 6 时，18 时，这与 $S_D(H)$ 的另一反相带相对应。因 S_D 电流体系强度无昼夜之分，故与 S_q 不同，S_D 变化没有明显的昼夜差异。由图 5.34 S_D 的形态不难相信，S_D 的全日波远超过半日波，这也是与 S_q 的显著不同之处。

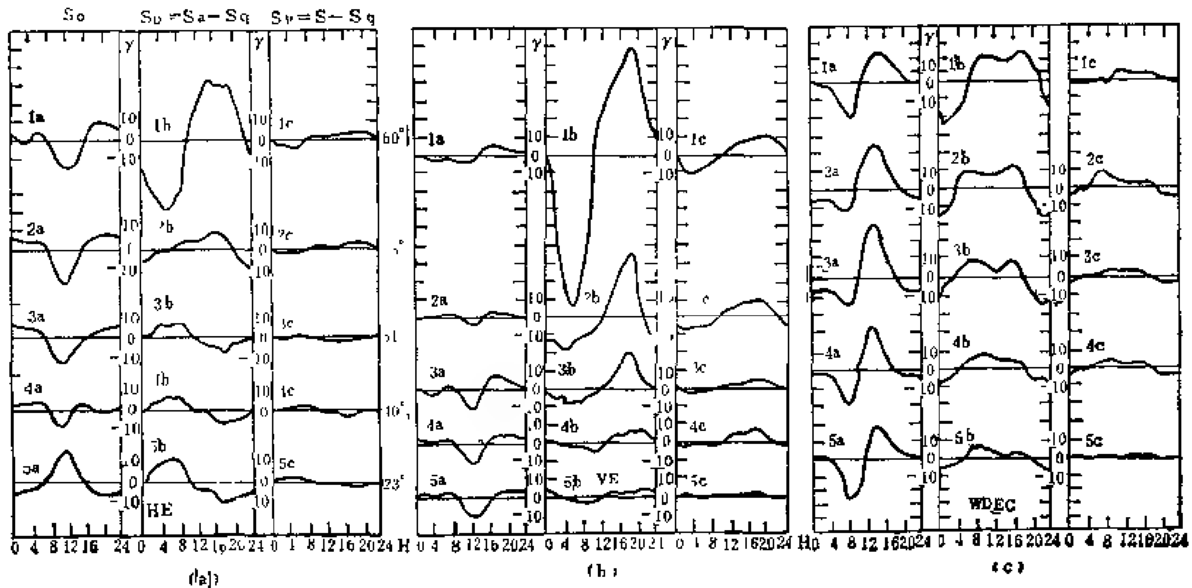


图 5.34 不同纬度 S_D 的统计结果
(*a*) *H*，(*b*) *Z*，(*c*) *D*

D_S 是磁暴时的扰日变化，产生的机制和时空变化规律与 S_D 相同。图 5.36 为弱、中、强不同强度 D_{St} 和相应 $D_S(H)$ 的全日谐波幅度 (2*A*) 随磁暴时间的变化，图中明显的显

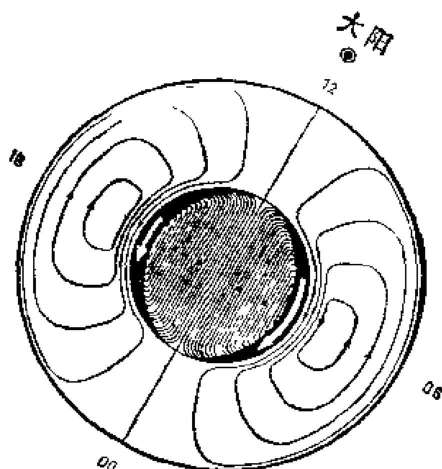


图 5.35 S_D 理想电流体系示意图(北极俯视)

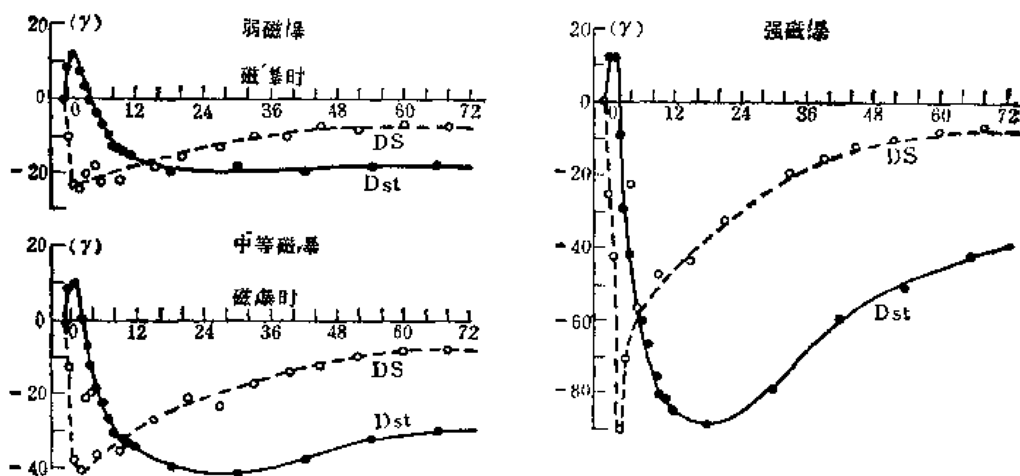


图 5.36 平均磁纬 30° 处不同强度磁暴 D_{St} 和 $D_S(H)$ 随磁暴时的变化[9]

示出 D_S 随磁暴的强弱有显著的变化，开始 D_S 随 D_{St} 变幅成比例的增加，但 D_S 变幅增加较快，约在两小时达到极值，D_S 的恢复也较 D_{St} 迅速。

3. 极区磁亚暴

磁暴场 D 的不规则变化，早先称为极区暴 D_p 和不规则变化 D_i。极区暴是一种延续时间较 D_{st} 主相要短(数小时)的一种扰动。与 $D_{st}(H)$ 在赤道处最强不同，极区暴 D_p 则在极区最强。极区暴不仅在磁暴过程中出现，就是在比较平静的日子，有时也能出现。图 5.37 为高纬度卡乃奇 (College) 台 (磁纬 64°N) 所记录的几个极区暴 D_p，为了比较，图顶部同时用粗实线绘出了对应于大磁暴时的 D_S 变化。由图 5.37 可见，极区暴出现的频次很高，有负的(黑影部分)和正的扰动之分；其强度很大，远远超过规则的 D_S 变化。极区暴 D_p 在中低纬度变幅一般较小，形似海湾，因此又称作湾形磁扰 (B)。图 5.38 是我国北方几个台站记录的湾扰变化。由图 5.32 可以明显看出，在磁暴 D_{St} 主相过程中常伴生许多几分钟至几小时延续时间较短的干扰，这就是不规则变化 D_i。很显然，因在极区 D_{st}

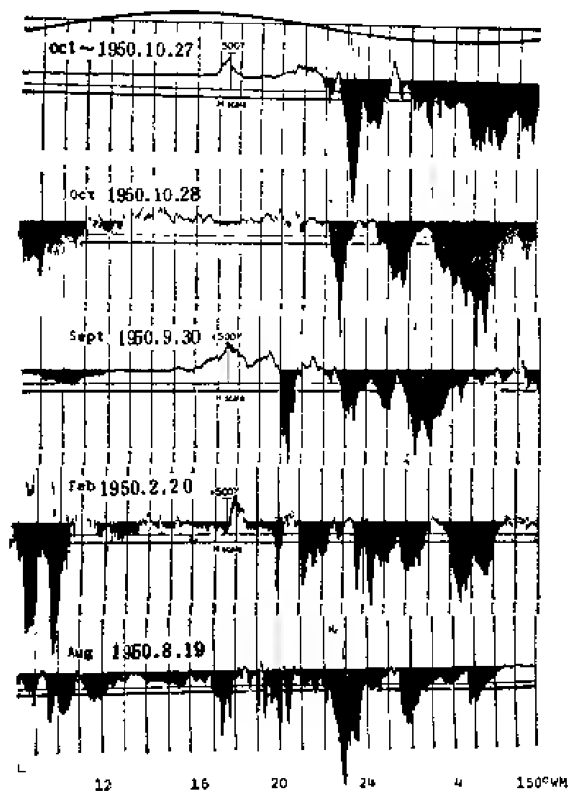


图 5.37　高纬度卡乃奇（College）台（dip lat 64°N）的地磁记录[11]

顶部粗实线为 D_S 变化

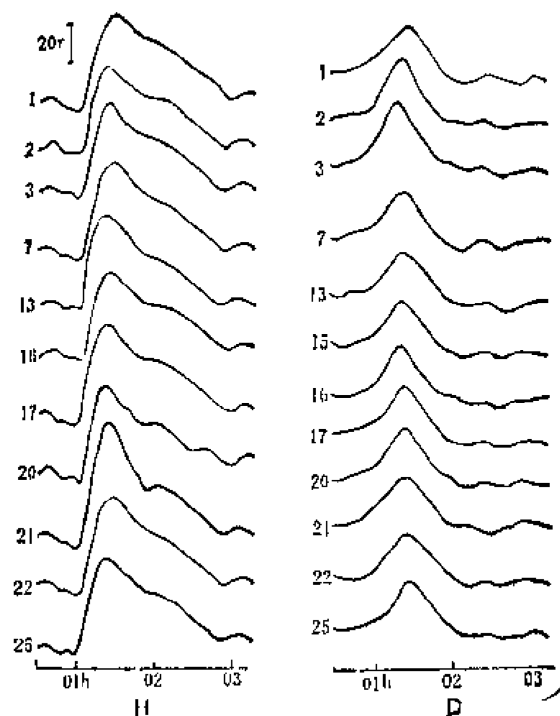


图 5.38　我国台站的湾扰记录[23]

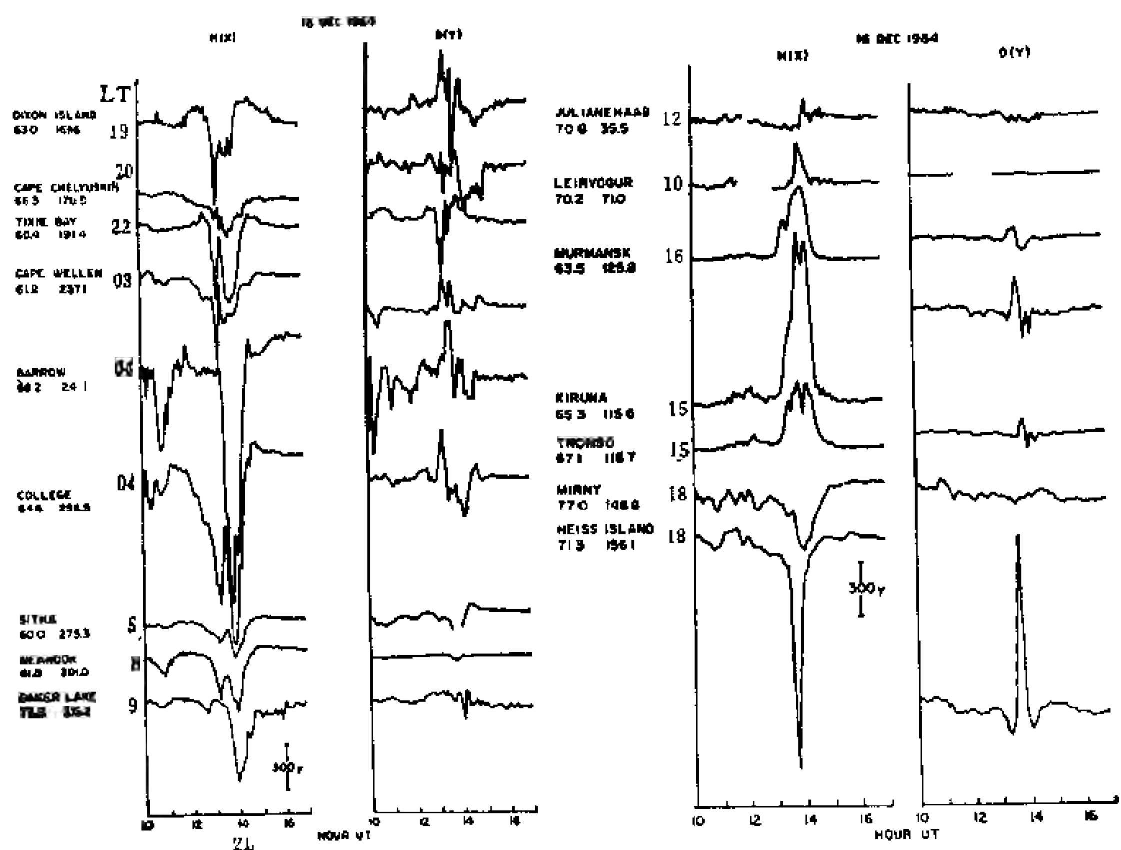


图 5.39　极光带或接近极光带的台站 1964 年 12 月 16 日磁亚暴记录[23]

图中纵坐标数字为相应于 UT 14^h 的 LT

16 DEC 1964

H(X) D(Y)

STONYHURST 56.9;82.7
VALENTIA 54.6;73.5
RUDE SKOV 55.9;98.5
HARTLAND 54.6;79.0
WITTEVEEN 54.1;91.2
NIEMEGK 52.2;96.6
DOURBES 52.0;87.7
CHAMBON-LA-FORET 50.5;84.4
FURSTENFELDBRUCK 48.8;93.3
LOGRONO 46.1;77.2
TOLEDO 43.9;74.7
DEL EBRO 43.5;79.7
SAN FERNANDO 41.0;71.3
ALMERIA 40.6;75.3
TENERIFE 35.0;58.6
M'BOUR 21.3,55.0
ZARIA 13.6;79.1
BANGUI 4.8;88.5

100γ

10 12 14 16 10 12 14 16

HOUR, UT

a

16 DEC 1964

H(X) D(Y)

LOVO 58.1;105.8
NURMIJARVI 57.9;112.6
LENINGRAD 56.2;117.3
HEL 53.4;103.7
MINSK 51.5;110.4
MOSCOW 50.9;120.5
KAZAN 49.3;130.4
LVOV 48.0;105.9
ODESSA 43.7;111.1
TBILISI 36.7;122.1
TASHKENT 32.3;144.0
ASHKHABAD 30.5;133.1
MESALLAT 26.9;105.9
ADDIS ABABA 5.4;109.2
KODAIKANAL 0.6;147.1

100γ

10 12 14 16 10 12 14 16

HOUR, UT

b

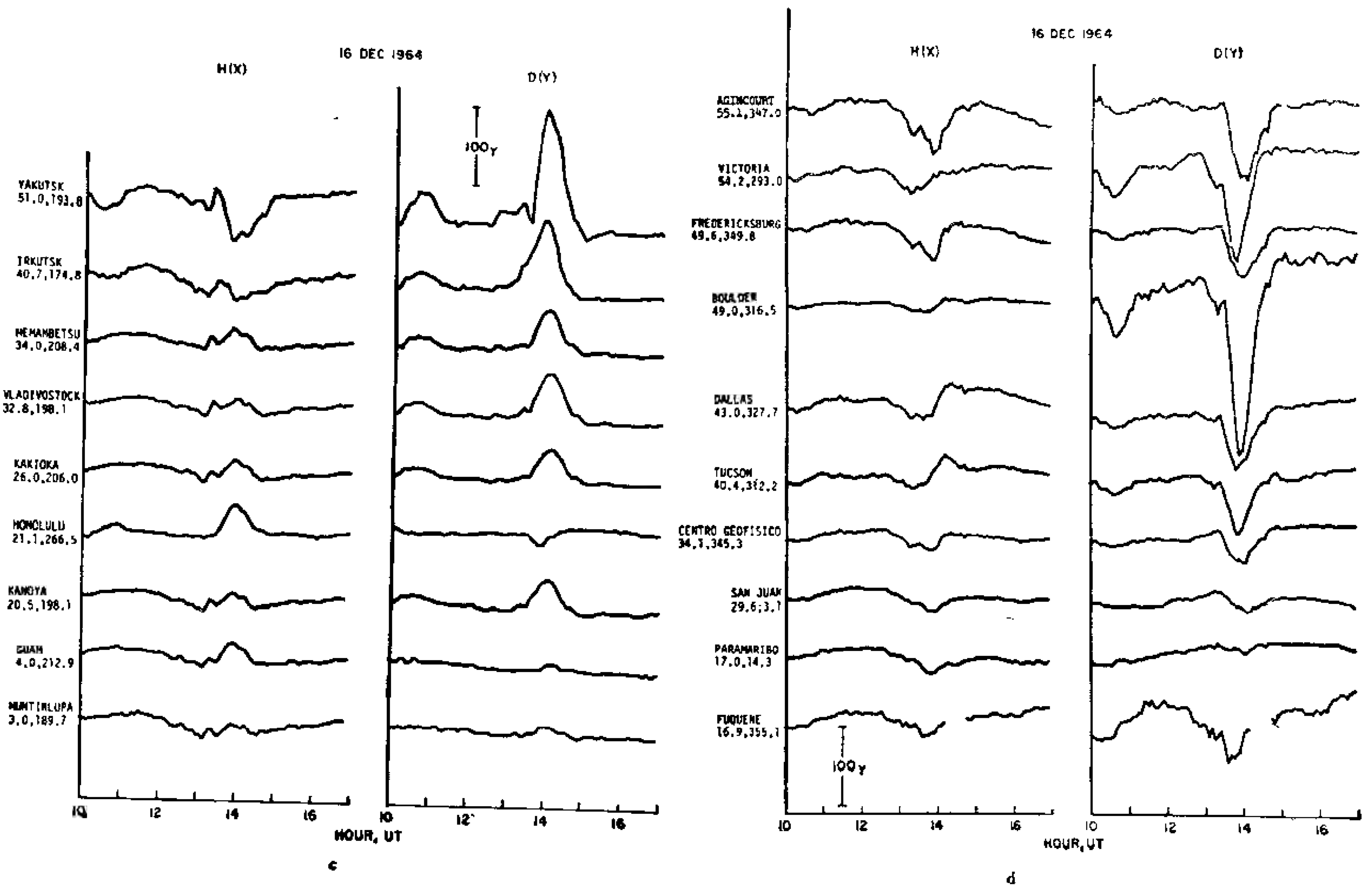


图 5.40　磁纬低于 60° 的四个经度带 1964　12. 16 的磁亚暴记录[35]

a 西欧带(磁经 Λ<100°)　　b 东欧带(Λ>100°)　c 太平洋带　d 美洲带

变化形态已不明显，这种不规则变化和 D_p 很难区分。

自国际地球物理年（IGY，1957—1958）和国际太阳宁静年（IQSY，1958）以后十多年中，地面和火箭，人造卫星的观测取得了丰硕的资料和有关磁暴场的研究结果，但这个时期对于高空各种现象仍缺乏综合性的统一认识。到六十年代末期恰普曼和 Akasofu 磁层亚暴和极区亚暴概念的建立和发展对统一认识高层大气和磁层许多复杂的现象做出了重要贡献[9][25][27]。

磁层间歇性的不稳定性和向极区高层大气投射大量的粒子这一特殊的现象称为磁层亚暴。磁层亚暴在极区的表现，如极光的显示，X 射线爆发，电离层和磁场扰动等统称作极区亚暴，它包括极光亚暴，X 射线亚暴，电离层亚暴和磁亚暴。上述经典概念中的极区暴 $D_p(B)$ 和不规则变化 D_i，甚至暴时日变化 D_s 这些各具特点的地磁扰动都是极区磁亚暴的表现形式，全部统一于磁层亚暴期间极区高层大气所产生的同一性质的电流体系。

（1）极区磁亚暴的形态和地理分布

图 5.39 和图 5.40 是 1964 年 12 月 16 日地磁亚暴的水平分量 H 和偏角 D，共分五个区。图 5.39 为极光带或接近极光带的台站；5.40a. 为西欧经度带（磁经 $\Lambda < 100°$）；b. 东欧带（$\Lambda > 100°$）；c. 太平洋带；d. 美洲带。由图可见扰动最强的时间为世界时 14^h；在极区的干扰变化，无论是形态还是地理分布都比较复杂。偏角 D 除个别台站（Heiss）外，多数形态很不规则，但水平分量（H）仍能呈现出正或负的湾型特征：夜间、傍晚为负湾型，早晨（$LT3^h$—4^h）和纬度处于偏心极光带内的各台站的变幅较大；下午为正湾型，向午时方向强度减弱。磁纬低于 60° 的各区形态比较规则，多呈湾型变化，处于午后时间的（图 5.40a、b）各台全部为负湾型，偏角 D 西欧地区变幅较小，而东欧地区由高纬至低纬变幅系统减小；处于午夜时间的太平洋地区（图 5.40c），水平向量呈东向变化，北向分量变幅较小，高纬地区为负湾型，中低纬度为正湾型，偏角呈正湾型，变化幅度较大，随纬度降低，

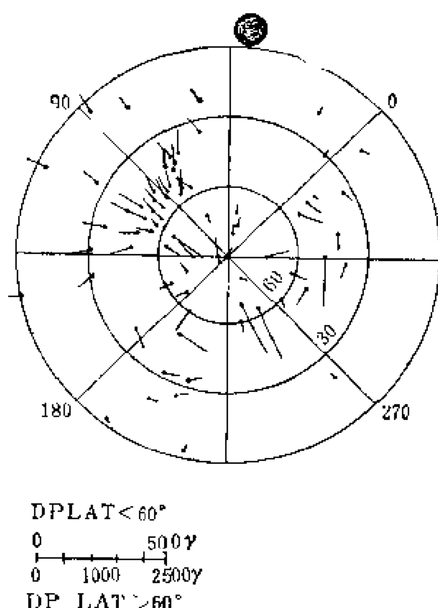


图 5.41　1964 年 12 月 16 日地磁扰动的向量分布[27]

DP LAt 表示磁倾纬度，图中实心圆圈为太阳方向

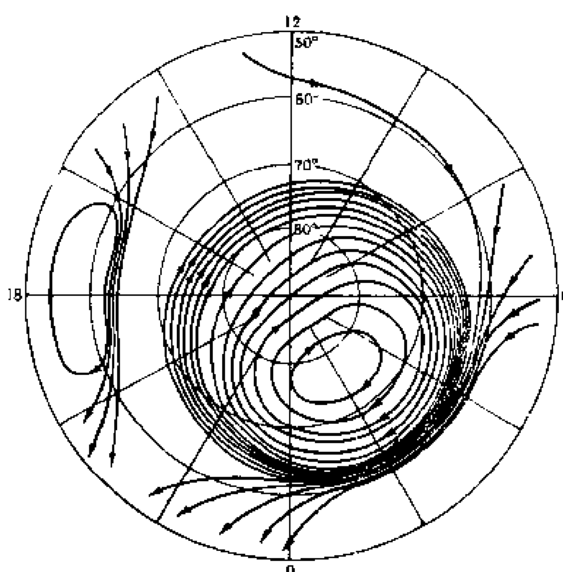


图 5.42　极区亚暴的一种等效电流体系[9]

变幅系统减小；处于上午时间的美洲地区（图 5.40d）水平向量呈西向变化，偏角变化为负，变幅较大。上述不同地区磁场变化世界时 14^h 的平面矢量绘于图 5.41，图中清楚地显示出中低纬度傍晚扰动向量指东，早晨向西的分布。

（2）极区磁亚暴的三维电流体系

如图 5.41 所示以指南向量为主要特征的湾型磁亚暴，可用与图 5.35 所示 S_D 电流相似的等效电流体系得到解释。这种电流最方便的表示是放在与地球同心的球壳薄层内，例如电离层。图 5.42 即表示极区亚暴的一种等效电流体系：早晨较强的沿偏心极光带流动的指西向极区电射流，和傍晚较弱的指东向电射流是这种电流体系的主要部分。这里强调等效二字，原因是当时并没有确切的理由说明，电流为什么必须处于这样的同心球层，更不能说一定要在电离层。以后果真证明，像图 5.42 所示指西向的电射流，仅仅是极区亚暴（包括 S_D）电流体系的一小部分。

为验证上述电流体系的客观真实性，主要进行了两类实验。一是离地心 6.6 倍地球半径处的同步卫星磁场测量，目的是验证低纬度的正或负的湾型磁扰是否由电离层的电流体系所产生；二是极区轨道的卫星测量，以检验是否有电流沿偏心极光带流入或流出。

观测结果表明[9]，太平洋上空同步卫星和地面檀香山（Honolulu）台的磁记录非常相似。很显然，如果湾型磁扰完全是由电离层电流所产生，则两处记录到的磁场方向应该相反，因此他们认为，电离层电流仅仅是扰动源的一小部分。其它观测也得到了同样结论。此外极区轨道卫星磁场和电场的测量果真证实了沿偏心极光带西向电射流的存在。

在以上观测的基础上赤祖父（S. Akasofu）等人先后提出了极区亚暴三维电流体系的图象。图 5.43 是可能的三维图象的一种示意图。当磁层扰动时（亚暴），磁层背向太阳的一面（磁尾）的等离子层中的粒子运动，形成强达 10^7 安培的磁尾电流，由黎明一侧横穿磁尾流向黄昏一侧（$A \to B$），其中部分粒子在早晨一侧沿磁力线注入极区电离层（$B \to B'$）形成沿偏心极光带的西向电射流（$A' \to B'$），然后再在晚上一侧沿磁力线流出（$B' \to B$），与此同时赤道环电流（$C \to D$）内的粒子，在傍晚一侧进入磁层深部并到达电离层（$D \to D'$），形成东向电射流（$D' \to C'$），在早晨一侧又返回环电流（$C' \to C$）。从图 5.43 可以看出，极区亚暴三维电流体系主要包括两个反方向的沿磁力线的场向电流，一个位于早晨一侧，在赤道处方向向上，在极区方向向下；一个位于傍晚；两个电离层

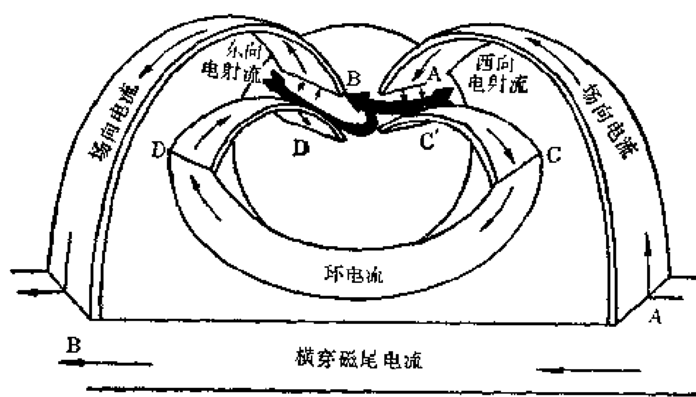


图 5.43 极区磁亚暴一种可能的三维电流分布示意图[17]
（画面为背阳面）

内的反方向的电射流，一个向西位于早晨一侧，强度较强，一个向东在傍晚一侧。这种三维图像，可定性地解释图 5.40 所示磁场的向量分布。特别是沿磁力线的场向电流（$A \to A'$，$B' \to B$）可很好地说明在中低纬度傍晚扰动向量指东，早晨向西以及纬度越低幅度越小的空间分布。当然，完整的空间三维电流图像至今仍不十分清楚。

五、地磁场的空间形态

（一）近地面和核内磁场

如前所述，地球表面磁场的观测和球谐分析结果表明，地磁场的主要部分来源于地球内部，近似为一个地心偶极子的磁场，其磁轴和地球转动轴的夹角为 11.5°，磁矩约为 8.0×10^{25} 电磁单位，磁场强度在南北磁极约为 0.6 高斯。以偶极子磁场为主要特征的地磁场的高斯级数（5.86）是拉普拉斯方程的解。那么地球表面高斯分析的结果，对于满足方程的全部空间将都能适用。因此，可以预期，地面分析的上述结果，表征了近地面空间地磁场的主要形态，可用示意图 5.44 近似描述。若忽略地壳和地幔的电导率，则这样的描述在地壳和上地幔也将是适宜的。

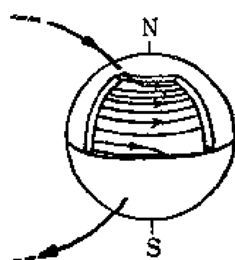


图 5.44 近地面空间偶极子磁场的形态和核内环型场

在地核内，电导率较高，特别是液体外核，这里是地磁场起源的“发电机”的场所，拉普拉斯方程已不再适用。因此在核内磁场的空间形态将不同于自由空间。在本章第一节已经证明，如(5.82)和(5.83)所示的极型场和环型场将是导体内磁场的可能解。上述核外偶极子磁场正是核内一阶极型场 S_1 在核外的表现。由连续条件可知，核内极型场将与地幔偶极磁场是同量级的。与极型场不同，环型场则仅仅是核内所特有的，据“发电机”理论推测（第六章），其主要成份是二阶环型场 T_2^0，强度可达几百高斯，它决定了核内磁场的主要形态。T_2^0 示意绘于图 5.44。

（二）高 空 磁 场

关于近地面空间磁场的形态，上面只笼统地说仍可由(5.86)式表示，和地面磁场有相同性质（图 5.44）。究竟(5.86)式适用范围如何？更远空间磁场的形态又是怎样的？自六十年代以来，空间技术的发展才较正确地回答了这些问题。空间磁场的测量多为总强度的标量测量（F）。因此如何利用 F 测量验证(5.86)的适用性或用它修正地面高斯分析的结果，就成为高斯球谐分析方法很重要的内容。这里先简要介绍 F 场的分析技术。

因为 $F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$，故与各分量场不同，F 和高斯系数 g_n^m，h_n^m 是非线性关系，在计算中不像分量公式那样，便于用最小二乘法技术，以得到最小的计算误差。为此可先将 F^2 展成为泰勒级数，只取它的线性项，即

$$F^2 = F_0^2 + \sum_{i=1}^{3} 2B_i\left(\frac{\partial B_i}{\partial g_n^m}\,\delta g_n^m + \frac{\partial B_i}{\partial h_n^m}\,\delta h_n^m\right) = F_0^2 + 2\sum_{n,m}\left[G_n^m(\delta g_n^m) + H_n^m(\delta h_n^m)\right]。\tag{5.186}$$

其中 $B_1 = Z_0$、$B_2 = X_0$，$B_3 = Y_0$

$$
\left.\begin{aligned}
G_n^m &= \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\Big[Z_0(n+1)(\cos m\lambda)P_n^m(\cos\theta) \\
&\quad - X_0\cos m\lambda\,\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + Y_0(m\sin m\lambda)\,\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\Big], \\
H_n^m &= \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\Big[Z_0(n+1)(\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) \\
&\quad - X_0\sin m\lambda\,\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} - Y_0(m\cos m\lambda)\,\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\Big]。
\end{aligned}\right\} \tag{5.187}
$$

F_0，X_0，Y_0，Z_0 是由地面分析所得高斯系数按(5.132)计算所得高空测点处的相应磁场值。F 为同一测点磁场的实测结果。(5.186)中 F 与 δg_n^m 和 δh_n^m 已经是线性关系。因此可利用最小二乘法求得最适合实测值 F 的高斯系数改正量 δg_n^m 和 δh_n^m。这是利用卫星空间磁测(标量 F)进行高斯分析常用的方法。

定义

$$E = (F^2 - F_0^2)/2F,$$

因，

$$F^2 - F_0^2 = (F - F_0)(F + F_0),$$

则

$$E = (F^2 - F_0^2)/2F \cong F - F_0。 \tag{5.188}$$

即 E 是观察值与计算值的误差量。很显然(5.188)成立，则可直接由(5.186)计算误差量 E。先驱者 3 号卫星利用质子旋进磁强计所得 2800 次磁场 F 的测量，其误差 E 的分布如图 5.45 所示。其中仪器测量误差为 10 伽伵，E 的均值为 8 伽伵，均方根值 (RMS) 21 伽伵，相应正态分布的方差 σ 为 12 伽伵。RMS 与 σ 的差异，即 E 对正态分布的偏离，是由于测量包括了磁场扰动的时间，它反映在图 5.45 中存在一个较大的负值尾巴[22]。因(5.186)中忽略了外源场，要再提高上述分析精度已很少可能。先驱者 3 号的飞行高度低于 0.6 个地球半径，测量范围从 400 公里至 4000 公里。因此图 5.45 的结果表明，约在 0.6 个地球半径处，空间磁场仍有与地面磁场相同的分布形态。

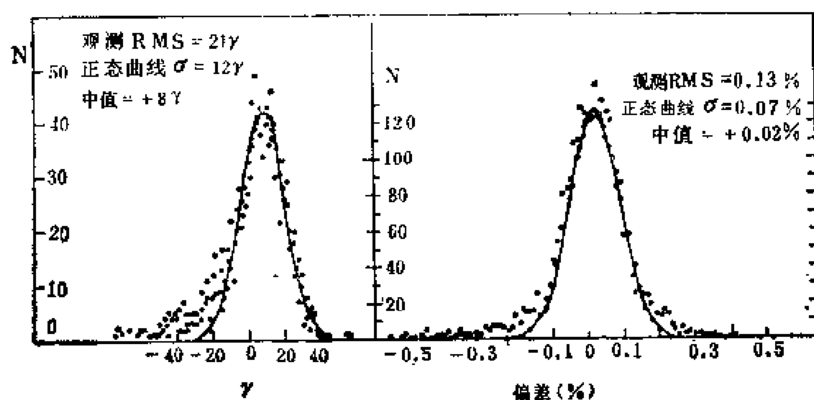


图 5.45 先驱者 3 号测量结果 ΔF 和 $\Delta F/F$ 的分布[22]

$\Delta F = F - F_0$ 高斯级数 $n \leqslant 7$，图中纵坐标 N 为单位伽伵(左)和 0.1% 间隔所落入的观测次数

(三) 磁　层

与地核内情况一样，在几个地球半径以外的高层空间，地磁场的高斯级数(5.86)也已经不再适用，其主要成份偶极子磁场不再像近地面空间那样，随高度以 r^{-3} 的规律向外无限延伸，而是被局限在空间一定的范围之内。这个磁场存在的（包括近地面空间在内的）空间称为磁层。磁场是地球空间环境的组成部分，在许多自然现象中有着重要作用。因此磁层研究是空间科学的一个重要领域。由于六十年代以来空间探测技术的进展，磁层的观测和研究也获得迅速发展，取得了极其丰硕的成果。

太阳连续不断地向外发射等离子体，这叫做太阳风。太阳风是良导体，当它吹向地球时，由于如方程(5.27)所示磁场的冻结效应，地磁场向太阳的一面将被压缩，背阳面将被拉伸，最外面形成一个包体，包体之外没有磁力线。所以地磁场只局限在一个空洞之内，形成了上面所定义的磁层。正是由于太阳风与磁层相互作用，在太阳风等离子体的表面形成感应电流，大大改变了原来偶极子磁场的结构，形成了如图 5.46 所示的磁场的复杂形态。

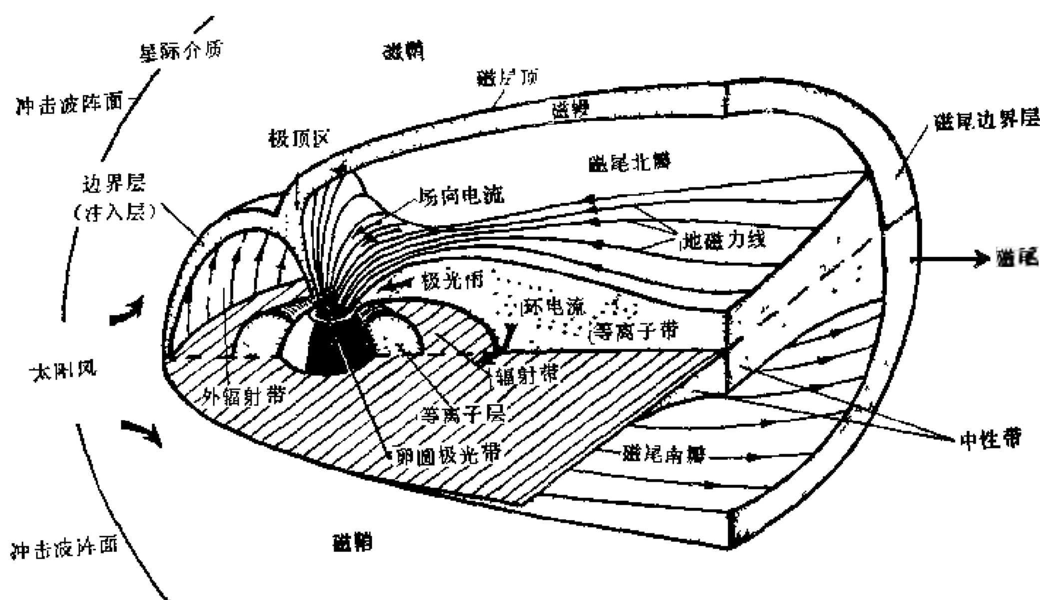


图 5.46　磁层结构示意图

高空磁场的边界叫做磁层顶。磁层是随着地球在空间运行的。朝着太阳的那一边，磁层顶离地心约八至十一个地球半径远，随着太阳风的风速和离子密度而变化。背着太阳的那一边，磁层顶延伸得很远，形成一个磁尾，宽度约有十五至二十个地球半径，长度至少超过月球的距离，可能达到一千万公里。太阳风相对于地球的速度约每秒 300—600 公里，但这个等离子体内部扰动的传播速度（阿尔芬波）每秒只有 25 至 90 公里。如同物体在空气中以超音速运动时在它前面产生冲击波一样，磁层顶相对于太阳风的运动在它前面也将产生一种类似于冲击波的波阵面。在磁层顶与冲击波之间的区域叫做磁鞘。在地球和太阳的连线上，磁鞘的厚度约有四个地球半径。磁尾部分南北半球的磁力线是相反

的，中间有一个中和带。在中和带的两侧磁场转向，等离子体可由磁层两边进入这里形成等离子层，在离地球约有十个地球半径距离处，这个层分成两支进入极光区。最早极光带被理想化为以磁极为中心半径角距为23°的圆。但近代的观测发现，极光相对磁极呈偏心分布，向阳面纬度很高，背阳面纬度较低，为了和原极光带(auroral zone)的意义相区别，特称极光的这种实际分布为卵圆极光带 (auroral oval)。极光的这种偏心分布，正是磁层结构相对于磁轴非对称性的一种表现。

参 考 书 目

[1] 王振铎，1948，司南、指南针与罗盘经，中国考古学，**3**，**4**，**5**.

[2] 傅承义，1976，《地球十讲》，科学出版社.

[3] Chapman, S., and J Bartels, 1940 *Geomagnetism*, **2**, Oxford Univ Press, London

[4] Malin, S R C, and S B Procock, 1969 Geomagnetic spherical harmonic analysis, *Pure and Applied Geophys.*, **75**, 117—132

[5] IAGA Commision 2 Working Group 4, 1969 International geomagnetic reference field 1965 O, *J Geophys Res*, **74** 4407—4408

[6] IAGA divisional Study Group, 1976 International geomagnetic reference field 1975 O, *Geophys. J R astr Soc*, **44**, 733—734.

[7] 力武常次，1972，《地球电磁気学》，岩波書店。

[8] Cain, J C, 1979 Main field and secular variation, *Revs Geophys Space Phys*, **17**, 273—277.

[9] Akasofu, S, and S. Chapman, 1972 *Solar-Terrestrial Physics*, Oxford at the Clarendon Press

[10] Yukutake, T, 1968 The non-dipole part of the Earth's magnetic field, *Bull Earthq Res Inst, Tokyo Univ*, **46**, 1027—1074

[11] Bullard, E C et al, 1950 The westward drift of the Earth's magnetic field, *Phil Trans Roy Soc*, *A* **243**, 67—92

[12] Yukutake, T, 1962, The westward drift of the magnetic field of the Earth, *Bull. Earthq Res. Inst., Tokyo, Univ*, **39**, 467—476

[13] Yukutake, T, 1968 The westward drift of the geomagnetic secular variation, *Bull Earthq Res Inst, Tokyo, Univ* **46** 1075—1102

[14] Yukutake, T., 1968 The drift velocity of the geomagnatic secular variation, *J Geomag Geoelec* **20**, 403—414

[15] Stacey, F D, 1977 *Physics of the Earth*, 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc.

[16] Alldredge, L R, and L Hurwitz, 1964 Radial dipoles as the sources of the Earth's main magnetic field, *J Geophys Res*, **69**, 2631

[17] Yukutake, T, and H. Tachinake, 1969 Separation of the Earth's magnetic field into the drifting and standing parts, *Bull Earthq Res Inst, Tokyo, Univ* **47**, 65—97

[18] Vestine, E H, and A Kahle, 1968 The westward drift and geomagnetic secular change, *Geophys J R astr Soc*, **15**, 29—37

[19] Vestine, E H, 1953 On variations of the geomagnetic field, fluid motions and the rate of the Earth's rotation, *J Geophys Res* **58**, 127—145

[20] Malin, S R, and A D Clark, 1974 Geomagnetic secular variatin 1962 0-1967 5, *Geophys. J R astr Soc*, **36**, 11—20

[21] Yukutake, T, 1973 Fluctuations in the Earth's rate of rotation related to changes in the geomagnetic dipole field, *J Geomag. Geoelec*, **25**, 195—212.

[22] Matsushita, S., and W H Campbell, 1967 *Physics of Geomagnetic Phenomena*, Acad Press, New York and London

[23] 祁贵仲，1975，局部地区日变场的分析方法及中国地区 S_q 场的经度效应，**18**，104—117。

[24] Benkova, N P, 1940 Spherical harmonic analysis of the Sq variations, May August 1933, *Terrest Magn. Atmosph Electr.*, 45, 425—432

[25] Akasofu, S., 1968 *Polar and Magnetospheric Substorms*, D. Reidel Publ Co, Pordrecht Holland

[26] 祁贵仲等，1981．渤海地区地磁短周期变化异常和上地幔高导层的分布，中国科学，7，869—879．

[27] Akasofu, S, 1977 *Physics of Magnetospheric Substorms*, D. Reidel Publ Co, Pordrecht Holland

[28] Swift, D W, 1979 Auroral mechanisms and morphology, *Res. Geophys. Space Phys.*, **17**, 681—696

第六章　古磁场及其成因

古地磁是地磁学的一个分支，它是通过测定岩石剩余磁化强度来研究史前地质时期地磁场及其演化规律的一门学科。古地磁学还包括人类历史时期焙烧物剩余磁化方向的测定和历史时期地磁场的研究，这一部分又称为考古地磁学。

古地磁是五十年代兴起的一门年轻学科，但在六十年代和七十年代获得了迅速的发展。板块学说的诞生，很重要的基础就是古地磁学的研究成果。因此有人说，近年来地球物理学中最令人鼓舞的成就是在古地磁学领域取得的。遍布全球各地的岩石，古代原始的焙烧物，记录了其形成时期地磁场的方向乃至强度，就好象大自然为我们在全球建造了成千上万的史前和史期“地磁台”或“磁测点”。地磁场的现代记录充其量只有400年，这种古“地磁台”在相当程度上弥补了地磁场现代记录的不足，扩大了人们地磁学研究的时间视野，为地磁场长期变化和地磁场起源的研究提供了丰富的资料。随着地壳的变动，这种古“地磁台”也随之运动，但它的“原始记录”有时却可完整地保留下来。利用古地磁场的规律可以追溯这种“地磁台”的原生地和运动过程。因此古地磁学对于构造运动的研究也具有直接的意义。这也是近年来古地磁学迅速发展的原因所在。

古地磁学的物理基础是岩石磁性和地磁场轴向偶极子的假定。古地磁学的主要结果都是在这样的基础前提下得到的。尽管古地磁记录有着重要的意义和应用，但测量的磁场精度和时间精度与现代记录是不能相提并论的。因此对于其结果的判断和应用，必须慎重考查古地磁学的上述基础前提，注意它的条件和精度。这一点在目前古地磁学迅速发展和广泛应用的情况下，有特别强调之必要。

一、岩石磁性

大多数岩石都含有少量(0.1—10%)铁磁性或亚铁磁性矿物，例如磁铁矿（Fe_3O_4）、磁赤铁矿（γFe_2O_3）以及赤铁矿的固熔体——钛铁矿（Fe_2TiO_4）等。岩石磁性本质上是岩石中这种铁(亚铁)磁性矿物磁化的结果。因此岩石磁性的物理基础是铁磁学。古地磁研究感兴趣的是那些磁性稳定并在漫长的地质时期能够保留初始磁化的岩石。岩石磁性的稳定取决于获得磁性的方式和岩石中磁性矿物的成份和结构。下面我们从岩石磁性的物理基础、岩石磁性的获得、岩石磁性的稳定性三个方面概述岩石磁性的部分内容。

（一）岩石磁性的物理基础

物质有抗磁性、顺磁性和铁磁性之分。物质磁性的这种差异是由于微观原子结构的不同。

原子因电子绕原子核运转而获得轨道磁矩，当没有外磁场时，物体内原子轨道磁矩无

序排列，宏观上显示不出磁性。在外磁场作用下，电子轨道偏转。偏转的取向应趋向于反抗外加磁场，因而物体获得反向磁化，称为抗磁性。很显然，所有物质都具有抗磁性，只是有些物质的抗磁性被其它性质淹没罢了。许多常见的矿物，例如石英和长石都具有明显的抗磁性。

除轨道磁矩外，电子还具有自旋磁矩，在原子各壳层（能级）内，电子成对出现，自旋相反，自旋磁矩互相抵消。然而在一个原子的不同壳层中，也有可能存在若干非成对的电子，这种非成对电子的自旋磁矩称为玻尔磁子。在外磁场中，玻尔磁子顺外场方向排列，这种性质称为顺磁性。因此存在这种非成对电子的物质就是顺磁质。常见的顺磁性矿物有Mn^{+2}，Fe^{+3}，Fe^{+2}。外磁场使自旋取向，而热运动则将阻碍这种趋向。居里首先发现，顺磁磁化率与温度成反比。抗磁性与顺磁性物质都是弱磁性，磁化率约为 10^{-6}（电磁单位）。

有些含有非成对电子的物质，相邻原子间非成对电子相互作用导致强的自发磁化，在外场作用下，这种物质沿外磁场磁化加强，外场取消后仍能保持这种磁化。这种具有自发磁化和保留外场磁化的特性称为铁磁性。铁磁性物质原子间非成对电子（玻尔磁子）的相互作用称为"交换耦合"。铁磁性比抗磁、顺磁性要大几个数量级。这种原子间的直接交换耦合由于原子间距离不同有正有负，有些负交换耦合可通过中间原子传递又称为超交换耦合。根据交换耦合性质的不同，铁磁性可分为铁磁性、亚铁磁性、反铁磁性和斜反铁磁性四种。铁磁性是原子间直接正的平行耦合，玻尔磁子有很强的自发磁化，金属 Fe、Co、Ni 就具有这种性质。这类金属的氧化物的晶格可分为 A、B 两个亚晶格，每个晶格有相同方向的自旋磁矩，但两个亚晶格间的金属离子（例如 F^{3+} 和 F^{3+}），形成超距离耦合，自旋磁矩彼此逆平行。如果 A 的总的自旋磁矩大于 B，则仍具有较强的自发磁化，这就是亚铁磁性，磁铁矿（Fe_3O_4）就属于这一类；如果 A、B 的自旋磁矩相等，净自发磁化为零，则称为反铁磁性，例如 MnO、NiO；有些物质 A、B 自旋磁矩虽然相等，但并不完全逆平行，而有一个小的角度，形成微弱的自发磁化，赤铁矿（γFe_2O_3）就是如此，称为斜反铁磁性。四种原子磁矩这种交互作用的排列状况示意如图 6.1。铁磁性物质的自发磁化和温度有关，高于某一临界温度（T_c），自发磁化消失，铁磁性变成简单的顺磁性。T_c 称为居里点。

铁磁性物质原子间的交互耦合使自旋磁矩规则排列，产生较强的自发磁化。自发磁化所产生的静磁作用，将阻碍自旋磁矩的这种规则排列，以使总能量达到最小。这种矛盾的相互作用的结果，物质被分成许多小的区域，同一区域有相同方向较强的自发磁化，而不同的区域则可能有不同方向的磁化。

这种被分割的小的区域单元称为磁畴。相邻磁畴被磁畴壁分割，磁畴壁附近还存在一些未被定向排列的自旋磁矩。正是这种磁畴形成的结果使得总能量尽可能达到最小。

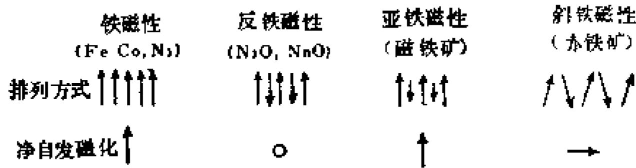


图 6.1　原子间交互耦合形成的原子磁矩的基本排列[1]

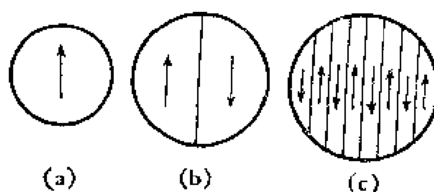


图 6.2 磁化示意图

(a)单磁畴 (b)双磁畴 (c)多磁畴

因此尽管单个磁畴有着很强的磁化，但铁磁性物质可能没有或只有很弱的自发磁化。磁性物质由于颗粒尺度的不同，将有单磁畴、双磁畴和多磁畴等不同的磁畴结构（图 6.2）。铁磁性物质的磁畴理论以及不同尺度的结晶颗粒磁畴结构的特性构成了岩石磁学的主要物理基础。

（二） 岩石天然剩余磁化强度（NRM）的获得

岩石可以通过许多不同的途径获得天然剩余磁性，其主要途径有以下几方面。

1. 等温剩磁（IRM）

处于能量最小状态的铁磁性物质，在外磁场的作用下，磁畴壁发生移动，自发磁化与外场同方向的磁畴将扩大，物体获得外磁场方向的宏观磁化。当外磁场很弱时，磁畴只能越过由于晶体缺欠所形成的畴壁附近的低能级位垒（图 6.3，畴壁由 1→2）只有少量畴壁附近处于中间状态（未完全定向排列）的自旋磁矩沿外场磁化，当外场移去后，在静磁能作用下，畴壁又恢复原来位置，过程是可逆的。当外场够强时，磁畴壁越过了更高能级的位垒（图 6.3 由 1→3），去掉外场后，畴壁不能复原，物体获得了剩余磁化。只有施加适当强度的反向磁场，畴壁才能克服高能级的位垒，恢复到原来位置，这个反向磁场 H_c 称为矫顽力。若外场继续增强，所有移动的磁畴壁都愈过了高能级位垒，磁化达到饱和。这种过程所获得的剩余磁性（饱和或非饱和）称为等温剩磁。

磁化达到饱和后，若外场继续加大，则外场将把自发磁化与外场不同向的磁畴内的单个自旋磁矩也拉向外场方向，转动这些自旋体的能量比推动磁畴壁所需要的能量要大得多，去掉强外磁场，标本仍将恢复其饱和数值。单磁畴粒子因没有如图 6.3 所示畴壁移动

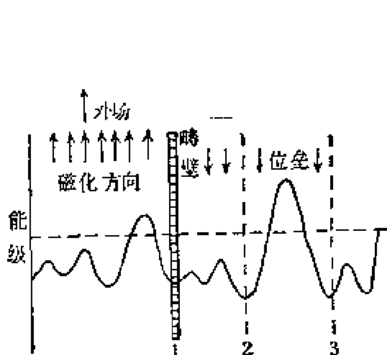


图 6.3 磁畴壁越过位垒的移动示意图[2]

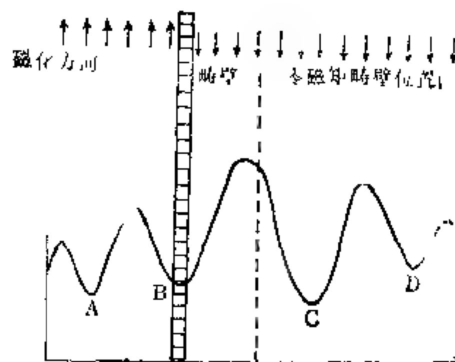


图 6.4 准单磁畴磁化稳定性示意图[1]

的过程，因此它的磁化犹如上述多磁畴饱和后的磁化，只有在强磁场作用下，才能使自旋与外场方向不同的磁畴发生转动，沿外场方向定向排列，当外场一经撤掉，单磁畴粒子仍恢复原来取向。这种单磁畴的特性在岩石磁学中特别重要。斯泰西（Stacev）[1] 指出，在岩石中，直径小于15微米的多磁畴铁磁性颗粒，由于其磁化的稳定犹如单磁畴，称为"准单磁畴"，在古地磁研究中有特别重要的意义。可用图6.4示意说明准单磁畴磁化的稳定：因颗粒很小，被磁化的双磁畴有可能处于如图所示的磁化状态，"零"磁化位置处于高能级的不稳定状态，因此系统不能退磁，磁化象单磁畴一样是稳定的。磁畴颗粒大小对于岩石磁性的影响仍然是近代岩石磁学研究的重要内容[3]。

2. 热剩磁（TRM）

岩浆岩在外磁场中冷却到居里点（T_c）时，铁磁性成分开始出现自发磁化。当温度低于居里点后，磁畴逐渐形成，并在外磁场作用下磁化。这种冷却过程所获得的剩余磁性称为热剩磁。已经证实，岩石在冷却过程中获得的总的剩余磁化强度，等于每一温度区间所获得的剩余磁化强度的总和。热剩磁的这一规律称为部分剩余磁性（PTRM）定律（图6.5）。热剩磁具有强度大稳定性强的特殊性质，在古地磁研究中占有十分重要的地位。而热剩磁的起源则是岩石磁学研究所关注的重要问题[3]。

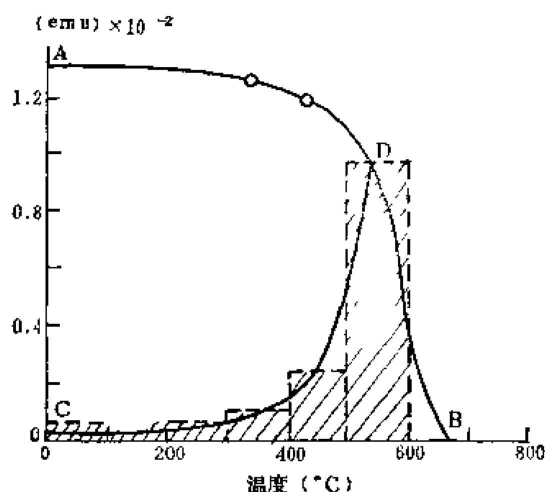


图6.5 各温度区间所获得的部分剩余磁化强度（PTRM）
阴影部分的总和，等于总的剩余磁化强度（OA）

3. 沉积剩磁（DRM）

某些沉积物中含有少量的微小的铁磁性颗粒，在沉积过程中沿着外磁场的方向排列，从而获得沉积剩磁。沉积剩磁是沉积过程中的等温磁化，如上所述，小于15微米的铁磁性沉积颗粒具有稳定的剩余磁性。沉积剩磁远小于热剩磁的强度。

4. 化学剩磁（CRM）

某些沉积物中的铁磁性矿物，在沉积过程或沉积后期经历化学变化（如氧化作用），随之而产生的磁化称为化学剩磁。红色砂岩的磁性就是来源于化学剩磁。

5. 粘滞剩磁（VRM）

粘滞剩磁实质上是同时间相联系的等温剩磁。把磁性物质放在磁场中，只要时间很长，即使磁场很弱，也会被外磁场慢慢磁化。具有显著粘滞剩磁的岩石在漫长的地质时期破坏了初始磁化的剩磁，不适于古地磁学的研究。

岩石由以上各种方式所获得的天然剩磁有强弱很宽的强度范围，可从 10^{-7}—10^{-2} (e.m.u)。

（三）岩石磁性的稳定性

我们已经看到，由于岩石中含有少量铁磁性（严格讲应是亚铁磁性）矿物，在其形成过程中，受到地磁场的作用，获得了不同性质不同强度的天然剩磁（NRM），确实起到了记录地磁场的效果。但很显然，在古地磁研究中有意义的是那些在漫长地质时期保留了形成时期初始磁化的岩石。因此这里必须回答两个问题，第一，是岩石初始磁化的稳定性；第二，即使初始磁化是稳定的，在岩石形成后的漫长地质年代中，由于粘滞效应、化学作用、其他强电磁场（例如雷电）的干扰等原因，也难免遭遇再磁化。因此，如何消除这些在古地磁研究中没有意义的再磁化，恢复稳定的初始磁化是很重要的。这种消除再磁化、恢复初始磁化的过程称为岩石的"净化"。

初始磁化的稳定，包括外磁场和时间两个因素的作用。上面已经讨论，岩石中直径小于 15 微米的铁磁性颗粒，具有单磁畴磁化稳定的特性（图 6.4），磁化后不易再受到地磁场等较弱磁场的影响。因此在外磁场中这类岩石的磁化是稳定的。所谓时间效应是指由于电子的热运动等因素的作用，岩石所获得的磁性随着时间总是要衰减的。这种衰减称为"张弛"。岩石剩磁的张弛时间有长有短，具有很宽的谱。研究得出，张弛时间 $\tau\propto$

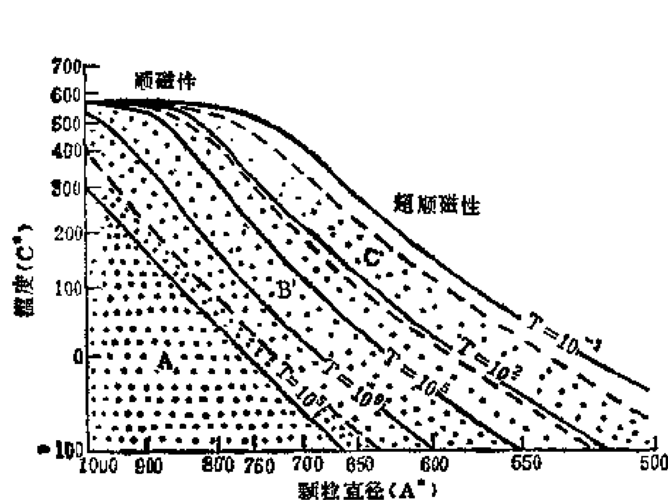


图 6.6　磁铁矿温度和颗粒尺度（Å）对张弛时间 τ（秒）的影响[2]

A区的 τ 与地质时期相对应，C区与实验室的时间尺度相对应

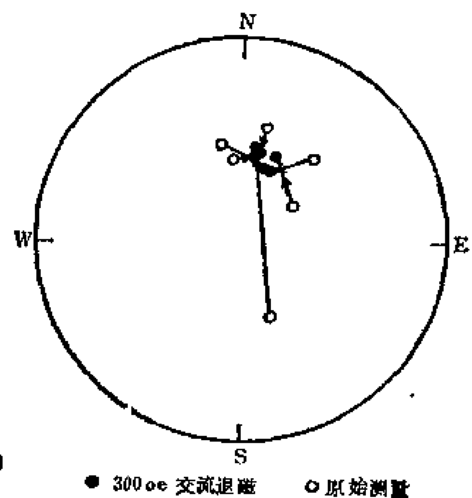


图 6.7　净化前后岩石标本磁化方向的比较[1]

○ 净化前

● 净化后

净化方法：300奥斯特交变电磁场退磁

exp(V/T)，V是磁性颗粒的体积，T是温度。图 6.6 给出了不同颗粒尺度和不同温度的张弛时间 τ，图中A区张弛时间已接近或超过 10^9 年。显然，具有这种特性的岩石在漫长的地质年代中，能够完整地保留它所获得的初始磁化。从以上分析不难了解，颗粒小，具有对外磁场作用稳定的特性，颗粒大则在时间效应上是稳定的。斯泰西 (Stacey) 所说直径小于15微米的铁磁性颗粒在古地磁研究中的特殊意义，正是考虑了外磁场作用和时间效应两个矛盾因素的结果。

初始磁化的稳定性是岩石净化的前提，在大多数情况下，粘滞磁化，雷电、低温加热、冷却等获得的再磁化比起稳定的初始磁化来是"软"的，具有较小的矫顽力。 因此利用交变电磁场或在零磁空间（即除去地磁场和外界干扰磁场的实验空间）适当加温等退磁办法，可以去掉这种"软"的再磁化，而保留下稳定的初始磁化。 图 6.7 为岩石净化前后磁化方向的比较，净化后磁化方向明显的集中了。很显然，再磁化强度较大，较为稳定的岩石不适于古地磁学的研究。

最后还必须强调，由于铁磁矿物性质的差异、磁化过程的复杂以及漫长地质年代的变化，即使做了上述各种实验与分析，在古地磁研究中岩石磁性的选择与分析仍需十分谨慎。

二、古 磁 场

（一）史前和史期地磁场的长期变化

年代较为准确的熔岩、沉积系列、烘烤过的粘土以及焙烧文物等剩余磁性的测定，为地球长期变化的研究提供了有价值的资料。下面从地磁场方向和强度的变化两个方面简要介绍其中主要的结果。

1. 地磁场方向的变化

当标本的产状、方位已知时，由标本的剩余磁化方向就能容易地确定标本产地的地磁场的倾角和偏角(相对于现代的地理北极)。因此已有许多史前和史期地磁场方向的测定结果。其中最早见于 1925 年薛瓦利埃 (R. Chevallier) 的论述。他测定了西西里埃特纳火山 (Mt. Etna) 熔岩流的剩余磁化，确定了直至 12 世纪的地磁场方向。结果表明，由熔岩确定的地磁场方向与附近地磁场直接测定的结果相当一致，肯定了古地磁方法的有效性。 随后约翰逊 (E. A. Johson)、道尔 (R. R. Doell) 和考克斯 (A. Cox) 等人[4]相继测定了不同地区熔岩的剩磁，把地磁场的变化追溯到了几万年前，甚至到史前。这些结果都表明，至少在几百万年内地磁场的方向与现在地磁场差别不大，它围绕地理北极连续地摆动。关于地磁极的移动将放到下节叙述。

行武毅[4] 1962 年系统分析了日本地区古地磁和考古地磁方法偏角和倾角的测定结果。图 6.8 是永田由日本中部地区沉积层纹泥系列的剩磁测定的偏角和倾角，图 6.9 是永田、行武等人所得近二千年来偏角和倾角的变化。从图 6.9 看出，不同作者测得的长期变化的趋势是相近的。这说明结果有一定的可靠性。 行武进一步对图 6.8 和图 6.9 的资料做了谱分析，得出偏角和倾角变化占主导的周期有 700、1200、1800 和 7000 年。 他同时

发现约翰逊 1948 年由英格兰泥纹系列测定的偏角变化（至公元前 15000 年）也具有 700 和 1800 年的周期。与现代资料比较(五章第 3 节)行武毅认为，1200 和 1800 年的周期象是非偶极子磁场的变化，而 7000 年则可能是赤道偶极子的运动周期。在第五章第 3 节中已经指出，现代观测所得非偶极子磁场的西向漂移和赤道偶极子的运动尚有许多疑点，考虑到图 6.8 和 6.9 所示结果能够达到的精度，行武毅结论的真实性是需要认真推敲的。图 6.10 所示伦敦地区所得偏角和倾角的变化也看不出明显的这种周期性趋势。

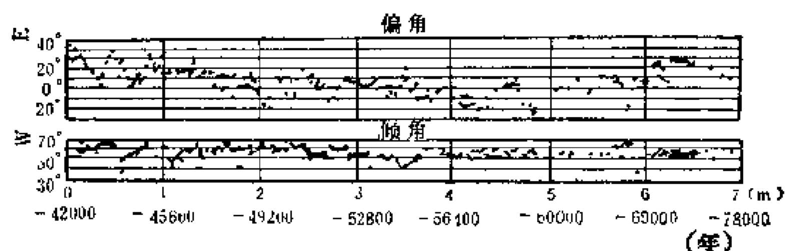


图 6.8 日本中部成田（Narita）地区沉积系列天然剩余磁化方向随沉积深度和时间的变化[4]

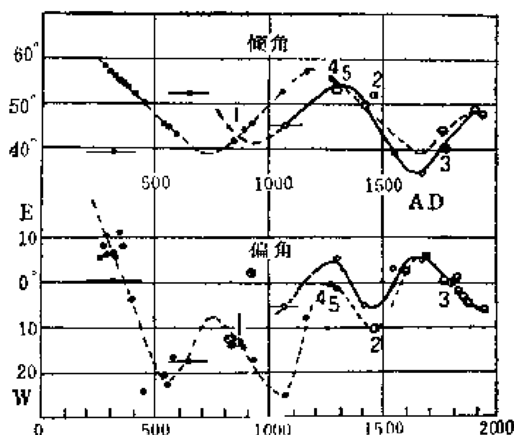


图 6.9 日本近 2000 年地磁偏角和倾角的变化

⊙近代仪器测定结果

其他符号○，□，●，△等为不同地区熔岩和焙烧物测定结果[4]

----渡边结果

——行武结果

我们说行武毅结论的可靠性值得推敲，绝不是否认古地磁(考古)方法在长期变化研究中的意义。诚然，要古地磁方法的精确度有较大提高，那是不现实的。可行的办法是在同一地区系统采集标本，和全球多地区的测量有目的地配合，并发展完善的数理统计方法。这样才有可能在长期变化规律的研究上取得较好的结果。

2. 地磁场强度的变化

和地磁场方向的测定不同，利用古地磁和考古地磁方法不能直接测定地磁场的强度。必须用实验方法和现代地磁场比较才能完成这种强度的间接测量。迄今能够用来做地磁场强度测量的标本（NRM）仍主要限于热剩磁（TRM）。其测定原理是首先由法国人泰利埃（E. Thellier）确定的。近年来虽有人企图探索用沉积岩（DRM）或其他非热剩磁

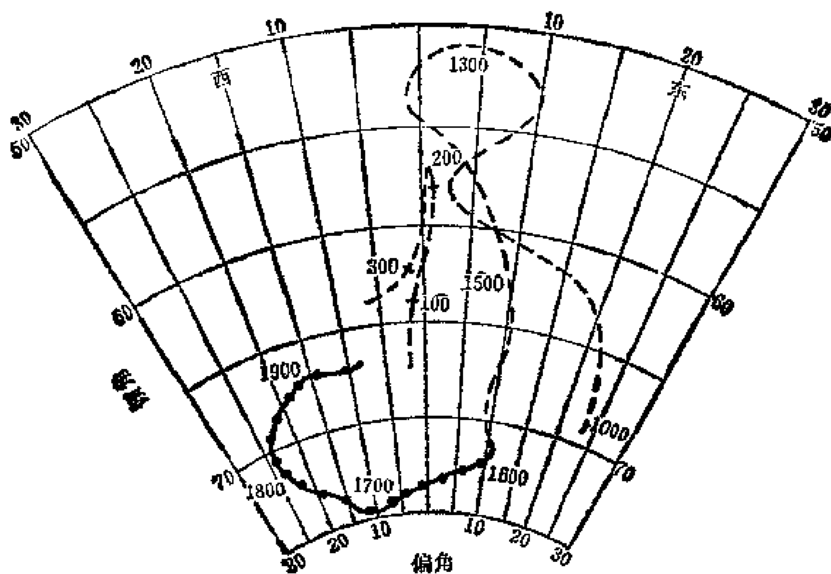


图 6.10　近 2000 年伦敦偏角和倾角的长期变化[1]
——实线：近代记录
----虚线：考古地磁结果

性岩石测量磁场强度的可能性[5,6]，但结果仍不是令人满意的[7,8]。

当外磁场较弱时，热剩余磁化强度与外场成正比：

$$J_T = F \cdot f(T_1, T_2; T_0)。$$

F 是外磁场，f 的形式决定于样品的铁磁性成分和结构，T_1、T_2 是标本在外场中磁化开始和终了的温度，T_0 是室温。若标本是在地磁场中由居里点 T_c 冷却至室温 T_0，则上式成为

$$J_T = F \cdot f(T_c, T_0; T_0)。\tag{6.1}$$

同样把样品加热(超过 T_c)退磁，并在现今地磁场 F_0 中冷却至室温 T_0，如若样品的磁性颗粒在退磁过程中物理化学性质不变，则样品获得的新的剩磁

$$J_T^0 = F_0 f(T_c, T_0; T_0)。\tag{6.2}$$

(6.1)、(6.2)式表明，通过测定同一样品初始磁化 J_T 和在现今实验室地磁场中的磁化 J_T^0，即可确定古代磁场 F

$$F = \frac{J_T}{J_T^0} F_0 \tag{6.3}$$

考虑到岩石的初始热剩磁 J_T，由于粘滞效应，低温加热等原因，不可避免地会受到磁性污染，直接测定 J_T 是不准确的。同时这种测定办法，每块标本从 T_c 至 T_0 一次加温和冷却，只能按(6.3)提供一个方程，F 的计算误差也较大。为此泰利埃提出了"逐步加热"的办法。即把 T_0 至 T_c 分成 n 个温度区间，首先在零磁空间将样品由 T_0 加热至 T_1，则标本在 $T_0 - T_1$ 温度间隔被退磁，其残留磁化为 $J_T(n-1)$；测定 $J_T(n-1)$ 后，再将样品在零磁空间重新加热至 T_1，并在地磁场 F_0 中冷却至 T_0，在地磁场中获得的新的剩磁为 $J_T^0(1)$。逐步重复上述过程，分别测定了 $J_T(n-i)$、$J_T^0(i)$，$i = 0, 1, \cdots, n$。根据部分热剩磁定律不难相信，

$$J_T(n-i) = J_T - \left(\frac{F}{F_0}\right) \cdot J_T^0(i) \qquad i = 0, 1, \cdots, n。\tag{6.4}$$

$J_T(n-i)$ 与 $J_T^0(i)$ 为一直线方程，直线斜率即为 $-\frac{F}{F_0}$。图 6.11 为标本逐步加热的实测结果。由图看出，实测结果线性关系很好。若某些标本实测结果线性关系不好，则或者是由于标本有稳定性较强的磁性污染，或者实验过程中标本磁性矿物发生了物理化学变化。这样的标本不适宜磁场强度的测量。可以看出，逐步加热法既收标本净化之效，又可增加测点数目，由多点斜率的测量 (6.4) 代替了单点比值的测定 (6.3)，提高了 F 的测量精度，同时还提供了标本取舍的实验依据。因此逐步加热法的应用大大促进了古地磁场强度的研究。

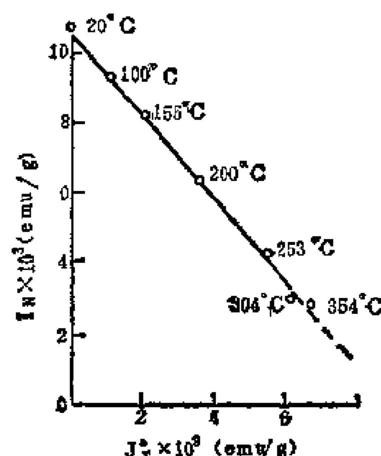


图 6.11 标本逐步加热实测曲线[4]

若假定地磁场为中心偶极子磁场，则不同地区测量的古地磁强度 F 可换算到同一参考点，以便于不同地区测量结果的比较。参考点的换算值

$$F_R = F(1 + 3\cos^2 P_R)^{1/2}/(1 + 3\cos^2 P)^{1/2} \tag{6.5}$$

其中 P 和 P_R 分别为测点和参考点相对于古磁极的极距。利用关系 (5.134)

$$\frac{1}{2}\tan I = \cot P,$$

可以将(6.5)用倾角 I 表示

$$F_R = F(1 + 3\cos^2 I)^{1/2}/(1 + 3\cos^2 I_R)^{1/2}。 \tag{6.6}$$

若参考点在磁赤道上，则(6.5)，(6.6)简化为

$$F_E = F/(1 + 3\cos^2 P)^{1/2} \tag{6.7}$$

$$F_E = \frac{1}{2} F(1 + 3\cos^2 I)^{1/2} \tag{6.8}$$

同时也可以求出相应磁偶极子的磁矩 M

$$M = a^3 F/(1 + 3\cos^2 P)^{1/2}。 \tag{6.9}$$

其中 a 为平均地球半径。

将 F 换算到同一参考点所得 F_R 或 F_E，进行不同年代的比较时，还必须考虑到磁极移动的影响，对于历史时期和近地质年代可以认为磁极位置与现代磁极一致，若更远的地质年代则必须进行极移校正(古磁纬校正)。此外，考虑到非偶极子磁场的影响，同一年代的 F_R、F_E 或 M，只有全球许多地区的统计结果才有意义。那种由单一或少数几个测点的测量结果来论述磁极 M 或 F_E 的变化的企图，是靠不住的。因为无论是磁矩 M 或 F_E，所反映的是作为偶极子磁场的全球特征，个别测点虽然包含有偶极子磁场的成份，但却不可避免地要受到区域性或局部磁异常的污染。

图 6.12 和图 6.13 分别为不同地区 F 测量结果换算到现代磁赤道处的磁场强度 F_E 和磁矩 M 的变化。图 6.12 是相距相当远的法国、苏联和日本不同地区的测量结果，它们总的变化趋势一致，从统计意义上讲有可能是反映了全球偶极子磁场的变化。从图 6.12 和图 6.13 可以看出约在2000 年前(公元初)地磁场强度(偶极矩)有一极大值，约为现代地磁场

强度的 1.5倍，而公元前 2000 年附近地磁场强度有与现代地磁场同样的低值，但最低值约在公元前 4000 年左右（图 6.13）。因此估计地球偶极子磁场的变化周期约为 8,000—10,000 年。但总的看来，测点仍嫌太少，其结果的真实性还有待更多资料的积累。此外还有更古时期地磁场强度的测量结果，但其可信程度就更低了。

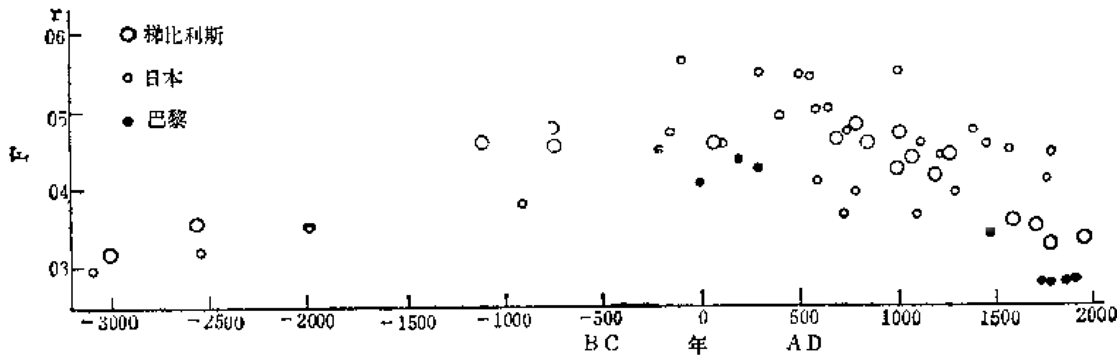


图 6.12　赤道处古地磁场强度的变化[1]

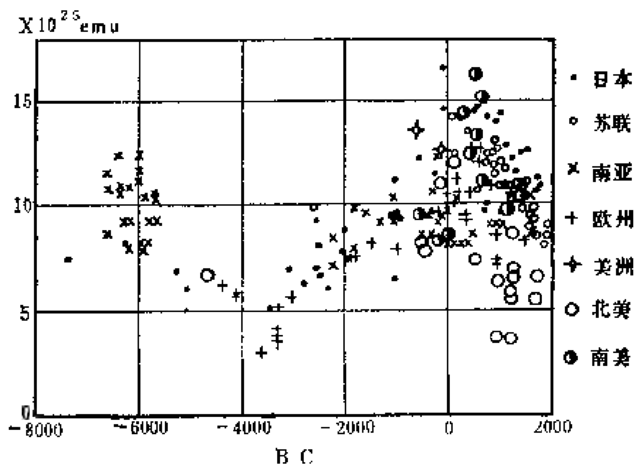


图 6.13　世界各地所测古地磁场偶极子磁矩的变化[9]

（二）轴向偶极子的假定和极移

1. 虚地磁极的统计分析和地磁极的移动

若假定地球为偶极子磁场，则由采样点 $P(\theta, \lambda)$ 的磁化方向 (D, I) 可以确定地磁极的位置 $V(\theta_0, \lambda_0)$。这样求得的磁极称为虚磁极（VGP）。由球面三角形 NVP（图 6.14）可以得出

$$\cos\theta_0 = \cos\theta\cos P + \sin\theta\sin P\cos D,$$

$$\sin(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin P\sin D}{\sin\theta_0}。\tag{6.10}$$

P 为测点的磁极距，

$$\operatorname{ctg} P = \frac{1}{2}\operatorname{tg} I。$$

(6.10) 中 D、θ、λ 为已知，P 可由 I 计算，因此由 (6.10) 可以求得虚地磁极的位置 (θ_0, λ_0)。

菲舍尔 (R. A. Fisher) 给出了由标本实测磁化方向所确定的平均磁化方向和地磁极的可信程度的统计表示。设实测标本数 N 是由总体样本中随机抽出的子样本。样本的磁化方向可用单位球上的点来表示。即 N 个样本对应球上 N 个点，由球心到点的单位向径即为各样本的磁化方向。设 N 个单位向量的和为 $\boldsymbol{R}$，则 N 个点相对于 $\boldsymbol{R}$ 在球面上应呈对称分布。菲舍尔给出，每个向量点落入单位球上与 $\boldsymbol{R}$ 角距为 ψ 的单位面积上的概率 p 为

$$p = \frac{k}{4\pi \sinh k} e^{k\cos\psi} \tag{6.11}$$

k 为精度参数，当 $k > 3$ 时

$$k = \frac{N-1}{N-R},$$

k 值越大，表示向量点愈集中；$k \to \infty$，全部向量共线，汇集于球面同一点；$k = 0$ 相当于向量点在单位球面上均匀分布。概率密度函数 $p(6.11)$ 在整个球面上的积分为1。显然子样 N 的平均方向 $\boldsymbol{R}$ 就是总体平均方向的最佳估计。设总体平均方向(即磁化方向的真值)以 $1-P$ 的概率落入以 $\boldsymbol{R}$ 为轴线以 α_{1-p} 为半顶角的圆锥面内，则

$$\cos\alpha_{1-p} = 1 - \frac{N-R}{R}\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1\right\}。\tag{6.12}$$

若实际计算取 $p = 0.05$，则磁化方向的真值落在以 $\alpha_{0.95}$ 为半顶角的圆锥外的概率是 20 分之一。当 α 不大时

$$\alpha_{0.95} \simeq \frac{140^\circ}{(R-N)^{1/2}}。$$

圆锥体与单位球的交线称为磁化方向的置信圆。当磁化方向换算为虚地磁极时，置信圆将变成一个椭圆。由与磁化方向置信圆 $\alpha_{0.95}$ 相应的平均倾角 $\bar{I}$ 和偏角 $\bar{D}$ 的置信区间 δ_I 和 δ_D

$$\delta_I = \alpha_{0.95}, \quad \delta_D = \frac{\alpha_{0.95}}{\cos\bar{I}}$$

可求出与虚地磁极相应的置信椭圆的长短半轴 δ_m 和 δ_p，

$$\delta_m = \alpha_{0.95}\frac{\sin P}{\cos\bar{I}}, \quad \delta_p = \frac{1}{2}\alpha_{0.95}(1 + 3\cos^2 P)。\tag{6.13}$$

这里 P 为采样点与虚磁极的角距。严格讲置信椭圆的中心并非虚地磁极，但 α 较小时，两者差别不大。

由以上古地磁方法所测定的虚地磁极的移动，可以按其时间尺度分做两类。一类是 10^3—10^6 年较短时间间隔的运动，一类是 10^4—10^6 年的平均磁极所反应的更长时期的移动。

较短时间间隔虚磁极的运动，首先由薛瓦利埃提出[4]他由埃特纳山熔岩流的观测注意到虚磁极绕地球转轴顺时针方向的运动。随后冰岛第三纪玄武岩的测量也得到同样性质的运动。图 6.15 为永田等人由日本第四纪 11 处熔岩流的测定结果。

若假定这种环绕转动轴的顺时针的运动已接近一周，则由熔岩覆盖的时间估计，这种周期约为 10,000 年。这与行武所得 7000 年的变化周期相近。对于 10^7 年前较老的岩石也观测到同样性质顺时针的运动，但似乎其周期更长 (10^5～10^6 年)[10]。由于相对短 ($< 10^5$

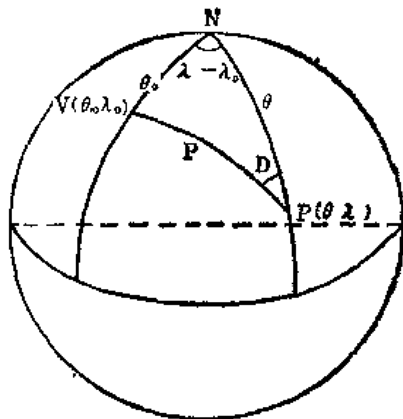


图 6 14

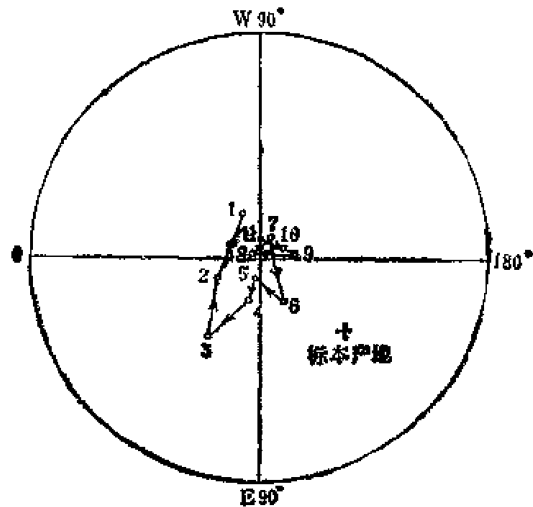


图 6.15 由日本箱根（Hakone）地区第四纪火山岩所测定的虚地磁极的移动(南磁极)[4]

年)间隔的地磁场方向的资料较少，地磁极相对于地球转动轴的这种运动是否反映了地磁场的持续的基本的特性，现在还难于断言。但无疑这一性质的深入研究对于与地磁发电机学说有关的地核内部的动力理论具有重要价值。

若上述关于虚磁极的运动是真实的，则由岩石磁化方向所确定的虚磁极在较长时间内（10^4—10^5 年)的平均应和地理极相一致，或者换句话说，地磁场较长时间的平均可以认为是一个轴向偶极子。图 6.16 为直至 2 千万年前虚磁极的分布。

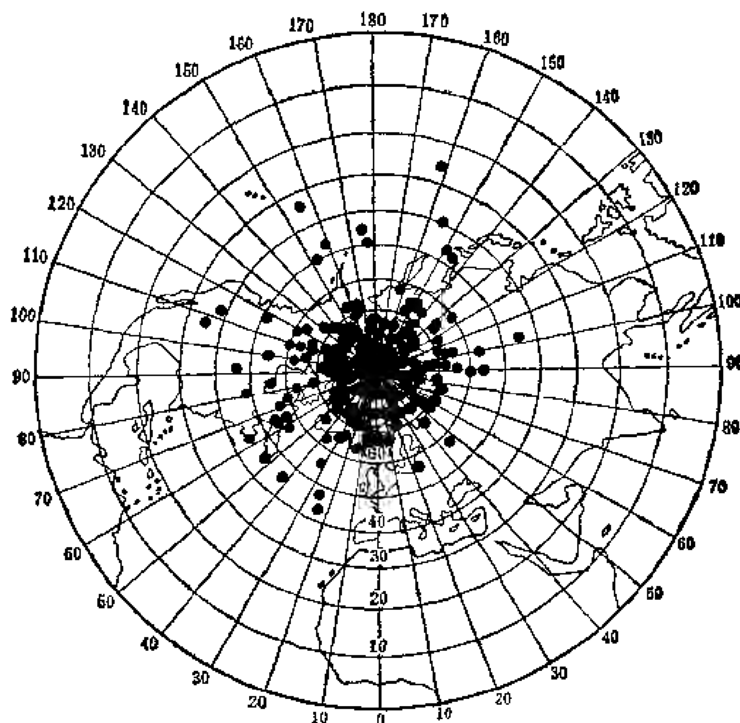


图 6 16 近 2 千万年来虚磁极的分布[1]

图 6 16 清楚地显示出地磁极围绕地理极形成一个团团，其分布相对于现代地极基本上是对称的。因此即使上述地磁极的顺时针运动的规律不存在，地磁场较长时间的平均仍可认为是一个地心轴向偶极子，这至少对于 10^7 年的时间尺度是真实的。把地磁场的这一性质外推到各地质时期，就是所谓轴向偶极子的假定。这个假定已成为古地磁等方法的一个基本原理。下面将会看到，这一原理的意义是很深远的。

2. 古代极移

轴向偶极子的假定说明，岩石磁化方向在 10^4—10^5 年的平均，决定了地理极的位置。在2×10^7 年内这一位置与现在地理极重合。但更老(3×10^7 年前)的岩石标本的测定却显示出与现代地理极的明显偏离。这种偏离不是杂乱的，年代愈老偏离愈大。对于同一地块，不同地点岩石标本所测定的磁极位置，形成一条相近的按年代有序的迁移轨迹。但不同的地块，这种轨迹却有明显的差异。图 6.17 是北美和欧洲两大地块的极移路线。从图上可以看出，这种移动的距离之大，是出乎人们的常规想象的。在大约 5—6 亿年期间移动的距离竟达 90° 之多。各个地块极移细节的讨论可参阅厄尔文 (E. Irving) 等人的著作[11,12]。

如果轴向偶极子的假定是正确的，则上述结果所反映的在漫长地质年代中古地极的迁移就应该是真实的。不难相信，若地球所受外力矩(太阳、月亮)可以忽略，它的角动量矩的方向在空间应是固定不变的。地球整体相对于这一固定方向的运动是真正的极移成份。上述地极的迁移可以是地极的运动，也可能是大陆漂移或者两者联合的结果。由同一

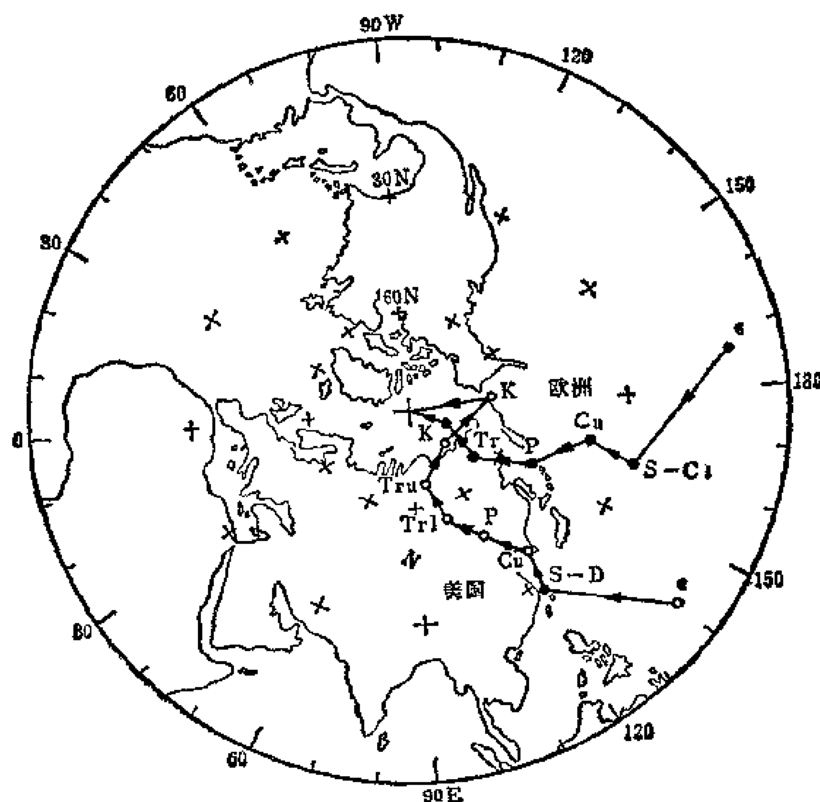


图 6.17 欧洲和北美极移路线(字母为地质时期的通用符号)[1,9]

极移路线是无法把这些成份区分开的。但比较各个地块不同的极移路线，则各地块之间的相对运动可以被区分。因此古磁极移动路线为大陆漂移提供了有力的证据。

（三）地磁场的倒转和地磁年表

磁石磁性的测定很早就发现，许多岩石有与现今地磁场相反方向的磁化。但这种反向磁化的原因被肯定下来却是不远的事情。主要争论的焦点是，这种反向磁化是起因于地磁场极性的倒转，还是岩石本身有时获得与周围磁场方向相反的磁化的自发反向？现已查明，尽管有的岩石在特殊条件下的磁化方向有可能自动转向，但这种情况是很罕见的；特别是岩石反向磁化的测定表明：全球各地大量反向磁化的不同类型的岩石，在时间上是一致的。这样，怀疑、争论很长时间的地磁场极性倒转的事实终于被肯定下来。古地磁学的这一重要发现对于地磁场成因理论的探讨具有十分重要的意义，据此编制的地磁年表，还可以估计新生代某些地壳运动的时间[13]。

1. 自发反向和地磁场的极性反转

自发反向可以有不同的机制。但所有自发反向的机制都要求物质含有两种相反的磁化成份。例如，设想在一种结晶物质内存在着亚晶格 A 和 B，晶格 B 中所有原子的自旋磁矩与 A 相反。如果两个亚晶格中磁矩 J_A 和 J_B 随温度有不同的变化，则 $J_A + J_B$ 在某一温度可能反向（图 6.18）。虽然在实验室可以合成具有这种性质的物质，但迄今在自然界还没发现同类性质的岩石；自发反向的另一种可能的机制如图 6.19 所示。物质含有两种不同的磁性颗粒 A 和 B，其中 A 有较高的居里点 T_A 和较低的磁化强度 J_A，而 B 则刚好相反。当这种物质从高温冷却时，A 首先在外场中磁化，方向与外场相同。当温度下降到 T_B 以下时，因 B 是在外场与 A 的双重作用下磁化，则在有利的条件下 B 有可能获得与外场相反的磁化。当到达室温时，因 $J_B > J_A$，所以最后总的效果会使 $J_A + J_B$ 与外场反向。1951 年永田在榛名山英安岩中观测到了这种机制的反向磁化。但同类现象并不多见。因此，即使这种自发反向机制存在，由此产生的反向磁化也是偶然的。显然不能解释天然岩石频繁出现的反向磁化现象。

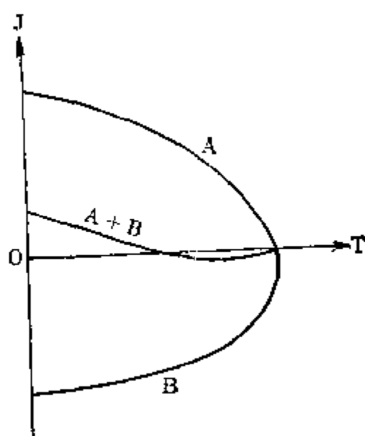


图 6.18

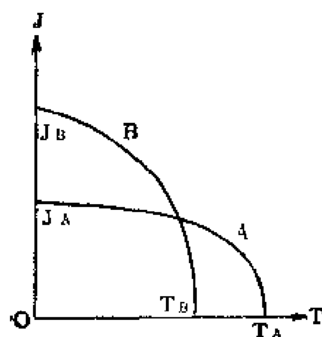


图 6.19

人们还注意到，某些物理化学作用能否引起岩石磁化的自发反向？例如：在一些熔岩系列中，曾经发现岩石的极性和它们的氧化状态有一定的相关性。大不列颠五千万到六千万年前的熔岩和冰岛小于二千万年的磁化岩石的测量发现，处于氧化状态的标本，0% 有反向的极性，而非氧化状态的 90% 有正向极性[2]。这种结果很有力的支持了自发反向的机制。虽然这种现象至今没能得到圆满的解释，但进一步的观测发现，这种相关关系并没有全球范围的普遍意义。

与上述自发反向机制相反，岩石反向磁化的许多事实却有力的支持地磁场极性反转的结论。

已观测到许多反向磁化的熔岩流，它们横穿沉积层，这里熔岩的极性与被烘烤冷却的围岩的极性完全一致，而与同一地层未被加热的围岩的极性无关。这说明在同一年代获得磁性的岩石，即使岩石性质、成分完全不同，也具有同样的磁化方向，而在不同年代获得磁性的岩石则极性无关。这除了用独立于两者之外的场的反转解释外，其他解释是困难的。

加利福尼亚熔岩和远海沉积剩余磁性的测定表明，尽管它们生成的地点不同，形成机制和条件也相差悬殊，但其反向磁化现象却是完全相同的。图 6.20 给出了不同深海岩芯正反向磁化的分布。

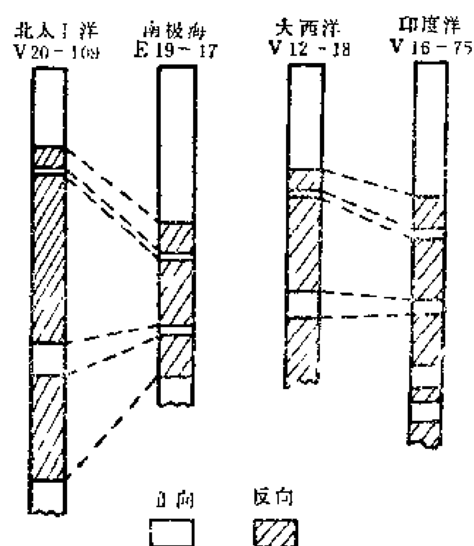


图 6.20　深海沉积岩芯的极性[2]

图中清楚地显示出，不同地区正反向磁化系列时间上的一致性。这些事实说明，必须是全球同一因素的作用，才可能是这种反向磁化的原因。可供选择的唯一可能是地磁场的倒转。这样，人们就不能不接受整个地磁场的极性可以倒转的事实了。虽然上述事实只是在较年青的岩石中观测到的，更古老的岩石由于测量精度不高，做这样精确的对比目前还不可能，但没有理由认为，较为年青的岩石反向磁化起因于地磁场的倒转，而古代岩石应是其他的机制。

2. 地磁场倒转的性质和地磁年表

地磁场的倒转开始于前寒武纪（600 百万年前），在以后所有地质年代都观测到了。地磁场的极性无疑是循环性地变化。没有证据说明正反极性的出现哪一个应该系统地长些，哪一个应该系统地短些。从统计角度讲，两者的几率应该是均等的。地磁场极性的这种统计特性已被小于 10 百万年较为年青的岩石的磁化所证实。表 6.1 是过去 10.6 百万年中极性时间间隔的统计特性。从表 6.1 看出，正反极性的数目和平均时间间隔都是相同的（0.22 百万年）。不仅如此，而且整个时间间隔从 0—3.32 和 3.32—10.6 百万年两段的统计特性也极为类似。当然上述时间间隔只具有统计意义，任何具体事件的间隔是不规则的。对于更老的岩石则可能有完全不同的统计特性[2]。

地磁场倒转另一个重要性质是正反向中间过渡带。达格莱关于冰岛熔岩的研究对此做出了重要的贡献。他发现至少有 55 个熔岩流既非反向又非正向磁化，这说明地磁场极

表 6.1 过去 10.6 百万年中极性时间间隔的统计性质[14]

时间范围(百万年)正常极性时段	0—3.32	3.32—10.6	0—10.6
正常场时间(百万年)	1 66	3.90	5.56
占总时间的百分数	50	53	52
正常场时段的数目	8	17	25
正常场时间间隔平均长度(百万年)	0.21	0.23	0.22
反转极性时段反转场时间(百万年)	1.66	3.46	5.12
占总时间的百分数	50	47	48
反转场时段的数目	7	17	24
反转时间间隔平均长度(百万年)	0.24	0.20	0 21
整个极性时段极性时段的数目	15	34	49
平均长度(百万年)	0 22	0.22	0.22

性的反转可能并不是偶极子方向瞬时的转向，而是有个过程。一般认为，极性的反转，首先是场强的衰减，在几千年内场强的衰减为原来的三分之一，同时偶极子轴有约 30° 左右的摆动，然后沿不规则的途径移到相反的极性，场强开始上升。其时间间隔约为 10^3—10^4 年。过度时期地磁场是否仍具有偶极场特性，还不能肯定。图 6.21 为这种反转的一种可能的模型[2]。但迄今过渡期的观测资料还不足以判明这种性质的真实性。无疑这种过度时期特征的研究，对地磁倒转机制和地磁场成因的研究是十分重要的。

岩石反向磁化既然是全球性的，这样就可以用岩石的磁化方向作为标志，建立一个岩石相对年龄的时间表，叫做地磁极性年表。岩石正反磁化具体事件的间隔是不规则的。要标定这些时间间隔，必须准确地测定绝对年代和精选足够多的岩石标本。由于较老岩石绝对测年的困难，所以现在这个年表只达到几百万年(图 6.22)。人们最初发现，在最近四百万年期间，地磁场经历过三次转向。以人名命名，最近的正向时间定名为布容 (Brunhes) 时期，在它之前是反向的松山时期，正向的高斯时期，和反向的吉尔伯特(Gilbert)时期。这些时期的长短约为百万年的量级。以后通过更精确的观测又发现，在这些“时期”之内还存在着更短的反转现象，被称为转向“事件”。于是在正向时期中存在着反向事件，在反向时期中也存在着正向事件。这些事件一般以最初发现这种现象的地点命名，其长短约为 0.01—0.1 百万年。由于这些事件的寿命较短，有些至今仍有争论。

地磁极向年表的长度，受到绝对测年精度的限制，常用的钾-氩法精度约为 5%，对于 5 百万年的岩石，误差达到 25 万年，比一个“事件”的持续时间还要长。所以要延长这种年表，还必须借助于其他更灵敏的方法。新兴的海底扩张说提供了这种方便。目前，根据

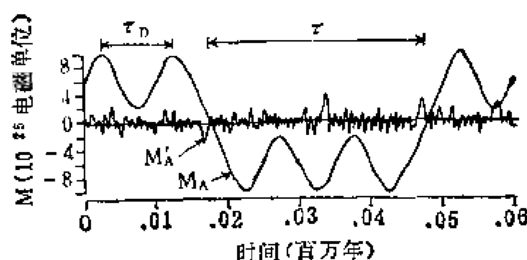


图 6.21 反转的可能模型[14]

τ_d 是偶极子场的周期；τ 是一次极性时间间隔的长度。当 $(M_A + M_A')$ 改变符号时，极性发生变化；M_A是偶极场的磁矩，M_A' 是非偶极场的一个量度。

海岭两侧由于海底不断扩张和地磁场的转向所形成的正负磁异常的条状分布，并假定每年 4 厘米的均匀扩张速度，已将这个年表延长了 4 千 6 百万年[13]。借助于岩石磁化的极性和这个年表可以估计新生代某些地壳运动的时间。

地磁场倒转的统计特性，反转过渡时期的性质，以及正反转向"时期"的极性事件等地磁场倒转的课题，都与倒转模式的建立密切相关。相信随着测量方法的改进，更多地区和岩石短暂反向磁化的测定，将为地磁成因的研究提供重要的线索。

三、地磁场的成因

地磁场成因是地球物理学重大理论难题之一，它与地球演化、地球内部的能量和运动以及天体磁场的来源密切关联，至今尚无圆满的结果。

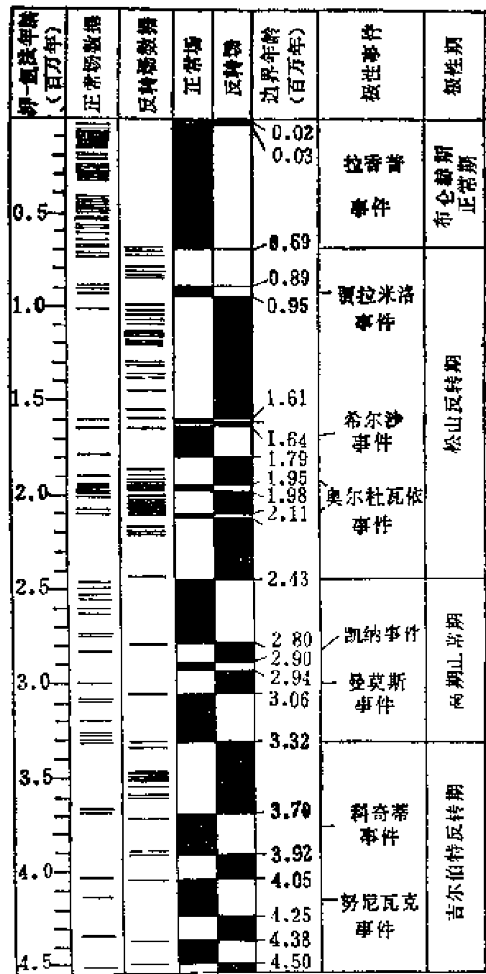


图 6.22 地磁场反转的时间尺度[14]

短水平线表示用钾-氩法测得的年龄和相应地质年代的磁极性(正向的和反向的)。
"正常场"一栏的黑色部分表示正向极性的时段。
"反转场"一栏黑色部分表示反转极性的时段。

地球内部的结构、物质组成和运动状态以及地磁场的时空特征提供了解决地磁场成因理论的几何和物理条件。地磁场的高斯分析从理论上肯定了地磁场的源在地球内部，否定了任何由外部原因解决地磁场起源的企图。而在时间上稳定的空间偶极子特征，以及在漫长的地质史上偶极子磁场曾经历过多次反向，从统计意义上讲，正、反极性的几率相等，没有哪一种极性在地磁场的历史上有什么特殊性，则是地磁场起源理论所要解释的主要现象。至于地磁场倒转的短期的或过渡时期的特征还没有较为确切的结果，只可作为参考条件。但无疑，这些现象最后被肯定下来，将是对地磁场成因理论的重要检验。人们最先认识的是地球偶极子磁场，即均匀磁化球体磁场的特征。所以早期地磁场成因的学说多以此为前提，但都因不能经受时间的考验而被舍弃。随着人们对于地球内部结构和物质组成认识的深化，揭示了液体外核铁镍成份所可能具有的高导电性能，提供了由物质运动和磁场相互作用维持地磁场的有利场所。而地磁场长期变化规律，特别是它相对于地球运动的成份——西向漂移现象的研究提供了估计这种运动状态和量级的一种可能，于是大约在 40 至 50 年代，人们开始从地球内部物质的运动和磁场的相互作用来探讨地磁场的成因，通常被称为"发电机"学说。"发电机"学说刚刚问世的时候，有关磁场倒转的事实还没有被肯定下来。但是很幸运，这个学说，即所谓非稳定的发电机，恰恰有可能解释它当初并未考虑的磁场倒转的现象。这在很大程度上

提高了这个学说的声誉。目前发电机学说被公认为是地磁场成因理论中最为合理的和有希望的一个。

从第五章第1节中我们了解到，导体内部电流所产生的磁场，自由衰减的时间

$$\tau \simeq 4\pi\mu\sigma L^2$$

对于地核，$\tau \simeq 3 \times 10^{11}$ 秒$\simeq 10^4$ 年。而古地磁的研究表明，已经测定的最老的磁性岩石，其年代远到 10^9 年前，因此，地球的磁场起码已经维持近 10^9 年。从这个意义上说，地球偶极子磁场在漫长的地质年代里是稳定的。显而易见，因磁场的自由衰减时间 τ 远小于 10^9 年，维持这样一个稳定的磁场就必须不断提供能量。这是发电机学说所面临的第一个问题。第二才是这种能量提供怎样的运动，与磁场相互作用才能获得所观测到的偶极子磁场。很遗憾，由于人们对于地球深部的知识还了解得很少，关于能量的提供还不能找到满意的结果。 这恐怕也是这个学说提出三十余年至今未能获得最后结果的主要原因之一。开始曾认为地核内放射性元素，或固体内核形成所放出的潜热可以提供这种能量，但根据现有的知识计算，它们的数量级是不够的。近来有人认为，地核内部的运动可能来源于地球的进动。地球的进动和地球的扁率有关，但地球的扁率和地核的扁率不同，这就在地核内部产生速度差异，从而维持了地核内部的电磁流体力学效应。对此也有人提出了异议。

有关发电机说的多数论著，大都主要回答上述关于运动和磁场相互作用如何能获得偶极子磁场的问题，这一内容的物理基础就是第五章第1节中电磁方程(5.26)和流体动力学方程(5.36)的耦合或(5.27)和(5.36)的耦合。无疑这是相当复杂的数学问题。这里不可能对此做出全面介绍，只是从这些方程出发，简单地讨论发电机学说的物理图像，然后在最简化的条件下给出这种图像的数学描述，做为对这个学说了解的入门。 详细内容读者可参阅埃尔萨塞 (W. M. Elsasser)[15,16]、海德 (R. Hide)[17]、力武[9]、古宾 (D. Gubbins)[18,19,20] 和利维 (E. H. Levy)[21] 等有关著述。

(一) 历史上有关地磁场成因的假说

在叙述发电机说之前，我们先简单回顾一下历史上某些地磁成因的假说，这对于认识这个课题的发展历史是有益的。

最早和最自然的地磁场成因假说是设想地球内部是一块均匀磁化的大磁铁。当地球物理学家提出地核是由铁镍合金组成的时候，这个假说似乎得到了支持。可惜地球内部的温度太高，远远超过了铁的居里点。即使考虑到居里点随压力的变化也无济于事，所以铁磁成因说不能成立。

有人曾企图借助于电荷的旋转、迴转磁效应、温差电流、感应电流等物理效应来解释地磁场，但数量级都远远不够。电荷旋转说也是人们容易想到的一种磁效应。 若地球带有负电荷，或地球内部产生电荷分离，外部为负电荷，则随地球一起转动的电荷将产生磁场。显然这样的电荷将产生很强的静电场。由观察到的电位梯度远不能得到产生观测到的磁场所需要的足够电荷。另外这样产生的磁场在不同座标系应有显著不同，至今并未观测到这样的事实。因此尽管曾有人企图修正库仑定律以找到维持电荷分离的机制，也无法弥补电荷旋转说的先天缺陷。旋转着的磁性物体，在旋转轴方向上将被磁化，物理学上称为迴转磁效应。 按迴转效应计算，地球由于自转获得的磁化强度约为 10^{-10} 电磁单

位。这比地球作为均匀磁化球体的磁化强度 7.2×10^{-2} 电磁单位约小 9 个数量级。因此借助物理学的迴转磁效应产生地磁场也是毫无希望的。至于感应电流和温差电流说，因与已有的观测事实不符，也未能被人们接受。

上述各种假说都是以现有物理定律为基础的。与此不同，英国物理学家布莱克特(P. M. S. Blackett) 提出了新的物理规律——巨大转体说，来解释地磁场的成因。布莱克特发现，太阳，室女星座 78 号星和地球三个天体的磁矩及其角动量矩 $\boldsymbol{P}$，具有下述关系：

$$\boldsymbol{M} = \beta \frac{\sqrt{G}}{2c} \boldsymbol{P}。$$

其中 G 为万有引力常数，c 为光速，β 为比例常数约等于 0.25。布莱克特把它设想为物理学的一个规律。由于有三个天体的支持，这个假说曾一度引起广泛的注意。为此，布莱克特专门设计了一种测弱磁性的高灵敏度的仪器，这就是在以后古地学的测量中被广泛采用的无定向磁力仪。他把一个巨大铁棒，设置于地球上，随地球一起旋转，尽管仪器灵敏度高达 10^{-4} 电磁单位，也未观测到由旋转棒所产生的任何附加磁场。此外，按这一规律，磁场的水平分量应随深度减小，实际上矿井、坑道的精确测量并没有观测到这样的现象。特别是后来太阳磁场的新的测定结果以及陆续观测到不少星体的磁场并没有显示出同样的规律。于是连布莱克特自己也放弃了这种学说。布莱克特的转体说是失败了，但是他为此而设计的仪器，却在古地磁学的研究中做出了重要贡献。

还有一个显而易见的事实：以上种种假说都无法解释地磁场倒转的现象。

除上述诸说外，魏斯汀、阿尔芬 (H. Alfven) 还曾分别提出了霍尔电流说，和磁场扭曲说。因它们的内容无不涉及地核内部流体运动和磁场的相互作用，其性质应该属于发电机理论的范畴。这里不再单独介绍。

(二) 地磁场维持的能量图像

凡是说明"发电机"图像及其维持和加强磁场的可能性，无一不讨论均匀发电盘。所谓均匀发电盘是指一个导电的金属圆盘，沿着过盘心垂直于盘面的轴线在磁场中转动。这样盘内将产生感应电动势。若将盘的边缘和转动轴间用电刷和导线连结，只要导线方向适宜，则感应电流产生的磁场有可能加强原来的外磁场(图 6.23)。图 6.23 所示圆盘，其动力学方程为

$$J \frac{d\omega}{dt} = G - MI^2。\tag{6.14}$$

其中 J 为圆盘的转动惯量，ω 为转动角速度，G 为施于圆盘的机械转矩，$2\pi M$ 为回路的互感系数。(6.14) 中连接线圈内的感应电流 I 又满足

$$L \frac{dI}{dt} + RI = MI\omega。\tag{6.15}$$

其中 L，R 为线圈的自感和电阻。当系统稳定时，由(6.14)、(6.15)可得

$$I_c = \pm \sqrt{\frac{G}{M}}; \quad \omega_c = \frac{R}{M}。\tag{6.16}$$

当 ω 大于 ω_c 时，磁场将持续增强，反之磁场衰减。因此简单的发电圆盘在磁场内的运动，有可能维持或加强原始的磁场。从能量角度看来，这种维持磁场的过程就是电流做功消耗能量，而机械转矩G所提供的机械能量不断补偿这种能量耗损的过程。

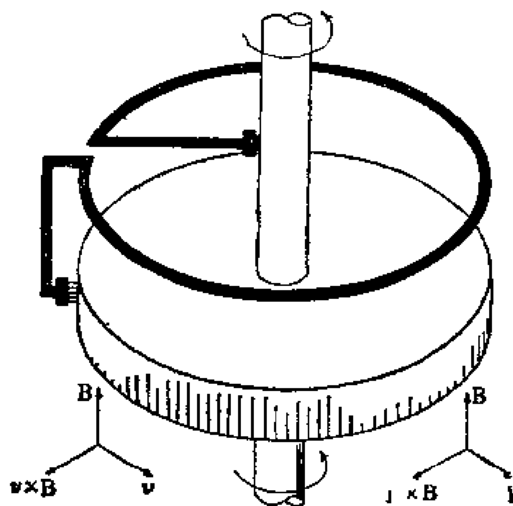


图 6.23 均匀发电盘

在(6.16)式中，若设 $R = 10\ \Omega$，圆盘半径 $a = 10$ 厘米，则 $M \doteq \pi a$，从而

$$\omega_c = 10^6 - 10^7 \text{ 厘米/秒}$$

这样高速度的转动在实验室是无法想象的。但若 a 与地核尺度相当，则ω_c将大为减少。因此大尺度、高导电率的天体或地球内部有可能维持某种自激发电机过程。很显然，要在地球内部形成与图6.23类似的简单结构是不可能的。就连首先提出这一模型的布拉德(Bullard)本人也承认，这种发电盘和地核内的发电机毫无共同之处。倒是能量的转换过程两者是相同的。即地磁场是由某种电流体系激发的，电流做功消耗能量。为了维持稳定的地磁场则必须不断提供能量。我们将从发电机的基本方程出发，讨论这种能量过程的物理图像。

1. 液核中电磁流体力学的能量方程

如前所述，从能量耗损和运动的角度看来，液体外核是地磁发电机最有利的场所。将方程(5.26)两端标乘 $\frac{\boldsymbol{B}}{4\pi}$，并在液体外核区域积分，可得：

$$\frac{dW_H}{dt} = \frac{1}{4\pi}\iiint(\eta\mu\boldsymbol{H}\cdot\nabla^2\boldsymbol{H})d\tau + \frac{1}{4\pi}\iiint\mu\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})d\tau。\tag{6.17}$$

其中 $W_H = \frac{1}{8\pi}\iiint\mu H^2 d\tau$ 是导体液核内的总磁能。右端第一项，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\iiint\eta\mu\,\boldsymbol{H}\cdot\nabla^2\boldsymbol{H}\,d\tau &= -\eta\iiint\mu\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{j})d\tau\\ &= -\eta\iiint\{\nabla\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H}) + \mu(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{j}\}d\tau\\ &= -\iiint\left(\frac{j^2}{\sigma}\right)d\tau - \eta\oiint(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}\tag{6.18}$$

其中面积分为内外核界面。(6.17)右端第二项可以变换为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\iiint\mu\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})d\tau\\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint\{\nabla\cdot[(\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}] + (\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\}d\tau\\ &= -\iiint\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})d\tau + \frac{1}{4\pi}\oiint[(\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}]\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned}\tag{6.19}$$

由(5.7)式可将(6.18)、(6.19)中的面积分合并。

$$\because\ \boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})$$

$$\therefore\ \frac{1}{4\pi}\oiint[(\boldsymbol{v}\times\mu\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}]\cdot d\boldsymbol{S}-\frac{1}{4\pi\sigma}\oiint(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\oiint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}$$

将(6.18)、(6.19)代入(6.17),得:

$$\frac{dW_H}{dt}=-\iiint\left(\frac{j^2}{\sigma}\right)d\tau-\frac{1}{4\pi}\oiint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}-\iiint\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})d\tau$$

移项后成为

$$\frac{dW_H}{dt}+\iiint\left(\frac{j^2}{\sigma}\right)d\tau+\oiint\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{S}=-\iiint\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})d\tau \quad (6.20)$$

(6.20)式即为液核内的电磁流体力学能量方程。其中左端第一项为单位时间液核内总磁能的增加;第二项为单位时间的焦耳热损耗;第三项 $\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ 为玻印廷矢量,它的面积分则表示单位时间液核对外输送的电磁能量;而方程右端为单位时间介质运动反抗电磁力所做的功。因此方程(6.20)揭示了地磁场发电机的能量转换过程,即液核中介质运动的机械能通过反抗电磁力所做的功,一部分可以增加核内磁场的能量,一部分用来补偿焦耳热损耗,还有可能对外输送电磁能量,使核外磁场加强。当系统稳定后,(6.20)式左端第一项为零,而在液核边界,当稳定时,电场的切线分量为零,故左端第三项积分为零,液核不再对外输送电磁能量。所以对于稳定的发电机,磁场保持不变,介质反抗电磁力所做的功全部用来补偿焦耳热损耗。

进一步将电磁力改写为

$$\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\mu\boldsymbol{H}$$

利用∇算符运算公式

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$$

得

$$\nabla(H^2)=2(\boldsymbol{H}\times\nabla\times\boldsymbol{H})+2(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}$$

而

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{HH})=(\nabla\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}+(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}$$

于是有

$$\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H}=-\nabla\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\mu\boldsymbol{HH}}{4\pi}\right) \quad (6.21)$$

(6.21)式表明,电磁力等价于一个流体静压强 $\frac{\mu H^2}{8\pi}$ 和一个沿磁力线的张力 $\frac{\mu H^2}{4\pi}$。对于不可压缩流体,流体静压强所做的功

$$\iiint\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)d\tau=\iiint\left[\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)-\frac{\mu H^2}{8\pi}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]d\tau$$

$$=\oiint\frac{\mu H^2}{8\pi}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

因在边界层 $\boldsymbol{v}=0$,故上述面积分为零。即在液体不可压缩的情况下,当液体运动时,(6.21)式第一项流体静压强不做功。这时全部电磁力所做的功等于运动反抗电磁张力所

做的功，磁力线的任何伸长都将使磁能增加。因此发电机维持磁场的过程就是液体运动拉伸磁力线的过程。

2. 地核中可能的能量来源

由以上讨论可知，方程(6.20)中右边第一项在发电机过程中起着主导作用。但它并没有揭示出在液体核中维持发电机过程的机械能的表现形式，所以无法由(6.20)讨论能量的可能来源。流体动力学方程(5.36)则为我们提供了这种便利。

(i) 液核中机械能的表现形式

将动力学方程(5.36)标乘 $\boldsymbol{v}$，得

$$-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu\boldsymbol{H})=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla P+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}。\tag{6.22}$$

方程右边第一项

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2)-\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}。$$

由连续方程(5.37)得

$$\begin{aligned}\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2)+\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2)+\frac{1}{2}\nabla\cdot(\rho v^2\boldsymbol{v})-\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla v^2\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^2)+\frac{1}{2}\nabla\cdot(\rho v^2\boldsymbol{v})-\rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\end{aligned}$$

则

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{1}{2}\nabla\cdot(\rho v^2\boldsymbol{v});\tag{6.22$_1$}$$

(6.22)第三、四两项，若假定液体不可压缩，

$$-\boldsymbol{v}\cdot\nabla P+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{v}P)-\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla W。\tag{6.22$_2$}$$

其中W为重力位。最后一项

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\cdot\nu\nabla^2\boldsymbol{v},\qquad 由$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v})&=(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v})\\&=(\nabla\times\boldsymbol{v})^2+\boldsymbol{v}\cdot\nabla^2\boldsymbol{v},\end{aligned}$$

得

$$\boldsymbol{v}\cdot\nu\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla\cdot(\nu\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v})-\nu(\nabla\times\boldsymbol{v})^2.\tag{6.22$_3$}$$

将(6.22$_1$)—(6.22$_3$)代入(6.22)，并遍及液体外核积分，得

$$-\iiint\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\mu H)d\tau=-\frac{\partial K}{\partial t}+F_K+F_P+F_\nu-D+G。\tag{6.23}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
K &= \iiint \frac{1}{2}\rho v^2 d\tau, \\
F_K &= -\oiint \frac{1}{2}\rho v^2 \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}, \\
F_P &= -\oiint P\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}, \\
F_\nu &= \oiint \nu\{\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\}\cdot d\boldsymbol{S}, \\
D &= \iiint \nu(\nabla\times v)^2 d\tau, \\
G &= -\iiint(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla W)d\tau。
\end{aligned}\right\} \tag{6.24}
$$

由(6.24)可以看出，K为液核中总动能；F_K 则表示单位时间通过液核表面的质量交换液核所获得的动能；F_P 是表面液体静压力P做功通过液核表面的能流通量(以下通量均以定向内为正)；对于 F_ν，如图 6.24 所示，$\boldsymbol{t}_1$,$\boldsymbol{t}_2$为液核表面两个正交的切向单位向量，$\boldsymbol{n}$ 为界面法线，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{t}_2$。

由于速度梯度的存在，面粘滞力做功将产生能量交换，由于 $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_t}{\partial \boldsymbol{n}}>0$，表面流动较快的液体由于粘滞力的作用将使内部流动较慢的部分加速，产生动能传递，单位时间单位面积上的传递量为 $u_{t_1}\nu\dfrac{\partial u_{t_1}}{\partial n}$；而与 $\dfrac{\partial u_{t_1}}{\partial t_2}$ 有关的部分，在法线方向则不发生这样的能量传递，因此通过表面任意面元 dS 的能量通量

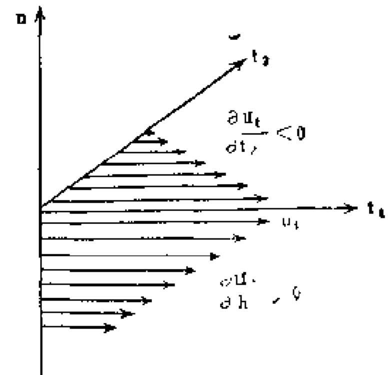


图 6.24

$$
dU_1 = -\left(u_{t_1}\nu\frac{\partial u_{t_1}}{\partial n}(-\boldsymbol{n}) + u_{t_1}\nu\frac{\partial u_{t_1}}{\partial t_2}\boldsymbol{t}_2\right)\cdot d\boldsymbol{S}
$$

$$
= -u_{t_1}\nu\frac{\partial u_{t_1}}{\partial n}dS,
$$

不难得出，

$$
\begin{aligned}
dU_1 &= \nu(\boldsymbol{u}_{t_1}\times\nabla\times\boldsymbol{u}_{t_1})\cdot d\boldsymbol{S}, \\
dU_2 &= \nu(\boldsymbol{u}_{t_2}\times\nabla\times\boldsymbol{u}_{t_2})\cdot d\boldsymbol{S}, \\
dU_3 &= \nu\,\boldsymbol{u}_n\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_n)\cdot d\boldsymbol{S}=0。
\end{aligned}
$$

将上三式合并，可得任意速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{t_1}+\boldsymbol{u}_{t_2}+\boldsymbol{u}_n$ 分布通过面元 $d\boldsymbol{S}$ 的能量通量

$$
dU=(\nu\boldsymbol{u}\times\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot d\boldsymbol{S}。
$$

由此不难理解，(6.24)中的 F_ν 是表面粘滞力做功通过液核表面的能量通量，$\nu\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v}$ 为粘滞能流密度；D为液核中能量的粘滞损耗率；最后，很显然，G是通过重力做功，位能转换成动能的转换率。G还可以改写为

$$
G = F_G + G_\tau \qquad \text{其中}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
F_G &= -\oiint \rho W\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}, \\
G_\tau &= \iiint W\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho d\tau。
\end{aligned}\right\} \tag{6.25}
$$

F_G 是在液核表面由于质量交换所产生的重力位能释放的通量，例如地幔物质由于重力分异落入地核产生的能量交换，即属此类；G_τ 是由于沿着介质运动方向密度的不均匀性所产生的位能释放率，热对流即属于这一类型。由以上各项物理内容的分析，可以看出，(6.23) 式所表示的能量转换过程为，系统反抗电磁力做功，以及内部能量的粘滞耗损或者以系统总动能的减少 $\left(-\frac{\partial K}{\partial t}\right)$ 为代价，或者由内部重力位能的释放 (G_τ) 来支付，或者由外界的能量通量 (F_K, F_P, F_ν, F_G) 来提供，当然也可以是各种因素的综合效果。其中，前者 $\left(-\frac{\partial K}{\partial t}\right)$ 是消极的，特别当稳定时，$\frac{\partial K}{\partial t}=0$。只有内部重力位能的释放，或能量通量才是积极的能量提供方式。因此机械能的表现形式(6.23) 为我们寻找液核发电机的能量来源提供了理论依据。

将(6.23)代入(6.20)得

$$\frac{dW_H}{dt}+J_\sigma+F_E+D+\frac{\partial K}{\partial t}=F_K+F_P+F_\nu+F_G+G_{\tau 0} \tag{6.26}$$

其中 J_σ 为焦耳热损耗率，F_E 为电磁能量通量(向外为正)。(6.26)则表明，液核内重力位能的释放和外部提供的总动能一部分增加了系统的动能 (K) 和补偿粘滞损耗 (D)，一部分则通过反抗电磁力做功转变为系统的电磁能 (W_H)，补偿焦耳热损耗 (J_σ) 和对外输送电磁能。这就是液核内部发电机的能量图像，当系统稳定时，

$$J_\sigma+D=F_K+F_P+F_\nu+F_G+G_\tau \tag{6.27}$$

即提供的总机械能全部用来补偿粘滞和焦耳热损耗，从而构成一幅稳定发电机的能量图象。

(ii) 液核中的能量耗损

液核中的能量耗损包括焦耳热 (J_σ) 和粘滞热 (D) 两类。对于 J_σ 可以这样估计，地球总磁能M是 10^{28} 尔格，这个磁场的自由衰减时间 $\tau\sim5\times10^{11}$ 秒
则

$$J_\sigma\sim\frac{M}{\tau}\simeq10^{16}\text{—}10^{17}\text{ 尔格/秒},$$

也有的作者估计为 10^{18} 尔格/秒。

对于 D，由 $D=\iiint\nu(\nabla\times\boldsymbol{v})^2d\tau$ 估计。

$\nabla\times\boldsymbol{v}\sim\frac{V}{L}$，$V$ 为液核运动的特征速度，由西向漂移估计 $V\sim0.01$—0.1 厘米/秒。L为特征尺度，取地核半径为 3×10^8 厘米，对于液核的粘滞系数了解得还很少，估计为 $10^{-3}<\nu\ll10^9$，由这些参量估计 $10^4<D\ll10^{16}$ (尔格/秒)。由此可见 $D\ll J_\sigma$，即在液核中焦耳热损耗是能量耗散的主要形式。

(iii) 液核中的能量来源

由以上分析可以得出，液核中必须获得量级为 $10^{16}\sim10^{17}$ 尔格的能量提供率，才有可能维持地球稳定的磁场。下面由 G 和表面能量通量 F 两种能量提供方式，分析可能的能量来源。

①热对流

热是地球能源的重要形式。所以早期埃尔萨塞 (W. M. Elsasser)[15,16] 和布拉德 (E. C. Bullard)[22] 地球发电机理论都是以地核中长寿命的放射元素所放出的热能做为发电机的动力来源。地核中的物质受热膨胀，并产生热对流，则由热能所维持的密度不均匀 ($\nabla\rho$) 和对流以(6.25)中 G_τ 的形式提供机械能。

因对流仅局限于液核内部，故 G_τ 与(6.24)式中的 G 相等。考虑对流中，物质的升降运动对 G 的贡献相反，系统净获得的运动能，即为体膨胀产生的上升浮力所做的功，

$$G = \iiint \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}_B \, d\tau \tag{6.28}$$

其中 $f_B = \frac{\alpha E}{c_p}\rho g$ 为因膨胀单位质量所受的浮力。 α 是热体膨胀系数，E 是单位质量的生热率，c_p 是定压比热。

从上述分析可以看出，液核是通过重力做功，将热能转换为运动能的。若取 $\alpha \sim 4.5 \times 10^{-6}$, $g \sim 8 \times 10^2$ 厘米/秒^2, $c_p \sim 8 \times 10^6$ 尔格/克·秒, $V \sim 0.01$—0.1 厘米/秒，则要提供与 $J_\sigma \sim 10^{16}$—10^{17} 尔格/秒相当的能量，液核内单位质量的生热率 $E \sim 10$—100 尔格/克·秒，相应地核总的生热率 $\sim 10^{27}$ 尔格/秒。也有人估算为 2×10^{25} 尔格/秒[20]。

已经知道地球表面的总热流 2×10^{20} 尔格/秒，其中大部分来源于地壳中放射性元素的衰变。照此估算，地壳中单位质量的生热率 E 约为 10^{-}[illegible]—10^{-}[illegible] 尔格/克·秒，因此液核中若有足以维持发电机的热源，其放射性物质的含量要远超出地壳。有人认为这是不可能的[20]。

②外来引力场的作用

外来引力场，如月亮、太阳的引力，将引起地球内部的运动。固体潮、潮汐摩擦、地球进动等就是这种运动的表现形式。它们将通过(6.24)中的 F_P、F_K 和 F_ν 对液核提供能量。其中 F_ν 因粘滞系数 ν 很小，可以忽略。而固体潮尽管可引起幔核界面高达 6 厘米的径向运动，但因速度仅 10^{-5}—10^{-6} 厘米/秒，所以相对 F_P, F_K 量级也是很小的。下面我们重点考察地球进动的动力学效应。

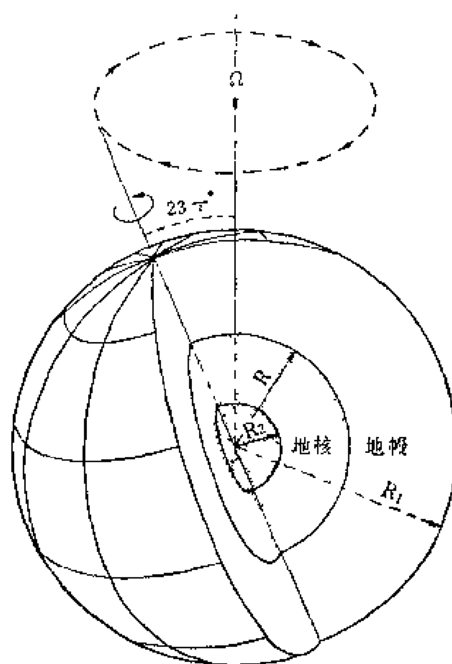


图 6.25 地球的进动

如图6.25所示，地球进动周期 $T = 25700$ 年，进动角速度 $\Omega = 7.7 \times 10^{-12}$ 弧度/秒，自转角速度 $\omega = 7.2 \times 10^{-5}$ 弧度/秒，进动轴与自转轴的夹角为23.5°。可以证明进动角速度 Ω 与动力扁度(由惯性矩定义)成正比，而整个地球的动力扁度与地核不同，分别为 3.28×10^{-3} 和 $2.45 \times 10^{-}$[illegible]。因此地核的进动将落后于地幔。结果地幔与地核发生撞击，并通过 F_P (F_ν 可忽略)传递能量。有关 F_P 的计算，读者可参阅马尔库斯 (W. V. R. Malkus) 的著述[23]。这里我们近似给出如下估计。

设 $\boldsymbol{\Omega}^1 = \boldsymbol{\Omega}_{外} - \boldsymbol{\Omega}_{内}$ 为地幔与地核的进动角速度差,则地核所受地幔的作用力矩

$$\Gamma = \iiint \boldsymbol{r} \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}^1) \times \boldsymbol{r}]\rho d\tau \sim \pi\rho r^5 |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}^1|$$

这个力矩将使地核有与地幔相同进动速度的趋势。而力矩 Γ 正是由地幔施于地核表面的正应力 P 产生的。由此估计 P 的量级为

$$P \sim \frac{1}{4}\rho r^2 |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}^1| \sim 50\text{—}70 \text{ 达因/平方厘米}$$

$$(\rho \sim 10 \text{ 克/立方厘米})$$

代入 $F_P = -\oiint P\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds}$ 得

$$F_P \sim 10^{17}\text{—}10^{18} \text{ 尔格/秒} \quad (V \sim 0.01\text{—}0.1 \text{ 厘米/秒})$$

与能量耗散率 J_σ 相当。因此地球的进动被认为是液核发电机最有希望的能量来源[23]。但近来也有人提出了异议[24]。

(3) 重力分异

有人主张,若地球深部的化学、重力分异仍在进行,则与热对流一样,内重力场做功(G_r)将提供能量。最近洛珀(D. E. Loper)提出,地球内核由于化学分异,较轻的物质被浮上升进入外核,是液核发电机高效率的能源[25]。但很显然,若稳定的地磁场的能量来源于上述分异作用,则随着分异作用的减弱和结束,地磁场将逐渐减弱并最终消失,这也是难以令人置信的。

通过以上分析可以看出,地球的进动、热对流和物质分异是液核发电机三种可能的能量来源。但由于我们对地球深部的知识还很缺乏,而这些问题无一不涉及地球的演化历史这一更大的疑难问题。所以目前要解决发电机能量来源问题仍然是不现实的。

(三) 液核发电机维持磁场的过程

方程(6.20)、(6.23)所示液核发电机的能量图像是发电机物理过程的重要组成部分,但无论如何它没有也不可能回答具体的磁场维持过程。这一节将从具体磁场维持的物理图相和数学表述两个方面来讨论这一问题。

1. 磁场维持的简单图像

了解了发电机的能量过程后,当考虑磁场维持的具体过程和图像时,我们可以不考虑(6.20)式焦耳热效应。因为这只有提供能量上的差别,对磁场的图像不会有本质影响。这相当于 $\sigma \to \infty$ 的情况。这时方程(5.26)退化为(5.27),即

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}) \tag{5.27}$$

在第五章第1节我们讨论了它的物理意义,即(5.27)意味着,磁场随液核介质一起运动,两者完全"冻结"在一起,这时运动反抗电磁张力拉伸磁力线所做的功全部用来加强磁场。

在液核内,无论是径向对流、物质分异或进动哪种能量提供方式,由于深部物质有较小的角动量,外部有较大的角动量,故径向运动的结果,为维持角动量守恒则液核在半径方向将发生不均匀的旋转,愈靠内部,速度愈快。因这里只做定性的讨论,我们不妨把这种

差速效应考虑作内外分别均匀转动的两层,内层角速度 (ω_B) 大于外层角速度 (ω_A)。 这种简化称为"刚体"液核模型(图 6.26a)。内层有相对于外层的角速度 $\omega = \omega_B - \omega_A$。这种差速转动，正是地面非偶极子磁场西向漂移的原因。设在液核中存在有原始的微弱磁场。下面我们将讨论由于径向和差速两种运动形式与这一微弱磁场相互作用加强原始微弱磁场的可能性。

由于冻结效应，原始微弱磁场的磁力线将随"内"核相对于"外"核以角速度 ω 一起运动,于是磁力线被沿纬圈方向拉长,纬圈方向磁场分量增强。 图 6.26a 为开始转动，经过 $t = \frac{\pi}{\omega}\left(\frac{1}{2}\text{周}\right)$, $t = \frac{2\pi}{\omega}$ (一周) 时,磁场被拉伸和加强的过程。这种过程一直重复至磁力线张力所产生的恢复力矩

$$\begin{aligned} \Gamma &= \iiint \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{j} \times \mu \boldsymbol{H}) d\tau = \iiint \boldsymbol{r} \times \nabla \cdot \left(\frac{\mu \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}}{4\pi}\right) d\tau \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oiint (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H}) \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{6.29}$$

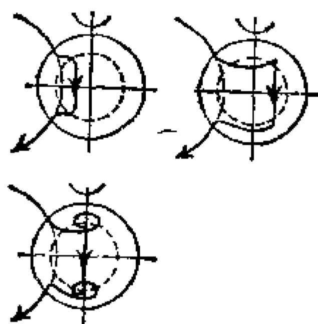


图 6.26 a　地核内部"环型"场的形成过程

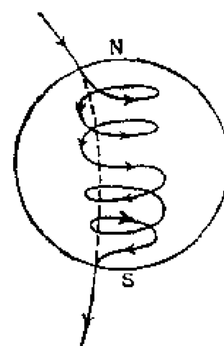


图 6.26 b　地核内部的"环型"场

与和径向运动 (V) 相联系的科里奥利力所产生的机械转矩

$$\Gamma_G = \iiint 2\rho\, \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}') d\tau \tag{6.30}$$

相平衡时,相对角速度 ω 即维持一个稳定的常数。最后形成稳定的环型磁场 H_{T1} (图 6.26 b) 从上述过程不难理解,这样形成的环型磁场南北半球方向相反。(6.30) 式中的 ρ 为液核密度, ω' 为地球自转角速度。

第五章第 1 节已经证明,在导体外环型磁场为零(设地幔 $\sigma = 0$). 上述过程只产生了液核内的环型场,外面原始微弱磁场并不改变。(6.20) 式中的电磁能流通量

$$\begin{aligned} F_E &= \oiint \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}{4\pi} \cdot d\boldsymbol{s} = \oiint \frac{-1}{4\pi} (\boldsymbol{v} \times \mu \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oiint [H_r(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u}) + u_r H^2] \cdot d\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{6.31}$$

由于只考虑差速效应,核内 H_r、u_r 皆为零,故电磁能流通量 F_E 为零,差速效应不能对外提供电磁能量，因此外磁场不会改变。显然这样的过程不能解决地磁场的维持问题。这正是柯林 (Cowling) 早在 1934 年就证明过的： 稳定的轴对称分布的磁场不能被同样简单的对称运动所维持。上面只考虑了差速转动效应，而没涉及径向运动本身与磁场的相互作用。 与环型场形成的同时，径向运动 u_r 将把纬圈方向的磁力线拖起，如图 6.27b 所

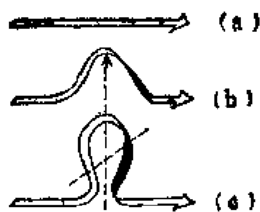
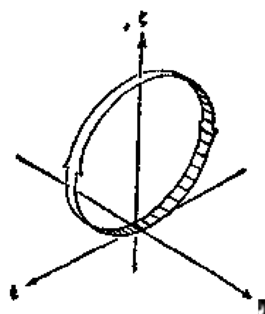


图 6.27 环型磁场的变形


图 6.27(d) 子午面内的磁力线环
ξ. 径向; ζ. 向南; η 向东。

示。被拖起变形的磁力线,还将受到科里奥利力矩的作用。由(6.30),

$$d\Gamma_C = 2\rho\, \boldsymbol{r}\, d\tau \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{e}_r \\ 2\rho d\tau r u_r \omega' \sin\theta & \boldsymbol{e}_\theta \\ 0 & \boldsymbol{e}_\lambda \end{cases}$$

将 Γ_G 分解为与 ω^1 平行和垂直两部分,

$$\Gamma_{/\!/} = -2\rho d\tau r u_r \omega' \sin^2\theta \qquad \Gamma_\perp = \rho d\tau r u_r \omega' \sin 2\theta$$

正是由于 Γ_G 有平行于 ω' 的分量,才使液核发生上述的差速转动,而 $\Gamma_\perp$ 将把磁力线扭歪到子午圈方向(图 6.27(c)(d))。由于 $\Gamma_\perp$ 与 $\sin 2\theta$ 相联系,因此南北半球子午圈内的磁场方向相同。经这样一个复杂的过程,其最后效果与第一步情况不同了。磁场不再单单是纬圈方向的环型磁场,而同时有了经向与子午圈方向的磁场。这种元过程分布于核内各处,统计平均的效果可使原始微弱的磁场得到加强。此时电磁能流通量(6.31)F_E 不再等于零,系统将电磁能量反馈给原始微弱磁场,起到了自激发电机的效果。

上述过程称为埃尔萨塞(W. M. Elsasser)[16]、帕克(E. N. Parker)发电机模型。近年来还把它成功地应用于行星、太阳、恒星、银河系、白矮星等天体磁场动力学问题的研究。这个模型的特点是物理过程清楚,图像简单,但最后产生偶极子磁场的意义却不直接。与此相比,布拉德发电机过程则给出了产生偶极子磁场的具体图像[22]。布拉德过程与埃尔萨斯、帕克模型物理实质是相同的。它是考虑地球内部的两种运动与四种类型的

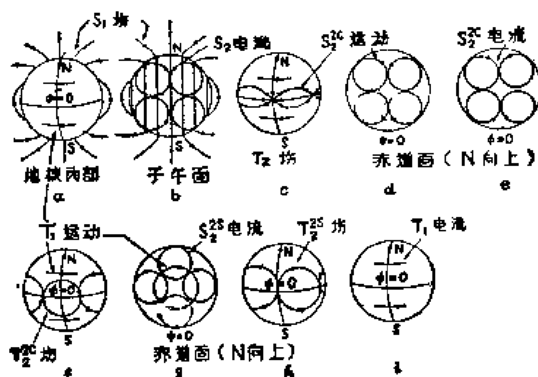


图 6.28 原始微弱磁场加强过程示意图

磁场相互作用，加强和维持偶极子磁场的过程。图 6.28 给出了这个过程的示意图。

第五章第 1 节中已经证明，磁场H和不可压缩流体的速度场V都可分解为环型和极型两种场。布拉德考虑了两种运动

$$u_{T_1}=\nabla\times r\,\phi^u_{T,1},\ \phi^u_{T,1}=Q_{T_1}(r)P_1(\cos\theta);$$

$$u_{S_2^{2c}}=\nabla\times\nabla\times r\phi^u{}_{S_2^{2c}},\ \phi^u{}_{S_2^{2c}}=Q_2^{2c}(r)P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda$$

和四种磁场$H_{S,1}$，$H_{T,2}$，$H^{2c}_{T,2}$和H^{2s}_{T}，由上述速度场的符号形式，不难了解磁场各符号的意义，例如$H^{2c}_{T,2}=T^2_2(r)P^2_2(\cos\theta)\sin 2\lambda$，其中$T_1$运动即帕克模型中的差速转动，$S_1$磁场为轴向偶极子磁场，$T_2$磁场是帕克模型中的环型场。布拉德过程包括：图 6.28a 所示T_1差速运动和S_1偶极场作用产生S_2电流 b 和T_2磁场 c，这相应于帕克过程的第一步（图 6.26a）；T_2磁场又与S_2^{2c}运动 c，d 作用，将感生（$j=\sigma v\times H$）S_2^{2c}电流 e 和T_2^{2c}磁场 f；T_2^{2c}场再和T_1运动作用产生S_2^{2s}电流 g 和T_2^{2s}磁场，最后，T_2^{2s}场与S_2^{2c}运动作用产生T_1电流 (i) 和S_1场 (a)，原始磁场S_1场得到加强。从图 6.28 c 和 d 可以看出，S_2^{2c}所表示的正是一种热对流的图像，物质沿径向上升，然后向四面水平散开，再沿径向下落，因此帕克与布拉德发电机过程中起重要作用的都是差速转动和经向对流两种运动。

2. 布拉德过程的数学表述

如第 5 章第 1 节所述，完整的地磁场起源的发电机理论是求解运动与磁场相互耦合的非线性方程组 (5.26)、(5.36)，一般称为"非线性发电机"理论[26]。至今这个方程组的严格解答在数学上仍然是不可能的。只在当洛伦茨力(5.34)对运动的影响可以用微扰处理的情况下，方程变成线性的，可分别求得稳定的磁场和运动的解答，称为"线性发电机"、布拉德过程就是"线性发电机"的一种。但需指出，在线性发电机过程中，随着磁场的增强，洛伦茨力对运动的约束是否会导致运动稳定性改变，使问题不再具有线性特征，这是发电机理论仍然没有解决的问题[21]。

若长度单位以核半径a量度，时间以衰减时间$4\pi\sigma a^2$，速度以$(4\pi\sigma a)^{-1}$量度（设磁导率$\mu=1$），引入新的无量纲变量$t=4\pi\sigma a^2t'$，$x_i=ax_i$ ($i=1, 2, 3$)，则方程(5.26)成为

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\nabla H+V\nabla\times(u\times H)\tag{6.32}$$

这时(6.32)中t和u即为t、u'，已成为无量纲的量，u为速度矢量，

$$v=\frac{V}{4\pi\sigma a}u\tag{6.33}$$

V是表示速度大小的常数，算符∇是相应于变量x'的微分运算。

将磁场H和速度场u（设液体不可压缩）表示为极型向量H_S、u_S和环型向量H_T、u_T。定义

$$D_T=\nabla\times r\left(\frac{\phi}{r}\right)$$

$$D_S=\nabla\times\nabla\times r\left(\frac{\phi}{r}\right)\tag{6.34}$$

D代表速度场u和磁场H。(6.34)中的ϕ与(5.81)所定义的ϕ差一因子$\frac{1}{r}$。设

$$\phi_n^m = R_n^m(r, t)P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{matrix} \tag{6.35}$$

则将(6.34)在球坐标系展开为分量形式，有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{T,n}^m &= \left(0,\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi_n^m}{\partial\lambda},\ -\frac{\partial\phi_n^m}{r\partial\theta}\right)\\ \boldsymbol{D}_{S,n}^m &= \left(\frac{n(n+1)}{r^2}\phi_n^m,\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\phi_n^m\right),\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\phi_n^m)\right)\end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

相应于 ϕ_n^m 中 $\cos m\lambda$ 和 $\sin m\lambda$ 的不同取法，向量$\boldsymbol{D}$分别有 $\boldsymbol{D}_{T,n}^{m,c}$、$\boldsymbol{D}_{S,n}^{m,c}$ 和 $\boldsymbol{D}_{T,n}^{m,S}$、$\boldsymbol{D}_{S,n}^{m,S}$ 之分。我们考虑四种磁场，即

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{S,1} + \boldsymbol{H}_{T,2} + \boldsymbol{H}_{T,2}^{2c} + \boldsymbol{H}_{T,2}^{2S} \tag{6.37}$$

和三种运动

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{T,1} + \boldsymbol{u}_{S,2}^{2c} + \boldsymbol{u}_{S,2}^{2S} \tag{6.38}$$

按(6.36)将(6.37)、(6.38)中不同的向量分别写成分量形式，得

$$\boldsymbol{H}_{S,1} = \begin{cases} \dfrac{2}{r^2}S_1(r)P_1(\cos\theta) & \boldsymbol{e}_r\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{dS_1(r)}{dr}\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} & \boldsymbol{e}_\theta\\ 0 & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases} \tag{6.39$_1$}$$

$$\boldsymbol{H}_{T,2} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{e}_r\\ 0 & \boldsymbol{e}_\theta\\ \dfrac{T_2(r)}{r}\dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta} & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases} \tag{6.39$_2$}$$

$$\boldsymbol{H}_{T,2}^{2c} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{e}_r\\ -2\dfrac{T_2^{2c}(r)}{r\sin\theta}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\lambda & \boldsymbol{e}_\theta\\ -\dfrac{T_2^{2c}(r)}{r}\dfrac{dP_2^2(\cos\theta)}{d\theta}\cos 2\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases} \tag{6.39$_3$}$$

$$\boldsymbol{H}_{T,2}^{2S} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{e}_r\\ 2\dfrac{T_2^{2S}(r)}{r}\dfrac{P_2^2(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos 2\lambda & \boldsymbol{e}_\theta\\ \dfrac{T_2^{2S}(r)}{r}\dfrac{dP_2^2(\cos\theta)}{d\theta}\sin 2\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases} \tag{6.39$_4$}$$

其中 $S_1(r)$、$T_2(r)$、$T_2^{2c}(r)$、$T_2^{2S}(r)$ 相应于(6.35)式中的 $R_n^m(r)$，是方程(6.32)中的待解函数。对于速度场，

$$\boldsymbol{u}_{T,1} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{e}_r\\ 0 & \boldsymbol{e}_\theta\\ -\theta_{T,1}(r)\dfrac{dP_1(\cos\theta)}{d\theta} & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases} \tag{6.40$_1$}$$

$$
\boldsymbol{u}_{S,2}^{2c}=\begin{cases}\dfrac{6}{r^2}\,Q_2^{2c}(r)P_2^2(\cos\theta)\cos 2\lambda & \boldsymbol{e}_r\\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dQ_2^{2c}(r)}{dr}\,\dfrac{dP_2^2(\cos\theta)}{d\theta}\cos 2\lambda & \boldsymbol{e}_\theta\\[2ex] -\dfrac{1}{r}\,\dfrac{dQ_2^{2c}(r)}{dr}\,\dfrac{2P_2^2(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin 2\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases}\tag{6.40$_2$}
$$

$$
\boldsymbol{u}_{S,2}^{2S}=\begin{cases}\dfrac{6}{r^2}\,Q_2^{2S}(r)P_2^2(\cos\theta)\sin 2\lambda & \boldsymbol{e}_r\\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dQ_2^{2c}(r)}{dr}\,\dfrac{dP_2^2(\cos\theta)}{d\theta}\sin 2\lambda & \boldsymbol{e}_\theta\\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dQ_2^{2c}(r)}{dr}\,\dfrac{2P_2^2(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos 2\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases}\tag{6.40$_3$}
$$

将(6.37)的具体形式(6.39)和(6.38)的具体形式(6.40)代入方程(6.32)，由(6.32)的分量形式，并考虑同阶球谐函球的对应部分必须相等，可得方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
r^2\frac{\partial S_1(r)}{\partial t}&=\frac{\partial^2 S_1(r)}{\partial r^2}-2S_1(r)+\frac{216}{5}V\big(Q_2^{2c}(r)T_2^{2c}(r)-Q_2^{2S}(r)T_2^{2c}(r)\big)\\
r^2\frac{\partial T_2}{\partial t}&=r^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2}-6T_2+V\left\{\left[\frac{2}{3}\left(\frac{dQ_{T,1}}{dr}-\frac{2}{r}Q_{T,1}\right)S_1\right]\right.\\
&\quad+\frac{72}{7}\left[Q_2^{2c}\frac{\partial T_2^{2c}}{\partial r}+2\left(\frac{dQ_2^{2c}}{dr}-\frac{Q_2^{2c}}{r}\right)T_2^{2c}\right]\\
&\quad\left.+\frac{72}{7}\left[Q_2^{2S}\frac{\partial T_2^{2S}}{\partial r}+2\left(\frac{dQ_2^{2c}}{dr}-\frac{Q_2^{2S}}{r}\right)T_2^{2S}\right]\right\}\\
r^2\frac{\partial T_2^{2c}}{\partial t}&=r^2\frac{\partial^2 T_2^{2c}}{\partial r^2}-6T_2^{2c}+V\left\{-2Q_{T,1}T_2^{2S}\right.\\
&\quad+\frac{6}{7}\left[Q_2^{2c}\frac{\partial T_2}{\partial r}+2\left(\frac{dQ_2^{2c}}{dr}-\frac{Q_2^{2c}}{r}\right)T_2\right]\\
&\quad-\frac{2}{3}\left[3Q_2^{2S}\frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2}+\left(\frac{dQ_2^{2S}}{dr}-\frac{6}{r}Q_2^{2S}\right)\frac{\partial S_1}{\partial r}\right]\\
&\quad\left.+\left(\frac{d^2Q_2^{2S}}{dr^2}-\frac{2}{r}\frac{dQ_2^{2S}}{dr}\right)S_1\right\}\\
r^2\frac{\partial T_2^{2S}}{\partial t}&=r^2\frac{\partial^2 T_2^{2S}}{\partial r^2}-6T_2^{2S}+V\left\{2Q_{T,1}T_2^{2c}\right.\\
&\quad+\frac{6}{7}\left[Q_2^{2S}\frac{\partial T_2}{\partial r}+2\left(\frac{dQ_2^{2S}}{dr}-\frac{Q_2^{2S}}{r}\right)T_2\right]\\
&\quad+\frac{2}{3}\left[3Q_2^{2c}\frac{\partial^2 S_1}{\partial r}+\left(\frac{dQ_2^{2c}}{dr}-\frac{6}{r}Q_2^{2c}\right)\frac{\partial S_1}{\partial r}\right]\\
&\quad\left.+\left(\frac{d^2Q_2^{2c}}{dr^2}-\frac{2}{r}\frac{dQ_2^{2c}}{dr}\right)S_1\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{6.41}
$$

(6.41) 即为由特定的运动 $Q_2^{2c}(r)$、$Q_2^{2S}(r)$、$Q_{T,1}$ 求解相应速度的本征值 V 和本征函数 $S_1(r)$、$T_2(r)$、$T_2^{2c}(r)$ 和 $T_2^{2S}(r)$ 的联立微分方程组。其中忽略了 $n>2$ 的高阶项。在稳定情况下(6.41)式左端为零，方程成为稳定发电机的微分方程组。

在地核表面 ($r=1$)，核内 S_1 场和核外偶极子磁场的法向、切线分量必须连续，由(6.39₁)和偶极子磁场的分量形式，可得

$$\left.\begin{aligned} S_1(r) &= \frac{g_1^0}{r} \\ \frac{dS_1(r)}{dr} &= \frac{-g_1^0}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad r=1 \tag{6.42}$$

要使(6.42)成立和地核表面环型磁场为零，则有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dS_1(r)}{dr}+\frac{S_1(r)}{r}=0 \\ &T_2(r)=T_2^{2c}(r)=T_2^{2S}=0 \end{aligned}\right\} \quad r=1 \tag{6.43}$$

(6.43) 即为方程 (6.41) 中的本征函数 $S_1(r)$、$T_2(r)$、$T_2^{2c}(r)$、$T_2^{2S}(r)$ 所要满足的边界条件。

在地核中维持稳定磁场的发电机是否存在，其数学内容就是是否存在实数本征值 V，使得在稳定情况下 $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ 的微分方程组 (6.41) 有满足边界条件 (6.43) 的非零解 $S_1(r)$, $T_2(r)$, $T_2^{2c}(r)$, $T_2^{2S}(r)$。布拉德在计算中只考虑了(6.38)中的前两项运动(这相当于方程 6.41 中 $Q_2^{2S}=0$)，并指定

$$Q_2^{2c}=r^3(1-r)^2, \quad Q_{T,1}=\varepsilon r^3 \tag{6.44}$$

其中 ε 为常数，除本征值 V 外，速度场 u 已经给定。

联立微分方程组 (6.41) 用解析方法求解是不可能的。布拉德将 r 从 0→1 的区间等分为 10 份，用差分方程代替微分方程(6.41)，求解 $r=0.1, 0.2, \cdots 1.0$ 时，$S_1(r)$、$T_2(r)$、$T_2^{2c}(r)$ 和 $T_2^{2S}(r)$ 的代数方程组。结果对于 ε 的不同取值和 Q_2^{2c}、$Q_{T,1}$ 不同的函数形式等多种情况，利用计算机进行数值计算，证明了实数本征值 V 的存在，并求出了相应的本征值和本征函数。这就肯定了稳定发电机维持的可能性。

有关磁场的绝对值，发电机理论并未做任何规定。其量级可由 (6.29)、(6.30) 电磁力矩和机械转矩(科里奥利力矩)的平衡来估计，若取 $V\sim 0.01$ 厘米/秒，$H_{T,2}$ 大约为 4—500 高斯。

为了考虑(6.41)中忽略 $n>2$ 阶高次项磁场的影响，布拉德扩展到 $n\leqslant 4$ 阶磁场的计算。结果同样证明了实数本征值 V 的存在。已经计算到了 $n=4$，于是人们乐观地认为布拉德模型成功地解决了稳定发电机的存在问题。即 $u_{T,1}$、$u_{S,2}^{2c}$ 运动与磁场 $H_{S,1}$、$H_{T,2}$、$H_{T,2}^{2c}$、$H_{T,2}^{2S}$ 相互作用，确实可以维持稳定的偶极子磁场 $H_{S,1}$。

随着六十年代末高速大型计算机的出现，使人们在方程 (6.41) 的计算中可以保留更多的高阶项。于是发现，高阶项的影响是不能忽略的。随着方程 (6.41) 中保留阶数的增高，本征值 V 将变得不稳定。例如，利来 (F. E. M. Lilley)[27] 设 $Q_2^{2c}=r^3(1-r)^2$，$Q_{T,1}=10r^2(1-r)$，取不同阶数 n，求得相应本征值 V 列于表 6.2。表中 d 为半径从 0→1 的分割段数，M 为方程(6.32)的计算中所考虑的磁场类型的个数。表中清楚地显示出，随着阶数 n 的增加，本征值 V 愈来愈大。于是一度认为已经解决了的稳定发电机的存在问题再次陷入危机。但过了不久，利来[27]经过计算证实，倘若方程(6.41)中保留 $u_{S,2}^{2S}$ 运动(布拉德未考虑这项)，

表 6.2 布拉德模型的本征值 V[27]

n	M	$V(d=12)$	$V(d=14)$
2	4	49.3	50.4
3	7	67.3	70.2
4	12	72.8	75.0
5	17	95.3	102.3

表 6.3 利来修正的布拉德模型的本征值 V[27]

n	M	V								
		$d=10$	$d=12$	$d=14$	$d=16$	$d=18$	$d=20$	$d=22$	$d=24$	$d=26$
2	4	22.66	23.25	24.45	24.12	25.25	25.50	25.70	25.85	25.97
3	7	12.24	15.31	18.63	22.28	26.30	30.58	34.58	37.75	39.91
4	12	11.50	13.72	15.82	17.76					
5	17	12.69	15.56	18.41	21.28					
6	24				20.73					

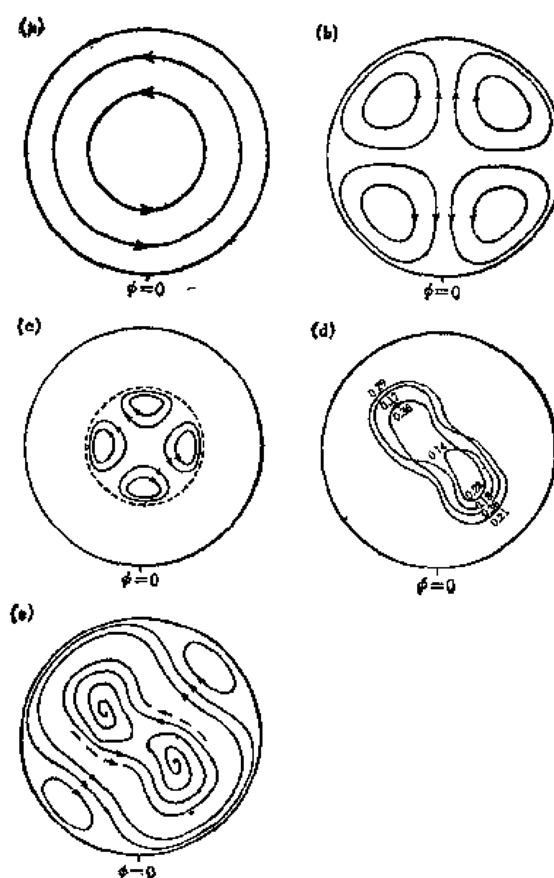


图 6.29 利来所考虑的速度场的图象

a. T_1运动 b. S_2^{2c} 运动 c. S_2^{2s} 运动 d 上半球合成速度流线在赤道面上的投影；
e. 赤道面内合成速度的流线。

取

$$
\left.\begin{aligned}
&Q_{T,1} = 10r^2(1 - r^2) \\
&Q_2^{2c} = r^3(1 - r^2)^2 \\
&Q_2^{2S} = \begin{cases} 1.6r^3(1 - 4r^2)^2 & 0 \leqslant r \leqslant 0.5 \\ 0 & 0.5 < r \leqslant 1 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{6.45}
$$

即使考虑高阶项的影响，本征值 V 仍然是稳定的(表 6.3)。这样，一度陷入危机的布拉德模型又重新复苏。图 6.29 绘出了布拉德、利来计算中所取运动场的图象。图 6.30 为取 $n=5$，$d=12$ 相应本征值 $V=15.56$ 时的本征函数。从图 6.30 可以看出，在核内各类磁场中，T_2、T_2^{2S}、T_2^{2c} 三种磁场明显地占据优势，这正是布拉德过程所考虑的环形磁场。特别是其中以 T_2 环型磁场最强，它代表了核内磁场的主要成份。

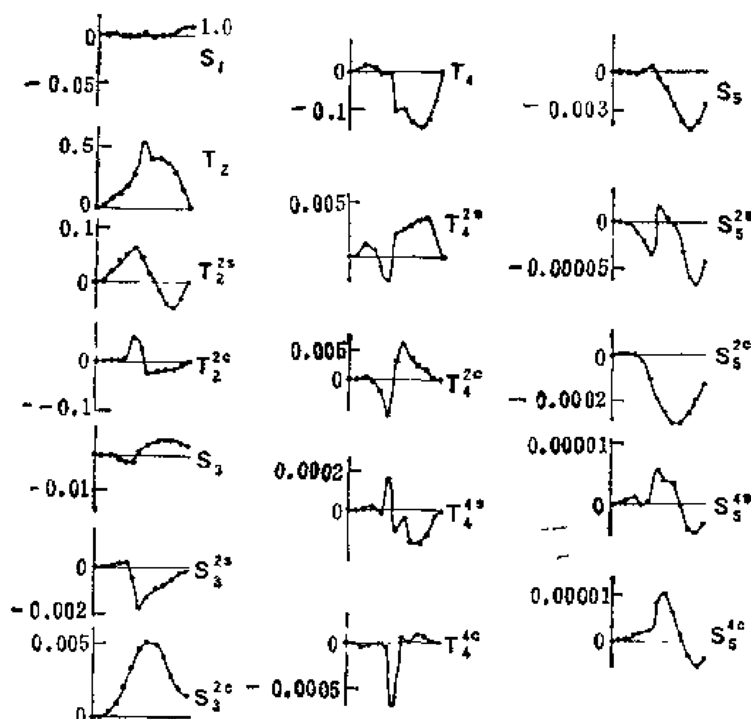


图 6.30

$n=5$，$d=12$，$V=15.56$ 的本征函数的分布

横坐标为 r，端点 $r=1$。

通过上述的简单讨论，我们可以初步了解发电机理论的数学处理方法及其相应的物理内容。不难看出，即使是相当简单的运动图像，数学计算也是很复杂的。这也是发电机理论进展迟缓的原因之一。除了以上两节介绍的物理图像和数学处理方法外，还有人企图在实验室模拟发电机的物理过程，已经取得了一些定性的结果。但由于磁场和运动模拟相似条件的困难，这方面的工作进展也不显著。

3. 非稳态发电机

如果说布拉德-利来的稳定发电机模型是成功的，那么考虑到已被古地磁研究所证实的地球偶极子磁场极性倒转的事实，则将这样的理论扩展到非稳定状态，也必须能解释地磁场的这种不稳定性。但很遗憾，求解非稳态的方程(6.41)在计算技术高度发展的今天，

仍然是相当困难的。有人主张，极性的反转是稳态发电机中运动场被扰动的结果[28,29,30]。但事实上这种扰动的源至今仍不清楚，它可能是对流运动固有的无规则属性的表现，也可能是磁场与运动两者非线性耦合、能量不断交换的结果。这里不打算讨论这一过程的细节，只从简单的发电盘(图 6.23)和耦合发电盘出发，说明运动与磁场的非线性耦合导致磁场反转的可能性。

①均匀发电圆盘的非稳态解

从方程(6.14)、(6.15)中消去 ω，得

$$\frac{d^2}{dt^2}(\log I)=\frac{GM}{JL}\left(1-\frac{M}{G}I^2\right) \tag{6.46}$$

令 $\tau=\left(\dfrac{2GM}{JL}\right)^{1/2}t,\qquad y=\log(MI^2/G),$

则(6.46)化为

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}=1-e^y \tag{6.47}$$

然后对(6.47)做变换，令

$$z=\frac{dy}{d\tau},\qquad \text{得}$$

$$z\frac{dz}{dy}=1-e^y \tag{6.48}$$

积分(6.48)得

$$z^2=A+2(y-e^y) \tag{6.49}$$

其中 A 为积分常数，由 $\tau=0$ 时 y 和 $z=\dfrac{dy}{d\tau}$ 的初始值 y_0、z_0 确定，

$$A=\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2_{\tau=0}-(y_0-e^{y_0})$$

对于给定的初始值，(6.49)为 yz 平面的闭合曲线。若 $A=2$，则 $y=0$，$z=0$，相应于方程 (6.14)、(6.15)的稳定解(6.16)。图 6.31 给出不同初始值 A，$e^{\frac{1}{2}y}=\left(\dfrac{M}{G}\right)^{1/2}I$ 随 τ

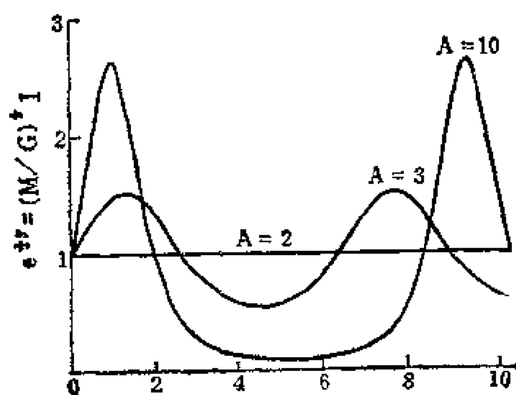


图 6.31 $e^{\frac{1}{2}y}=\left(\dfrac{M}{G}\right)^{1/2}I$ 随 t 的变化[19]

的振动曲线。由图看出，尽管电流 I 可以有较大的振动，但无论如何系统的电流不会反向。因此如图 6.23 所示的圆盘发电机不可能产生磁场的倒转。

②耦合圆盘发电机

若将图 6.23 中的单一圆盘改为如图 6.32 所示的耦合装置,则系统的振动将有可能导致磁场反向。耦合圆盘满足的方程为

$$\begin{cases} L_1\dfrac{dI_1}{dt}+R_1I_1=\omega_1M_1I_2, \\ L_2\dfrac{dI_2}{dt}+R_2I_2=\omega_2M_2I_1, \\ J_1\dfrac{d\omega_1}{dt}=G_1-M_1I_1I_2, \\ J_2\dfrac{d\omega_2}{dt}=G_2-M_2I_2I_1。\end{cases} \tag{6.50}$$

(6.50)中各符号的意义与(6.14)、(6.15)相同。若只考虑两个相同的圆盘,即假定 $L_1=L_2=L$, $R_1=R_2=R$, $M_1=M_2=M$, $G_1=G_2=G$, $J_1=J_2=J$,并做变换,令

$$\begin{cases} I_1=\left(\dfrac{G}{M}\right)^{1/2}x_1,\ \ I_2=\left(\dfrac{G}{M}\right)^{1/2}x_2, \\ \omega_1=(GL/JM)^{1/2}y_1,\ \ \omega_2=(GL/JM)^{1/2}y_2, \\ t=(JL/GM)^{1/2}\tau,\ \ \mu=\left(\dfrac{R}{L}\right)\left(\dfrac{LJ}{GM}\right)^{1/2} 。\end{cases} \tag{6.51}$$

则(6.50)成为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau}+\mu x_1=y_1x_1, \\ \dfrac{dx_2}{d\tau}+\mu x_2=y_2x_1, \\ \dfrac{dy_1}{d\tau}=\dfrac{dy_2}{d\tau}=1-x_1x_2。\end{cases} \tag{6.52}$$

由(6.52)第 3 式可得

$$y_1-y_2=C \tag{6.53}$$

C 为积分常数,由圆盘初始角速度决定。(6.53)表明,两个圆盘角速度的差始终保持

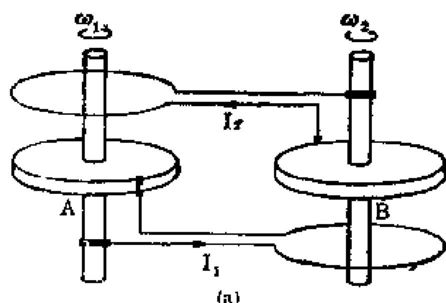


图 6.32a 双耦合发电盘

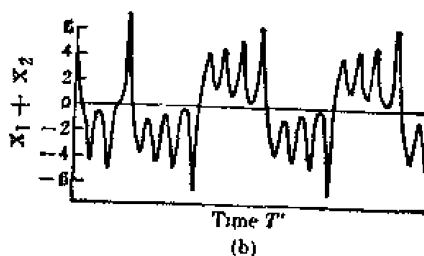


图 6.32b 电流 I_1+I_2 随时间 t 的变化[31]

一个常数。用解析方法求解(6.52)是困难的，图 6.32b 为用数值方法求解(6.52)所得与电流 I_1+I_2 成比例的 x_1+x_2 随时间 τ 的变化。由图可以看出，由于两个盘之间的电磁耦合，圆盘角速度 ω 将被扰动。与此相应，系统电流也发生变化。当电流扰动加大到一定程度时，系统电流反向，并有可能围绕新的反向后的平衡位置摆动，结果磁场发生倒转。

耦合圆盘系统中，磁场倒转的事实，增强了人们对发电机理论的信念。但无论如何，它与地核内部可能的真实过程相差太远。与稳定发电机理论相比，非稳定发电机则更不完善。

参 考 书 目

[1] Stacey, F. D, 1977 *Physics of the Earth, 2nd* edition, John Wiley and Sons, Inc.

[2] 塔林，D. H. 1978.《古地磁学的原理和应用》，科学出版社。

[3] Day, R., 1979 Recent advances in rock magnetism, *Revs Geophys Space Phys*, 17, 249—256.

[4] Matsushita, S, and W H Campbell, 1967. *Physics of Geomagnetic Phenomena,* Academic Press, New York and London.

[5] Levi, S, and S. K Banerjee, 1976 On the possibility of obtaining relative paleointensities from lake sediments, *Earth Planet Sci Lett*, 29, 219—226

[6] Banerjce, S K., and S P Mellema, 1974. A new method for the determination of paleointensity from the ARM properties of rocks, *Earth Planet Sci. Lett.*, 23, 177—188

[7] Dodson, R. E., et al, 1977. Paleomagnetic records of secular variation from Lake Michigan sediment cores, *Earth Planet. Sci. Lett*, 34, 387—395.

[8] Levi, S, and R. T Merrill, 1976 A Comparison of ARM and TRM in magnetic, *Earth Planet Sci, Lett*, 32, 171—184.

[9] 力武常次，1972.《地球电磁気学》，岩波書店。

[10] Currie, R G., et al, 1963 Remagnent magnetization of some Upper Cretaceous granitic plutons in the Nevata, California, *J Geophys Res*, 68, 2263—3380

[11] Irving, E., 1964 *Paleomagnetism, John Wiley*, New York

[12] Maelhinny, M. W., 1973. *Paleomagnetism and Plate Tectonics,* Cambridge Univ Press.

[13] 傅承义，1976.《地球十讲》，科学出版社。

[14] Cox, A, 1969 Geomagnetic reversal, *Science*, 163, 237—245

[15] Elsasser, W. M, 1950 The Earth's interior and geomagnetism, *Revs Mod Phys*, 22, 1—35.

[16] Elsasser, W M, 1956 Hydromagnetic dynamo theory, *Revs Mod Phys*, 28, 135—163

[17] Hide, R, and P. H. Roberts, 1961 The origin of the main geomagnetic field, in: *Phys. Chem. Earth*, 4, 27

[18] Gubbins, D, 1974 Theory of the geomagnetic and solar dynamos, *Revs Geophys Space Phys.*, 12, 137—154

[19] Gubbins, D, 1975 Numerical solutions of the hydromagnetic dynamo problem (for the Earth), *Geophys J R astr Soc*, 42, 295—305

[20] Gubbins, D, 1976. Observational constraints on the generation process of Earth's magnetic field, *Geophys J R astr Soc*, 47, 19—39

[21] Levy, E H, 1979 Dynamo magnetic field generation *Revs Geophys Space Phys*, 17 277—281.

[22] Bullard, E. C, and H Gellman, 1954 Homogeneous dynamo and terresterial magnetism, *Phil Trans. Roy, A*, 247, 213—278.

[23] Malkus, W V R., 1968 Precession of the Earth as the cause of geomagnetism, *Science*, 160, 259—264

[24] Rochester, M G, and J A Jacobs, 1975. Can precession power the geomagnetic dynamo? *Geo-*

phys J. R astr., Soc, 43, 661 678

[25] Loper, D E, 1978 Somethermal consequences of a gravitationally powered dynamo, *J Geophys Res*, **83**, 5961—5970

[26] Busse, F H, 1977 An example of nonlinear dynamo action, *J. Geophys*, **43**, 441—452.

[27] Lilley, F E M, 1970. On kinematic dynamos, *Proc Roy Soc., London, A*, **316**, 153—167.

[28] Parker, E. N, 1969 The occasional reversal of the geomagnetic field, *Astrophys J*, **158**, 815—827

[29] Levy, E H, 1972. Kinematic reversal schemes for the geomagnetic dipole, *Astrophys J*, **171**, 635—642

[30] Levy, E H, 1972. On the state of the geomagnetic field and its reversals, *Astrophys J.*, **175** 573—581.

[31] Akasofu, S., and S. Chapman, 1972. *Solar-Terrestrial Physics,* Oxford at the Claredon Press.

第七章　地电场和地球电磁感应

一、地 球 电 场

观测到的地球表面的电场可分为大地电场和局部电场。前者是大范围的区域性电场，后者则是由于局部物理化学条件不同形成的局部性电场，例如地形的差异，物质成份的不同、局部电化学作用等均可形成局部电场。局部电场的测定在地球物理勘探工作中有直接的应用，而普通地球物理则主要研究区域性的大地自然电场。

大地电流是在1840年由于电报信息被干扰而首先引起了人们的注意。由于无法把电表和大地串联，所以要直接测定地电流是困难的。但如果将电极埋人地下，则可以测定两个电极间的电位差。大地电位差的测量装置比较简单，选用物理化学性质稳定的导电物质，例如铅板、镀金铜板做电极，埋入地下 2～3 米，并用绝缘导线通过高阻抗与检流计相连，即可记录两极间的电位差及其变化。电极间的距离越远越好，一般为几百米至一公里，呈南北和东西两个方向排列，以同时记录两个互相正交方向的大地电位差。单位通常用毫伏/公里。中低纬度大地电场的量级约为 10 毫伏/公里。

地电场既有长周期的变化，也有短周期变化。但由于电极易受接触电位差、热电位差、渗透电位差等缓慢变化因素的影响，较为准确地记录区域性大地电场的长周期变化是很困难的。至今，这种长周期地电场变化的全球规律还很不清楚，甚至有人怀疑它是否确有地球物理学的意义。周期为一天以下的地电场短周期变化和地磁变化密切相关。和地磁场一样，地电场也与太阳活动有关，它也包括诸如太阳日变化、地电暴、地电脉动等多种类型的变化。地电的这种短周期变化绝大部分是外源地磁变化感应的结果。特别是，由于记录地磁快速变化的仪器在技术上难度较大，人们常用观测地电变化作为记录地球电磁脉动变化的技术手段。因此，在地电学中，电磁脉动的研究占据相当重要的地位。

地电学的另一个重要内容，是所谓“大地电磁测深”方法。下面我们将会看到，由于电磁感应效应，地面电场的水平分量和与其正交方向的磁场的观测相配合，可测定地球内部的电导率，称为大地电磁测深，是 1953 年首先由法国人卡尼亚尔 (I. Cagniard)[1] 提出的。这部分内容将在本章第 2 节讨论。

（一）地电场的各向异性

已经发现，有些测点地电场存在着明显的各向异性。图 7.1 为日本柿岗地磁台记录到的急始变化电场E和磁场H在水平面内的矢量图。从图上看出，地电场存在着明显的各向异性，不管磁场在什么方向，地电场的方向几乎不变。观测表明，在柿岗，地电短周期变化主要分布在 N70°E 或它的反方向，而日变化则分布在 N 60°E 方向。这种变化称作地电场的线性极化(偏振)。在我国南北地震带的甘肃境内也观测到地电场的这种线性极

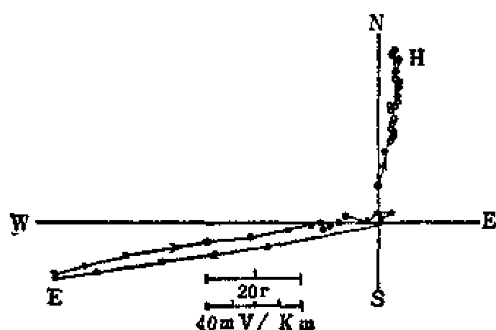


图7.1 1958年3月14日急始（s. s. c）变化期间，柿岗台电场E和磁场H变化的平面矢量图(时间间隔为30秒)[1]

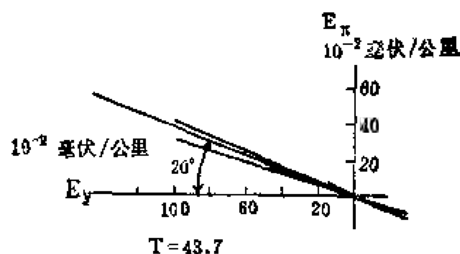


图7.2 天水附近10—100秒周期范围地电场的线性极化[3]

化现象(图7.2)。

一般认为，地电场的各向异性是由于测点周围或深部电性阻抗的不均匀性造成的。例如上述线偏振方向常常和山脉走向、河流走向、海岸线相垂直，也可能与地壳或上地幔二维线性构造的走向相垂直。图7.2所示电场的线性极化，就是南北地震带地壳、上地幔高导层呈二维分布的结果[3]。对于这种不均匀的电性结构常引入二维张量阻抗：

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix}。$$

其中 Z_{ij} 称为张量阻抗元。

（二）电磁脉动

电磁脉动具有很宽的周期和强度谱，周期长的可达1500秒，短的可到0.1秒以下，乃至10^{-4}秒。振幅一般为几十分之一伽偶至数十伽偶，但有的可低到千分之一伽偶，或高达数百伽偶。比较强的脉动多伴随磁暴发生。这里所指电磁脉动限于从0.2秒至600秒的周期范围。更长周期的变化已属第5章第2节所述磁暴时变化、S_q 或湾形磁扰；而更高频率，例如10千赫，则由电离层哨声、磁层内甚低频电磁波的发射所产生。图7.3为各类脉动强度和频率谱的统计结果。图中纵坐标表示平均振幅，横坐标为周期，图中清楚地显示出电磁脉动很宽的周期和强度谱的特征。

按照形态的不同，电磁脉动分为两大类型，一类称为规则脉动，用P_c表示，另一类称为不规则脉动，用P_i 表示。图7.4、7.5分别为P_c与P_i 脉动的实际观测结果。由图7.4、7.5可以看出，P_c 形态比较规则，呈准正弦型变化，周期比较稳定，而P_i 型脉动不仅型态不规则，变化的周期也不稳定。

根据周期的不同，P_c 和 P_i 脉动又各分为：

P_c类型	周期(秒)
P_c1	0.2—5
P_c2	5—10
P_c3	10—45

$P_c4(P_g)$	45—150
$P_c5(P_g)$	150—600
P_i 类型	周期(秒)
P_i1	10—40
P_i2	40—150

图7.3标出了各类脉动的周期界限。下面将会看到，上述脉动类型的划分正是不同类型源场的表现。

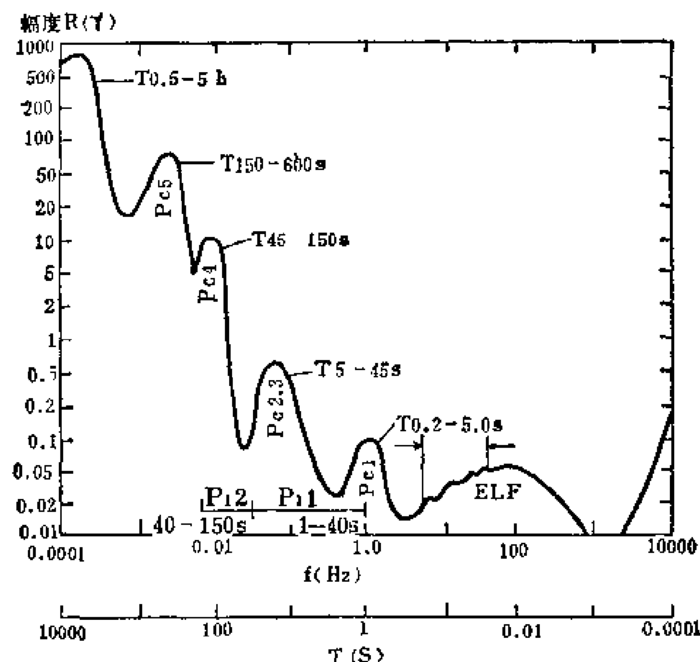


图7.3 电磁脉动的强度和频率谱[4]

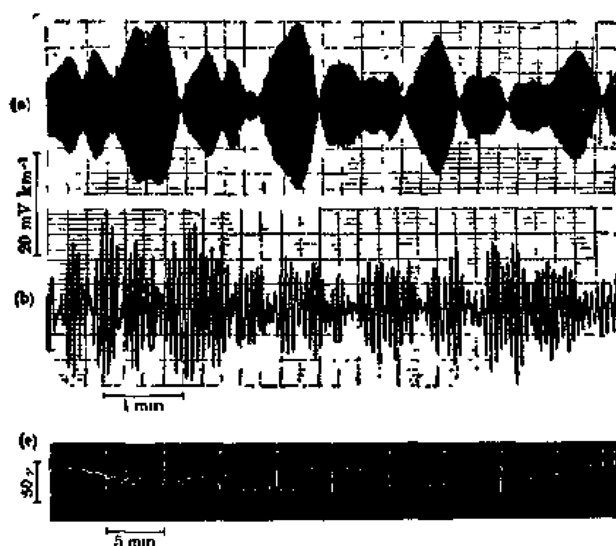


图7.4 美国阿拉斯加，卡尔奇(磁纬 φ64·6°N, Λ256.5) (College, Alaska) 记录的 P_C 脉动。(a)、(b) 珍珠型脉动；(c) 巨型脉动[4]

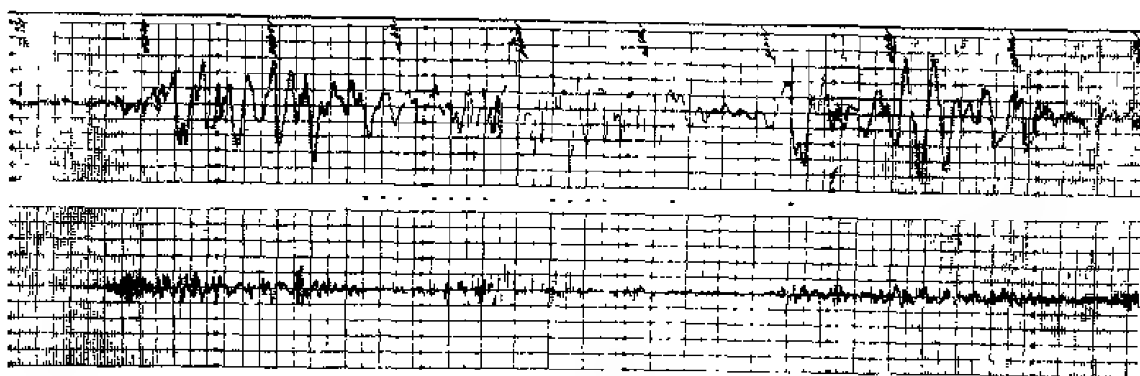


图7.5 卡乃奇台记录的P_i脉动。上图记录仪的频带为3.0—0.9赫兹，下图为0.5—0.07赫兹[3]

1. P_c 型脉动

P_c 型脉动的脚标 C 是英文"Continuous"的字头，意思是周期和振幅具有持续的稳定性。从图 7.3 看出，随着周期的减小，P_c 脉动的幅度明显地变弱，一般周期减少 5 倍，幅度下降 10 倍。当然这是统计的结果，单个脉动则不一定具有这样的规律性。图 7.3 还清楚地显示出，在上述随周期减小幅度减弱的总体背景上，每一种脉动都有一相应的幅度峰值，这说明各类脉动按周期的划分，有着更本质的意义[4,6]。

① P_C1 型

图 7.4a, b 即为典型的 P_C1 型脉动。这类脉动形似珍珠，它可以是单个的珍珠，也可能是成串出现。单个珍珠的持续时间约为 1—2 分钟。串珠持续时间可达 10—20 分钟。变幅一般较弱，为 0.01～0.1 伽玛。P_C1 脉动出现的时间与纬度有关，在中纬度夜间和早晨即地方时 2^h—4^h 出现频次最高，在磁纬 65° 以上则全天都可能出现。P_C1 型脉动的周期与磁层电流环（磁暴主相电流环）处质子绕磁力线的迴旋周期相近，观测还表明，在磁力线的共轭点处，P_C1 型脉动将同时出现。因此，一般认为，P_C1 型脉动是磁层环电流等离子体的扰动所产生的流磁波沿磁力线传播的结果[4]。

② P_C2 和 P_C3 型

P_C2 和 P_C3 是形态最为规则的脉动。图 7.6 为 P_C2、3 型脉动记录。P_C2、3 脉动持续时间一般为 1—3 小时，幅度约 0.5 伽玛，随着纬度增加，脉动幅度变大（图 7.7，曲线 1）。P_C2、3 型脉动多出现在白天，约在地方时中午 12 时出现的频次最高。但在赤道附近（低于7°），出现频次变得很不规则。P_C3 型脉动的周期和磁层边界磁力线的固有振动频率相近，因此它可能是磁层边界扰动所激发的流磁波沿磁力线传播的结果。因此和 P_C1 型脉动一样在磁场的共轭点处，P_C3 型脉动相似。

③ P_C4、P_C5 型

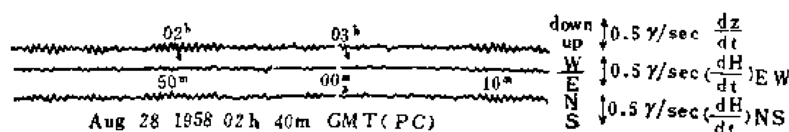


图7.6 1961年3月5日 Onagawa（φ28.4°N, Λ206.7°）P_C2、3 脉动记录[3]

P_C4、5 型脉动因其变幅较大，一般称为巨型脉动，记作 P_g. 图 7.4c 是典型的 P_C4 型脉动，通常幅度约 5～20 伽吗，有时可达 50—70 伽吗，随着纬度增高，幅度变大（图 7.7 II）。P_C5 型则变幅更大，平均约 50—70 伽吗。P_C5 只出现在 50°—70° 的纬度带，随着纬

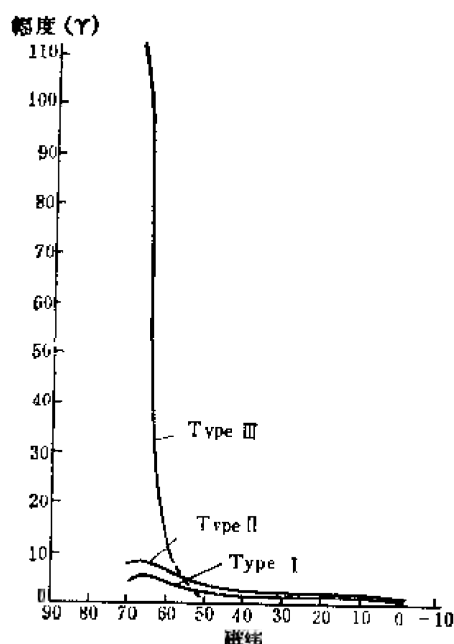


图 7.7 P_C 型脉动水平分量变化幅度随纬度的变化[5]。
I～$P_C2.3$; II～P_C4; III～P_C5。

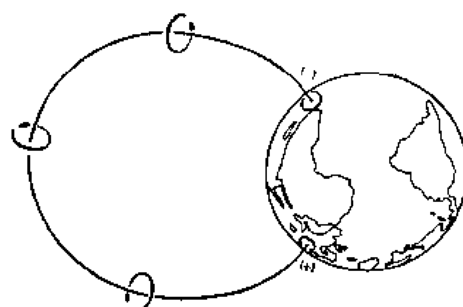


图 7.8 磁力线振荡所产生的流磁波的极化方向示意图[4]

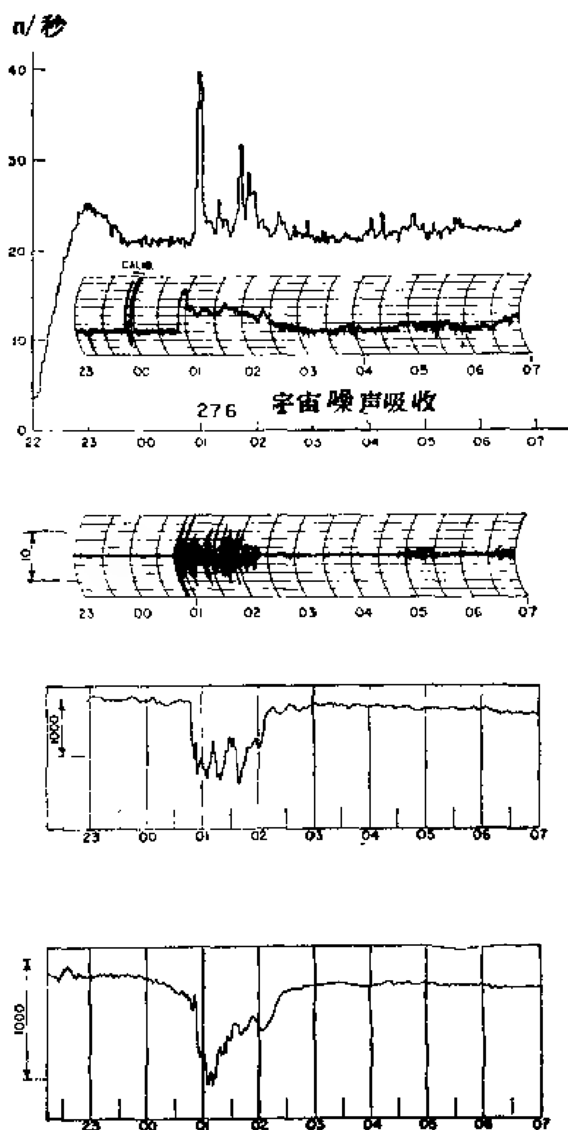
度下降，幅度衰减很快（图 7.7，III）。脉动的最大振幅一般发生在地方时 3 时至 8 时，在南北半球扰动相似，但扰动矢量的极化方向相反。图 7.8 给出了由磁力线振动所产生的 P_g 极化矢量的示意图。

2. 不规则脉动 P_i

图 7.9 为 P_i1 型脉动的记录。从图上看出它与宇宙线辐射的吸收、X 射线亚暴、地磁湾扰密切相关。从图上还明显看到，这里起码含有两种类型的脉动。一类是简单的脉冲式的，常记作 S. I. P.，周期小于 15 秒，持续时间约 15 分钟，振幅较小，约为 0.2 伽吗。另一类是相继出现的，周期为 5—10 秒的持续性扰动，记作 A. I. P.，它与 X 射线亚暴相联系。与正湾扰相联系的一类 P_i1 型脉动常记作 I. P. D. P.。

图 7.10 为 P_i2 型脉动的记录。P_i2 脉动周期多为 60—100 秒，振幅呈阻尼型，常成串出现，因此又记作 P_{t}。P_t 最大振幅出现在极光带。图 7.11 同时给出了 P_t 及与其相联系的湾扰幅度随磁纬的分布。从图上看出，与负湾扰相联系的 P_i2 型脉动的幅度的纬度差异比较明显。P_i2 型脉动全天都可能出现，但以地方时 22 时附近出现的频次最高。

图 (7.9)—(7.11) 都表明，无论是 P_i1 还是 P_i2 都与湾型磁扰相关，而且在极光带变幅最大，因此不规则脉动实质上是极区亚暴的组成部分[4,8]。



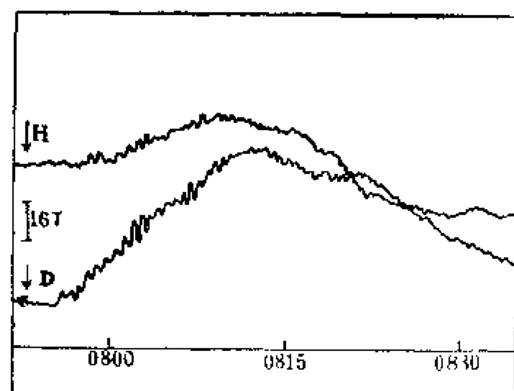


图 7.10 叠加在正湾扰记录上的 P_t2 型脉动[7]

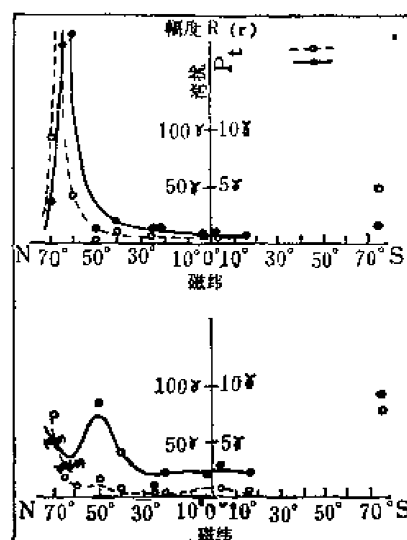


图 7.9 X射线暴发、宇宙噪声吸收(27.6 赫兹的辐射计的记录)、P_t1 型脉动(周期 5—30 秒)和湾扰(上: College 台,下: Sitka 台)的同时记录[7]

图 7.11 P_t2 (P_t) 型脉动、湾扰的纬度分布 上图为正湾扰,下图为负湾扰[7]

二、地球电磁感应基础

第五章曾经指出,地球的变化磁场来源于外空电流体系,内源场部分是外源场感应的结果。内源场的变化不仅与外源场的强度和分布有关,而且还取决于地球内部的电导率的分布。由已知外源场研究内源场与地下电导率分布的关系的物理理论就是地球内部的电磁感应理论。有的变化磁场是全球范围大尺度的变化(例如 D_{st}、S_q 等),这类变化场的电磁感应,必须把整个地球作为研究对象,称为球体问题(电磁感应);还有许多地磁场的异常变化只局限于局部地区,这时往往可以把局部地区视为无穷平面,这类局部异常的电磁感应称为平面问题。不论是全球性的还是局部性的地球电磁场的变化都还有周期与非周期变化之分,与此相应的电磁感应的理论方法也不相同。除了源场的时间特性外,它的

空间尺度对感应场的影响也是电磁感应理论必须特殊考虑的重要问题，一般称为源场效应。球体电磁感应、平面电磁感应、周期与非周期电磁感应以及源场效应等四个问题构成了电磁感应理论方法的基础，其它更复杂的问题的处理方法多由此派生而来。

正因为电磁感应是探索地球内部的重要方法，近年来，特别是六十年代上地幔计划以来，得以迅速发展，取得了丰硕的研究成果，是地球电磁学中较为活跃的一个研究领域。

（一）局部地磁短周期变化异常

地球内部电磁构造研究的早期阶段主要是应用全球范围的变化磁场，研究均匀或分层均匀地球的深部电导率。例如由 S_q、D_{st} 场获得了深 300—500 公里处，电导率约为 10^{-12} 电磁单位，远高于地球浅层 10^{-13}—10^{-14} 电磁单位的初步结果。

六十年代上地幔计划期间，在全球不少地区先后观测到各种类型的短周期异常变化，促进了地壳、上地幔电性结构局部不均匀性的研究，并取得了许多有价值的结果[9,10]。这里罗列部分典型事件，以便对反映构造特征的局部地磁变化能有些直观的了解。

1. 海洋、海岛、海岸效应

海水电导率约 3×10^{-11} 电磁单位（e. m. u.），而潮湿大地和沉积岩的电导率是 10^{-12}—10^{-13} 电磁单位，干燥花岗岩则小到 10^{-15} 电磁单位。因此，与海水相联系的特殊区域：海洋、海岛、海岸将出现与一般陆地不同的电磁效应。观测发现，这三者又各具特点，分别称为海洋效应、海岛效应和海岸效应。

海洋效应由于受观测精度的限制，观测是困难的。直至 1960 年苏联北极六号工作站报道了在浮冰上的测量结果，才算获得了海洋效应的直接观测(图 7.12)。由图 7.12 看出，

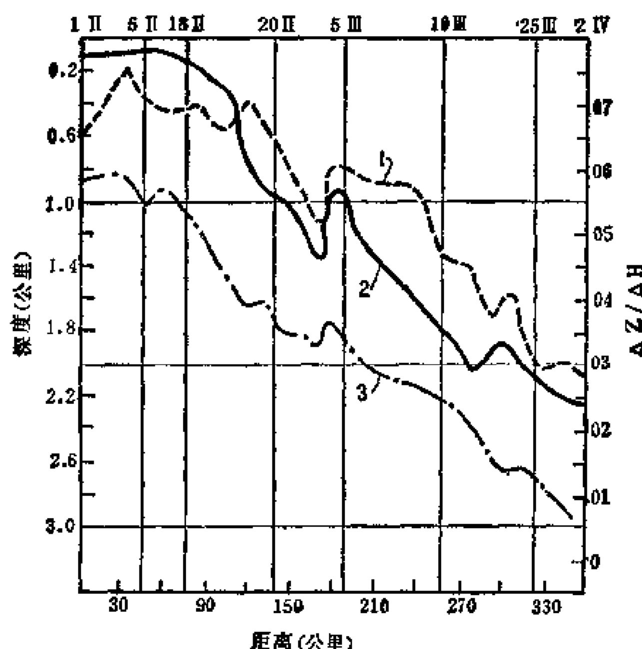


图 7.12　海洋效应的观测结果，$\Delta Z/\Delta H$ 随深度和频率的变化[1]
1. 海洋深度；2. 1 小时变化幅度的全天平均；3. 小于 10 分钟的平均。

$\Delta Z/\Delta H$ 随海水深度和频率增加而显著下降。这是容易理解的，因为对于理想导体，磁力线只能沿导体表面，$\Delta Z = 0$。

海岛上的观测结果表明，对于很小的岛屿，相距不远的各地可能出现反向的 ΔZ 变化。例如，夏威夷的阿胡岛上相距 20 公里的两个测点，对于周期为 24 小时的 ΔZ 变化，位相差 30°，对于周期小于等于 1 小时的变化，则完全反向，而水平分量变化不大。海岛效应可以定性解释为：海岛阻碍了在海水中流动的较强的感应电流，在海岛附近电流密集，在海岛不同侧的观测点上，在有利的条件下可以观测到上述反向变化。

海岸效应的观测比较普遍，其特点是 ΔZ 幅度明显地依赖于离开大陆棚前缘的距离。

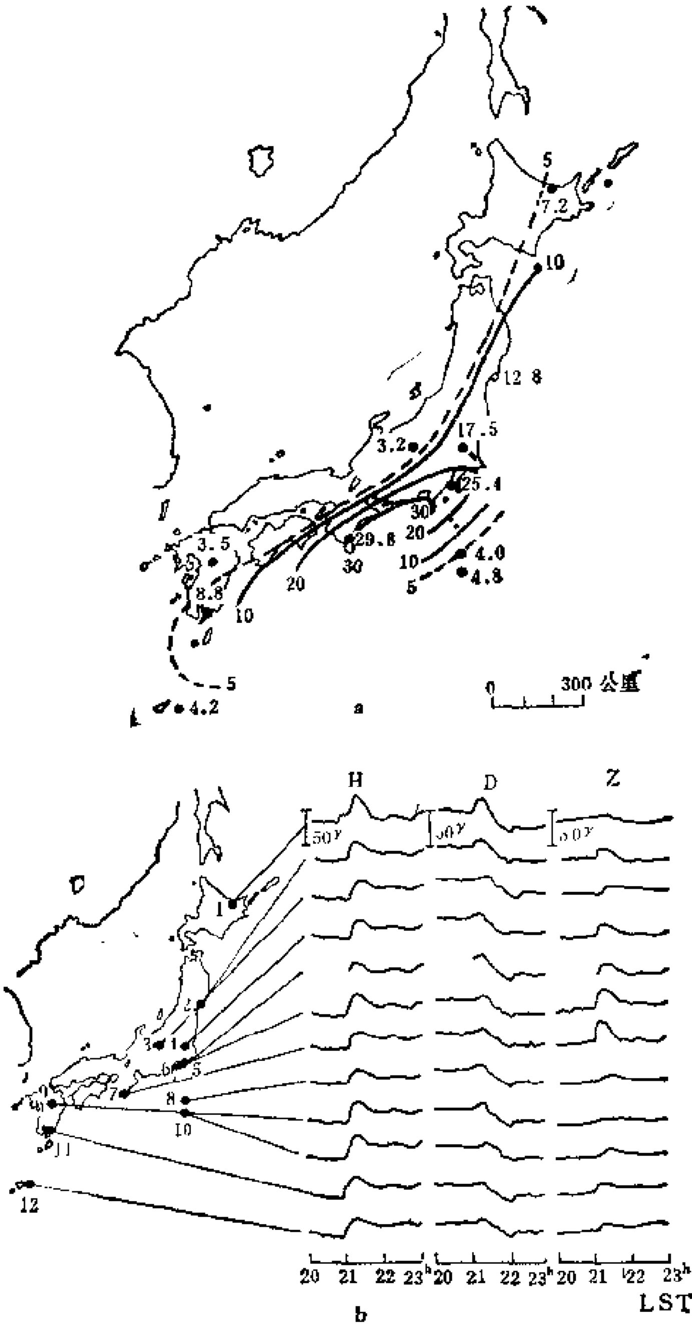


图 7.13

a 日本地区 1958 年 4 月 8 日湾扰变化的分布； b 湾扰变化[7]

靠近海岸处 ΔZ 迅速增加[11]。其效应大小显著地依赖于磁场变化的周期。但海岸效应和受陆地构造影响所产生的磁效应混杂一起，一般情况下难以区分。海岸效应是海岸附近海水中的感应电流沿海岸密集流动的结果。

2. 一些特殊地区的地磁异常变化

图 7.13 为日本地区湾形磁扰的分布。可以看出，ΔH、ΔD 各地差异不大，而 ΔZ 则有明显的不同。其分布规律如图 7.13 所示，ΔZ 大的变化集中于日本中部的太平洋岸，称为日本中部异常，急始和其它短周期的类湾扰变化也有类似的现象。力武常次等人详细分析了异常的原因，认为主要的并不是海洋电流引起的海岸效应，而是反映了上地幔复杂的电导率分布[2]。

其它各地也先后观测到了与日本相似的异常变化和相应的上地幔电性结构异常。例如德国北部异常[10]、美洲西北部异常[12]、苏联贝加尔裂谷带[13]等。这方面的结果力武常次在《地球电磁学》一书中作了详细的报道[2]。我国渤海地区也存在着明显的短周期异常变化[14]。

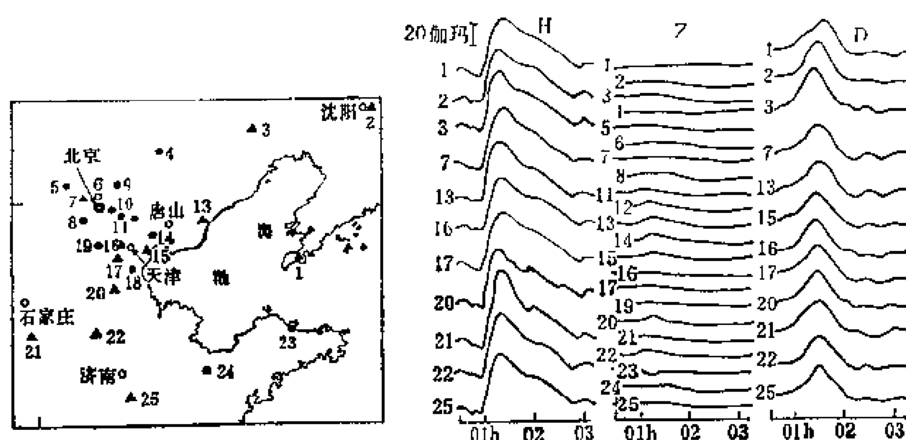


图 7.14　中国渤海地区湾形磁扰变化[14]

(二) 区分内外源场的面积分方法

将变化场的内外源场区分开，是研究地球电磁感应的基础工作。第五章第二节所讲的球谐分析方法对于全球性的地磁变化的内外源场的区分是很有效的方法。但即使是全球变化，当某些地区具有一些局部特征时，应用球谐分析就需要考虑较高的阶次，在实际计算中也是相当困难的。对于纯属于局部地区的异常变化，原则上球谐分析则完全失去意义。为此魏斯汀首先提出了面积分方法，分为球面和平面面积分两种，后者用于局部异常变化的分析。

如图 7.15 所示 S 曲面把空间分成内外两部分，Q 为曲面上的一点，QP 和 QP' 与 Q 点的曲面法线平行，P' 与 P 分居曲面内、外。设空间场势为 W，由内 (W_i)、外(W_e)两部分组成。应用格林公式:

$$\iiint (\Psi\nabla^2 W - W\nabla^2\Psi)d\tau = \oiint\left(\Psi\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{7.1}$$

取函数 $\Psi = 1/r$，r 为观测点 P 到场源的距离，则有：

$$\nabla^2\Psi = -4\pi\delta(P)。\tag{7.2}$$

$\delta(P)$为狄拉克 δ 函数。由 δ 函数的性质：

$$\iiint f(x, y, z)\delta(P)d\tau = f(P)。$$

从(7.1)式可以得到

$$W(P) = -\iiint\frac{\nabla^2 W}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S}。\tag{7.3}$$

上述体积分遍及 S 外的空间 V_e，S 仍取外法向为正。(7.3)式的意义在于，S 面外的一点 P 的场势 $W(P)$，一部分由外部场源 $\frac{1}{4\pi}\nabla^2 W$ 产生，内部场源对 $W(P)$ 的贡献则等价于一个分布于 S 面上的强度为 $-\frac{1}{4\pi}\partial W/\partial\boldsymbol{n}$的单磁荷，和强度为$-\frac{1}{4\pi}W\boldsymbol{n}$的偶磁层所产生的场。因此：

$$W_i(P) = -\frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S}。\tag{7.4}$$

同样可以得出：

$$W_e(P') = \frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S}。\tag{7.5}$$

当 P 和 P' 沿 PP' 分别无限趋向于 Q 时，

$$\begin{aligned} &W_i(P)\to W_i(Q_+) = W_i(Q), \\ &W_e(P')\to W_e(Q_-) = W_e(Q)。\end{aligned} \tag{7.6}$$

为研究这种情况下积分(7.4)或(7.5)的性质，在 S 面上取一个以 Q 为心的小圆 S'（半径为 r_0），则(7.4)可改写为

$$\begin{aligned} W_i(P) = &-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S-S'}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S} \\ &-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S}。\end{aligned} \tag{7.7}$$

考查当 $r_0\to 0$ 时(7.7)式的极限情况：由场的连续性，当 $r_0\to 0$ 时，在 S' 内 W 和 $\partial W/\partial\boldsymbol{n}$ 可视为均匀的，显然(7.7)式中沿 S' 积分中的第一项应为 0，第二项

$$\iint\limits_{S'_{r_0\to 0}} W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = W\iint\limits_{S'} d\Omega = 2\pi W(Q)。\tag{7.8}$$

$d\Omega$ 为面积元 $d\boldsymbol{S}$ 对无限靠近 Q 的 P 点所张的立体角。最后可以得出

$$\begin{aligned} W_i(Q_+) = &-\frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{S} \\ &+\frac{W(Q)}{2}。\end{aligned} \tag{7.9}$$

同样

$$W_e(Q_-) = \frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{W(Q)}{2}。 \tag{7.10}$$

由(5.9)、(5.10)式得出

$$W_e(Q) - W_i(Q) = \frac{1}{2\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\boldsymbol{S}。 \tag{7.11}$$

(7.11) 式意味着，当已知封闭曲面上的场势W及其法向微商时，则应用 (7.11) 和 $W = W_e + W_i$，就可将内外场区分开。若 W 改变一常数 W_0 (这是允许的)，$W' = W - W_0$。将 W' 分别代入(7.9)和(7.10)式，按照 (7.8) 式，由于 Q_+ 在 S 面外，则它对 S 面所张立体角为零。因此W改变一常数 $(-W_0)$ 后，(5.9)式积分部分不变。但 Q_- 在 S 面内，对 S 面所张立体角为 -4π，这样(7.10)式积分项将减小一个常数 W_0，即：

$$W_i'(Q_+) = -\frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\boldsymbol{S} + \frac{W'(Q)}{2}。 \tag{7.12}$$

$$W_i'(Q_-) = \frac{1}{4\pi}\oiint\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{n}} - W\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\boldsymbol{S} - W_0 + \frac{W'(Q)}{2}。 \tag{7.13}$$

由(7.12)、(7.13)不难看出，

$$W' - W_i' = W_e - W_i - W_0, \tag{7.14}$$

再由

$$W' = W' + W_i' = W_e + W_i - W_0 \tag{7.15}$$

可以得出

$$\begin{cases} W_i = W_i。\\ W' = W_e - W_0, \end{cases} \tag{7.16}$$

(7.16) 意味着，当场势改变一常数后，内源场保持不变，而外源场将有同样的改变量。即按公式(7.11)求场势W的内外源场时，外原场 W_e 有一个不确定的常数。

对于球面，(7.11)成为

$$(W_e - W_i)_Q = \oiint[(W + 2aZ)/4\pi a r] \cdot d\boldsymbol{S}。 \tag{7.17}$$

a 为球体半径，因此已知地球表面的场势W和垂直分量，即可将内外源场区分开来。

从(7.17)式看出，因积分函数随 $1/r$ 迅速下降，在计算 $(W_e - W_i)_Q$ 时，贡献最大的是观测点 Q附近的场。因此，当一个局部地区有较密的台站或测点时，(7.17)式有可能给出这种密集观测所反映的局部特点，而球谐分析方法则把这种局部特点光滑掉了。这就是面积分方法较球谐分析优越之处。它的缺点是不如球谐分析简便，场的空间分布特征不象球谐分析那样可用物理意义明确的解析形式表达出来。

原则上讲，(7.17) 也适用于局部异常的分析，但局部范围能近似为平面时，应用平面

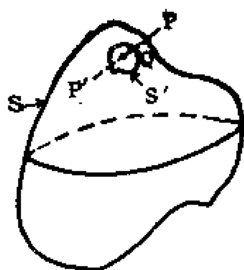


图 7.15

面积分方法更为方便。由(7.17)式,令 $a \to \infty$,立即可以得出平面面积分公式

$$(W_e - W_i)_Q = \iint \frac{Z}{2\pi r} dS。\tag{7.18}$$

积分遍及场所定义的平面。

有关球面、平面面积分的应用和其它公式可参考[15]和[16]。

(三) 电磁感应的理论基础

电磁感应的基本方程已在第五章第 1 节中给出,对于自由空间,磁势W满足拉普拉斯方程(5.25),在导体中,电磁场满足扩散方程(5.19)和 (5.20), 在介质分界面上,满足边值关系(5.8)。

在地球内部,一般情况下,μ 值与 1 相差无几,在以下计算中都假定 $\mu = 1$, ε 均匀。

1. 球体问题的电磁感应

采用地心球极坐标系 (r, θ, λ), 则在自由空间,方程(5.25)的解与(5.86)相同, 现简化表示为:

$$W_n = a\{e_n(t)\rho^n + i_n(t)\rho^{-n-1}\}Y_n(\theta, \lambda)。\tag{7.19}$$

其中 a 为地球半径, $\rho = r/a$, Y_n 为球面函数

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{matrix}。\tag{7.20}$$

$e_n(t)$、$i_n(t)$ 分别为外源、内源场的球谐系数。

根据第五章的讨论,电磁场可以表示为环型场和极型场。环型磁场只存在于导体内,在自由空间为零。因此与 (5.19) 相联系的环型磁场的解与感应磁场无关,即在电磁感应问题中只须考虑满足(5.19)的极型磁场。在第五章第 1 节中已经证明, 极型磁场与环型电场相对应,因此方程(5.20)则只须考虑环型电场。满足(5.20)的环型电场的解可写成:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r} \times \nabla\phi = -\nabla \times (\boldsymbol{r}\phi)。\tag{7.21}$$

ϕ 满足方程

$$\nabla^2\phi = 4\pi\mu\sigma \frac{\partial\phi}{\partial t}。\tag{7.22}$$

设其特解为

$$\phi_n = aR_n(t, \rho)Y_n。\tag{7.23}$$

则 $R_n(t, \rho)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial R_n}{\partial\rho}\right)=\left\{n(n+1)+4\pi\mu\sigma a^2\rho^2\frac{\partial}{\partial t}\right\}R_n。\tag{7.24}$$

将(7.23)代入(7.21),在导体内有:

$$\boldsymbol{E}=aR_n(t,\rho)\,\boldsymbol{r}\times\nabla Y_n(\theta,\lambda)。\tag{7.25}$$

在球外,由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla(\partial W/\partial t)$ 和(7.19)可得:

$$\boldsymbol{E}=-a\left\{\frac{\rho^n}{n+1}\cdot\frac{de_n(t)}{dt}-\frac{\rho^{-n-1}}{n}\cdot\frac{di_n(t)}{dt}\right\}\boldsymbol{r}\times\nabla Y_n(\theta,\lambda)。\tag{7.26}$$

在地球表面 $\rho=1$, $\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续,则由(7.25)、(7.26)得到:

$$R_n(t,l)=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{de_n(t)}{dt}+\frac{1}{n}\cdot\frac{di_n(t)}{dt}。\tag{7.27}$$

由 $\rho=1$ 处, $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续,得到:

$$R_n(t,l)+\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}R_n(t,\rho)\right\}_{\rho=1}=-\mu\left\{\frac{de_n(t)}{dt}+\frac{di_n(t)}{dt}\right\}。\tag{7.28}$$

条件(7.27)已经可以保证 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续。

因外源场 $e_n(t)$ 已知,则由方程(7.24)、(7.27)、(7.28)以及自然边条件 $\rho=0$ 处, $R_n(t,\rho)$ 有限,可唯一确定 $R_n(t,\rho)$ 和 $i_n(t)$,这样导体内外的电磁场即完全确定。

在导体内感应电流为:

$$\boldsymbol{j}=a\sigma R_n(t,\rho)\,\boldsymbol{r}\times\nabla Y_n(\theta,\lambda)。\tag{7.29}$$

从(7.29)可以看出,感应电流 $\boldsymbol{j}$ 总是与径向垂直。很显然,只要电导率 σ 的分布是均匀的或者只是 ρ 的函数,则条件(5.16)总能满足,可由(5.14)电场的扩散方程出发,求解电场和磁场。

现在进一步讨论定解问题。设方程(7.24)有解析解,以算符 p 代替 $\partial/\partial t$,设相应 $R_n(t,\rho)$、$e_n(t)$、$i_n(t)$ 的变换函数为:

$$\left.\begin{aligned}&R_n(t,\rho)\doteqdot C_n(p)F_n(p,\rho),\\&e_n(t)\doteqdot E_n(p),\\&i_n(t)\doteqdot I_n(p)。\end{aligned}\right\}\tag{7.30}$$

为了简便,下面省去脚标 n。由边条件(7.27)、(7.28)可以得到

$$\left.\begin{aligned}&I(p)=\frac{n}{n+1}\left\{1-\frac{(2n+1)\mu F(p,l)}{(n\mu+1)F(p,l)+F'}\right\}E(p),\\&C(p)=-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n+1)\mu}{(n\mu+1)F(p,l)+F'}E(p)\cdot p。\end{aligned}\right\}\tag{7.31}$$

其中 $F'=\{\partial F(p,\rho)/\partial\rho\}_{\rho=1}$。

(7.31)中 $E(p)$ 为已知,$F(p,\rho)$ 由方程(7.24)求出,则 $I(p)$ 和 $C(p)$ 唯一确定。再按(7.30)经反变换,即可解出 $R_n(t,\rho)$ 和 $i_n(t)$。原则上讲,只要方程(7.24)具有解析解,外场 $e(t)$ 为时间 t 的任意已知函数(周期或非周期)的情况,方程(7.14)、(7.15)的定解问题已经解决。下面以均匀电导率分布和周期外源场($\sim e^{i\omega t}$)为例,看一看(7.31)的具体形式和意义。非周期场的解法将在后面另外讨论。

对于周期场 $\sim e^{i\omega t}$ 和 σ 均匀分布,则 $p=i\omega$,方程(7.24)为虚宗量的球贝塞尔方程,其解为:

$$R_n(t,\rho)=C_n(t)\rho^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho)+D_n(t)\rho^{-\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho) \tag{7.32}$$

其中：

$$k^2=-4\pi\mu\sigma i\omega;\ i=\sqrt{-1} \tag{7.33}$$

$J_{n+\frac{1}{2}}$、$K_{n+\frac{1}{2}}$ 为 $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 阶第一类和第二类虚宗量贝塞尔函数。在球内，考虑到 $\rho\to 0$。R_n 有限，则在(7.32)中 $D(t)\equiv 0$。即：

$$R_n(t,\rho)=C_n(t)\rho^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho) \tag{7.34}$$

对于球层(即分层地球)内的解应取(7.32)。将 $p=i\omega$ 和(7.34)代入(7.31)，经整理得出，

$$\left.\begin{aligned}\frac{i_n}{e_n}&=\frac{n}{n+1}\left[1-\mu\left\{\frac{ka}{2n+1}\cdot\frac{J_{n-\frac{1}{2}}(ka)}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}+\frac{n(\mu-1)}{2n+1}\right\}^{-1}\right],\\ \frac{C_n}{e_n}&=\frac{\mu(2n+1)}{n+1}\left[kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)+n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka)\right]^{-1}。\end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

(7.35)一般为复数形式，它决定了内外场以及导体内的感应场和外场的幅度比和位相差。因 k 是介质电磁参数 μ、σ 的函数(7.33式)，由(7.35)可以看出，内外场的比 i_n/e_n，或导体内的感应场和外场的比 C_n/e_n 除与 n 有关外，只是 μ、σ 的函数(近似与 $\sqrt{\sigma/\mu}$ 有关)。因此，由地球表面的磁场观测，将内外场区分开即可求出球内的电导率和磁导率的比值，这正是电磁感应理论的实用意义所在。对于实际计算，一般情况下，μ 与 1 相差甚微，若取 $\mu=1$，则(7.35)仅与 σ 有关，并取如下简单形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{i_n}{e_n}&=\frac{n}{n+1}\left[1-\frac{(2n+1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)}\right],\\ \frac{C_n}{e_n}&=\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)}。\end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

以上虽然讨论的是均匀地球的简单情况，但对于分层地球同样适用，只是边条件增多，定解计算更复杂一些。例如对于两层地球模型的情况，在外层 R_n 的解应取 (7.32)，内层仍取为 (7.34)，将多两项待定系数 D' 和 C'，但相应增加内外层界面上磁场和电场(切向)连续的条件，各层内的解仍可唯一确定。

恰普曼 (1919) 应用 S_q 的球谐分析和上述理论方法，研究了均匀地球的电导率值，并在计算中考虑了地球有厚度为 d 的不导电的外壳[17]。计算得出，与观测的内外场幅度比和位相差符合得较好的结果为：$d\approx 250$ 公里，$\sigma/\mu\approx 3.6\times 10^{-13}$ 电磁单位 (e. m. u)。取 $\mu=1$，则 $\sigma\approx 3.6\times 10^{-13}$ e. m. u.。以后基于不同资料的分析，似乎 $d\approx 400$ 公里，$\sigma\approx 5\times 10^{-12}$ e. m. u. 的结果与观测符合得更好些(见表 7.2)。

2. 平面地球的电磁感应

若场所定义的局部区域可近似视为平面，则这类变化场的电磁感应可用平面地球电磁感应方法处理[18]。

如图 7.16 所示直角坐标系中，导体占据 $z>0$ 的半无限空间，设导体 σ 的分布只与深度 z 有关，ε、μ 为均匀分布。

在直角坐标系中，方程(5.20)写为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{E}=4\pi\mu\sigma(z)\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}。 \tag{7.37}$$

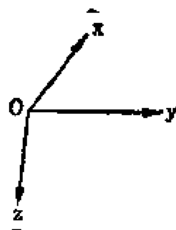


图 7.16

由于与球体问题同样的理由，对感应问题有意义的解应为"环型"电场，则方程(7.37)的解 $\boldsymbol{E}$ 应与 z 轴(单位向量 $\boldsymbol{k}$) 垂直，

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}\times\nabla\phi(x,y,z,t) \tag{7.38}$$

设 $\phi=Z(z,t)\phi'(x,y,)$ 则：

$$\boldsymbol{E}=Z(z,t)\,\boldsymbol{k}\times\nabla\phi'(x,y) \tag{7.39}$$

令 $\boldsymbol{k}\times\nabla\phi'=\boldsymbol{F}(x,y)$，则 $\boldsymbol{E}$ 的解可记作：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=Z(z,t)\,\boldsymbol{F}(x,y),\\&E_z=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

这时 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 简化为：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0。 \tag{7.41}$$

要满足方程(7.41)，则 $\boldsymbol{E}$ 的解(7.40)中的 $F(x,y)$ 可表示为：

$$\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\ -\frac{\partial P(x,y)}{\partial x},\ 0\right)。 \tag{7.42}$$

将(7.40)、(7.42)代入方程(7.37)，经分离变量可以得到：

$$\frac{\partial^2P(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P(x,y)}{\partial y^2}+\nu^2P(x,y)=0。 \tag{7.43}$$

$$\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}=\left\{\nu^2+4\pi\mu\sigma(z)\frac{\partial}{\partial t}\right\}Z。 \tag{7.44}$$

ν^2 是分离变量常数。因此，在导体内部 $(z>0)$：

$$\boldsymbol{E}=Z(z,t)\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right)。 \tag{7.45}$$

其中 $P(x,y)$、$Z(z,t)$ 分别满足方程(7.43)和(7.44)。由方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\partial\boldsymbol{H}/\partial t$，和(7.45)，可以得出：

$$\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial P}{\partial y},\ \nu^2ZP\right),\quad z>0。 \tag{7.46}$$

在导体外面 $(-h<z<0)$，$\sigma=0$，方程(7.44)的解为：

$$Z(z,t)=a(t)e^{-\nu z}+b(t)e^{\nu z},\quad -h<z<0。 \tag{7.47}$$

将(7.47)代入(7.46)，得到在导体外

$$\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\nu\nabla\{[-a(t)e^{-\nu z}+b(t)e^{\nu z}]P(x,y,\nu)\},\quad -h<z<0。 \tag{7.48}$$

其中，$P(x,y,\nu)$ 满足方程 (7.43)

$$P(x,y,\nu)=\begin{matrix}\cos mx\ \cos ny\\ \sin mx\ \sin ny\end{matrix}\qquad \nu^2=m^2+n^2。 \tag{7.49}$$

由(7.48)得磁场的标量势 W:

$$W = [A(t)e^{-\nu z} + B(t)e^{\nu z}] \cdot P(x, y, \nu), \ z < 0。 \tag{7.50}$$

其中 $A(t)$、$B(t)$ 满足:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = -\nu a(t)/\mu, \quad \frac{\partial B(t)}{\partial t} = \nu b(t)/\mu。 \tag{7.51}$$

考虑到外场源是位于 $z < -h < 0$ 的区域,则由(7.50)式不难相信,参数 ν 不能是纯虚数。如果场源是与 $z = 0$ 平面平行的平面薄壳电流,则 ν 应为正或负的实数。对于电离层或磁层电流体系,一般可视为薄壳平面或球面电流。但若场源是体分布时,一般 ν 应取为复数。如果 ν 的实部取为负数,则 7.50 中的 $e^{\nu z}$ 项为外源场,$e^{-\nu z}$ 项为内源场。

由 $z = 0$ 的平面处,电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续,可得:

$$\left.\begin{aligned} &Z(0_+, t) = a(t) + b(t) = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial t}[-A(t) + B(t)] \\ &P(x, y, \nu)|_{z=0^+} = P(x, y, \nu)|_{z=0^-} \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=0^+} = \nu\{-a(t) + b(t)\} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\{A(t) + B(t)\} \tag{7.53}$$

此外,方程(7.44)还要满足自然边条件:

$$Z(z) \to 0, \ 当 \ z \to \infty。 \tag{7.54}$$

若已知外源场,则由条件(7.52)~(7.54)和方程(7.43)、(7.44)可以唯一确定导体内外的电磁场。

对于均匀导体和周期外源场 $A(t) = A_0 e^{i\omega t}$,方程(7.44)有解析解:

$$Z = Z_0 e^{-\theta z + i\omega t}, \ z > 0 \tag{7.55}$$

$$\theta^2 = 4\pi\mu\sigma i\omega + \nu^2 \tag{7.56}$$

由边条件(7.52)和(7.53)得出:

$$\frac{B}{A} = \frac{\theta - \mu\nu}{\theta + \mu\nu}, \tag{7.57}$$

$$\frac{Z_0}{A} = -\frac{2i\omega\mu}{\theta + \mu\nu}。 \tag{7.58}$$

和球体问题相似,平面电磁感应的内源场系数与外源场系数之比(7.57)以及导体内部感应场系数与外源场系数之比(7.58)除与 ν 有关外,决定于导体的电磁性质 μ、σ。当 $\mu = 1$ 时,由内外场之比,利用(7.57)可求解导体的电导率。

由(7.45)和(7.46)不难看出,对平面问题,电场与磁场相互垂直:

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0。 \tag{7.59}$$

在导体表面($z = 0$),电场、磁场的振幅和相位关系,可由它们的复振幅比得出:

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = -\frac{E_y}{i\omega H_x} = -\frac{Z(0)\mu}{\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=0}}$$

$$= \frac{\mu \dfrac{\partial}{\partial t}(A - B)}{\nu \dfrac{\partial}{\partial t}(A + B)}, \quad z = 0。 \tag{7.60}$$

对于均匀导体和周期场，由(7.58)可以得到，

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = -\frac{E_y}{i\omega H_x} = \frac{\mu}{\theta},\quad z = 0 \tag{7.61}$$

θ 是与 ν、ω 和 σ 有关的常数(7.56 式)。(7.61)式表明，由导体表面水平分量磁场和电场的观测，同样可以确定导体的电导率，这就是所谓大地电磁测深方法[1][13]。

除利用电场与磁场水平分量之间的关系(7.60)、(7.61)作为测深基础的大地电磁测深方法外，还有所谓磁测深。

由(7.50)可以得出：

$$\left(\frac{H_z}{H_x}\right)_{z=0} = \frac{\nu[-A(t)+B(t)]}{A(t)+B(t)} \Big/ \left(\frac{\partial P/\partial x}{P(x,y,\nu)}\right) \tag{7.62}$$

对于 H_y 有类似的结果。由(7.45)和(7.46)还可以得出，

$$E_y = \frac{\partial P/\partial x}{\nu^2 P}(i\mu\omega H_z)。 \tag{7.63}$$

(7.63)表明，电场水平分量与磁场铅垂分量的复振幅比与导体电导率无关。若已知场的水平分布 $P(x,y,\nu)$，由磁场的垂直分量可求出电场的水平分量 $E_y(E_x)$。因此当 $P(x,y,\nu)$ 已知时，(7.62)与(7.60)等效。对于均匀导体和周期场，若 $P(x,y,\nu)=P_0e^{i\nu x}$，则(7.62)成为：

$$\left(\frac{H_z}{H_x}\right)_{z=0} = \frac{i\nu}{\theta} \tag{7.64}$$

即由磁场的垂直分量和水平分量的复振幅比同样可以确定导体的电导率分布。由磁场分量间的关系式求解导体电导率的方法称为磁测深法[23,19]。

除导体电导率均匀情况，方程(7.44)有解析解外，可以证明，对于 $\sigma(z)=Kz^2$ 和 $\sigma(z)=Ke^{\lambda z}$ (K, λ 为任意常数)，方程(7.44)同样有贝塞尔函数形式的解析解。当电导率分层均匀时，上述解法同样适用。

3. 源场效应

电磁感应的源场效应是指源场的空间分布对于测深结果的影响。考虑这种影响的奠基工作是普赖斯 (A. T. Price) 完成的[20]，近年来高夫 (D. I. Gough) 等人对于源场和地下电性结构不均匀的混合效应的影响做了新的探索[21]。下面以平面问题为例讨论电磁感应问题中源场效应的重要性以及上述各测深方法的应用限度[20]。

上述平面电磁感应的解是相应于特定参数 ν 的特解，而通解则是 ν 的各种可能取值所对应的解的线性组合。因此，与特定 ν 值相应的特解，及由此派生而来的测深公式都应赋予一个脚标ν。在实际问题中，ν 的可能取值由具体的源场分布确定。例如，我们考虑一个位于 $z=-h$, $x=0$ 处，沿 y 方向流动的无限长线电流 $Je^{i\omega t}$ 的平面感应问题。

上述线电流的磁场及其标量势不难得到，为了求解的方便，我们把它按(7.50)外源场的函数形式展开，可以得到：

$$W_e = -2Je^{i\omega t}\int_0^\infty e^{-\nu(z+h)}\sin\nu \times \frac{d\nu}{\nu},\quad 0 > z > -h。 \tag{7.65}$$

这相应于(7.50)中，

$$P(x, y, \nu) = \sin \nu x, \quad A(t) = -2Je^{i\omega t - \nu h}\frac{d\nu}{\nu}。$$

设 $z > 0$ 的区域为均匀导体，则由(7.55)—(7.58)不难得出，

$$W_i = -2Je^{i\omega t}\int_0^\infty \frac{\theta - \mu\nu}{\theta + \mu\nu} e^{\nu(z-h)} \sin \nu \times \frac{d\nu}{\nu}, \quad 0 > z > -h. \tag{7.66}$$

感应电流

$$\left.\begin{aligned} J_{i,x} &= 0, \\ J_{i,y} &= -4\sigma\mu i\omega e^{i\omega t}\int_0^\infty \frac{1}{\theta + \nu\mu} e^{-(\theta z + \nu h)} \cos \nu \times d\nu. \end{aligned}\right\} \tag{7.67}$$

上述计算结果表明，客观存在的场，将是对参数 ν 的所有可能取值相应特解叠加的结果。ν 的取值由源场的实际分布确定(7.56 式)。在上述线电流的情况下，由特定参数 ν 所得到的电场、磁场的正交关系(7.59)，对于叠加后的电磁场仍然成立。但这种关系并不总是真实的，为了说明这一点，我们考虑一个简单的例子。设源场标量势

$$W_e = (A_1 e^{-\nu_1 z} \cos \nu_1 x + A_2 e^{-\nu_2 z} \cos \nu_2 y) e^{i\omega t}, \quad 0 > z > -h. \tag{7.68}$$

相应感应磁场的标量势：

$$W_i = (B_1 e^{\nu_1 z} \cos \nu_1 x + B_2 e^{\nu_2 z} \cos \nu_2 y) e^{i\omega t}, \quad 0 > z > -h。 \tag{7.69}$$

B_1、B_2 由(7.57)式确定。在导体表面 $z = 0$，磁场和电场的水平分量：

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \nu_1(A_1 + B_1) \sin \nu_1 x \\ H_y &= \nu_2(A_2 + B_2) \sin \nu_2 y \end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= i\omega(A_2 - B_2) \sin \nu_2 y \\ E_y &= -i\omega(A_1 - B_1) \sin \nu_1 x \end{aligned}\right\}。 \tag{7.71}$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = i\omega\{\nu_1(A_1 + B_1)(A_2 - B_2) - \nu_2(A_1 - B_1)(A_2 + B_2)\} \sin \nu_1 x \sin \nu_2 y。 \tag{7.72$_1$}$$

(7.71) 表明，除非对于 ν 的特殊取值：$\nu_1 = \nu_2$ 或 $\nu_1 = \nu_2 = 0$，以及空间特殊点位，$\nu_1 x$、$\nu_2 y$ 为 π 的整数倍，$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0$ 可以维持外，一般说来，$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} \neq 0$。同样不难相信，对于确定的 ν 值得到的测深关系式(7.57)、(7.58)、(7.60)、(7.61)和(7.64)，对于由各种可能的 ν 值叠加合成的真实电磁场，一般情况下，不再成立。这时，无论是内外场之比(相应于 7.57 式)，电场和磁场水平正交分量的比(相应于 7.60、7.61 式)，还是磁场垂直分量和水平分量的比(相应于 7.62 式)都不再仅仅是与电导率有关的常数，还与观测点的位置和场源 $A_\nu(t)$有关，不能直接作为电导率的响应函数。其原因在于上述测深响应函数都依赖于参数 ν。由(7.49)可见，参数 ν 是源场水平方向变化线度的量度，特别对于(7.65)、(7.68)，$2\pi/\nu$ 表征水平方向的波长(ν 为空间波数)。因此上节所得到的测深公式(响应函数)只有对单色波(单一 ν 值)才严格成立。

下面我们以一个简单但具有典型意义的模型讨论源场线度 ν 对于 $E_x/i\omega H_y$ 的影响。如图 7.17 所示，在 $z > 0$ 的半无限空间，有一厚度为 D 的均匀导电层 (σ)，$z > D$ 处，$\sigma = 0$。设 $\mu = 1$。在 $-h < z < 0$ 的自由空间，电磁场的解仍由(7.49)、(7.47)和(7.45)确定。在导电层 $0 < z < D$ 中，由方程(7.44)可得：

$$Z = \alpha e^{-\theta z} + \beta e^{\theta z}, \quad 0 < z < D。 \tag{7.72$_2$}$$

其中 θ 由(7.56)确定。

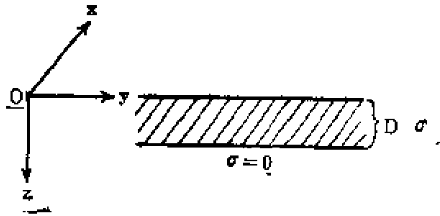


图 7.17

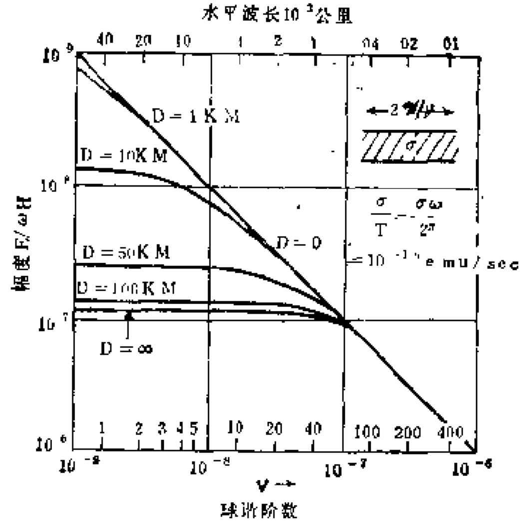


图 7.18

图 7.18 $|Ex/\omega H|$ 随场源线度 ν 的变化[20]

$$Z = ce^{-\nu z},\quad z > D。\tag{7.73}$$

由 $z = 0$、$z = D$ 处的磁场电场切向分量连续得出：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha + \beta = a + b,\\&\alpha e^{-\theta D} + \beta e^{\theta D} = ce^{-\nu D},\\&\nu(a - b) = \theta(\alpha - \beta),\\&\theta(\alpha e^{-\theta D} - \beta e^{\theta D}) = \nu ce^{-\nu D}。\end{aligned}\right\}\tag{7.74}$$

由(7.60)和(7.74)可以得出：

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = -\frac{E_y}{i\omega H_x} = \frac{a + b}{\nu(a - b)} = \frac{\alpha + \beta}{\theta(\alpha - \beta)},\tag{7.75}$$

$$\beta = \alpha e^{-2\theta D}(\theta - \nu)/(\theta + \nu)。\tag{7.76}$$

将(7.76)代入(7.75)得到：

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = \frac{\theta + \nu + (\theta - \nu)e^{-2\theta D}}{\theta\{\theta + \nu - (\theta - \nu)e^{-2\theta D}\}}。\tag{7.77}$$

当 $D \to \infty$时，(7.77)即过渡到(7.61)的结果：

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{(\nu^2 + 4\pi i\omega\sigma)^{\frac{1}{2}}},\ D \to \infty。\tag{7.78$_1$}$$

当 ν 值较小时，$\nu^2 \ll 4\pi\omega\sigma$，

$$\frac{E_x}{i\omega H_y} = \sqrt{\frac{i\omega}{4\pi\sigma}}\left(1 - \frac{\nu^2}{8\pi i\omega\sigma}\right),\ D \to \infty。\tag{7.78$_2$}$$

由(7.77)式，对不同的导电层厚度 D，$|E_x/\omega H_y|$ 与 ν 的关系如图(7.18)所示。由图看出，D 愈小，场源线度的影响愈显著。对于同样的 D，场源线度愈小（ν 大），影响愈大。当 $D > 10$ 公里，$\nu < 10^{-8}$ 厘米$^{-1}$时，源场效应已可忽略。

对于地磁变化场，其场源线度可由球谐函数的阶数估计，$P_n(\cos\theta) \sim \cos n\theta$，$\nu \sim n/a$，$a$ 为地球半径。当 $n = 1$，$\nu \sim 1.57 \times 10^{-9}$(厘米)$^{-1}$。对于实际地球的变化磁场，$n$ 常大于1。一般说来，ν 约为 10^{-8} 厘米$^{-1}$。对于更局部的场，ν 还要大些。例如第五章第五节中

所说的赤道电射流，可由(7.65)近似描述。虽然(7.65)是对 ν 从 0 到∞积分，但当 $\nu > \pi/2h$ 时，被积函数迅速下降，对场的贡献已可忽略。因此其最大值可取 $\nu = \pi/h, h \sim 100$ 公里，则 $\nu \sim 1.57 \times 10^{-7}$ 厘米$^{-1}$。因此可以认为地磁场的场源线度一般约为 $\nu \sim 1.57 \times 10^{-9} - 1.57 \times 10^{-7}$ 厘米$^{-1}$。在实际应用时，须对具体场源作出分析，并考虑不同电导率分布场源效应的差异，才能保证电磁感应测深结果的可靠性。

最后我们简要讨论变化场的穿透深度和源场对穿透深度的影响。由(7.55)、(7.58)和(7.45)可以得到电导率均匀分布的 $z > 0$ 半无限空间中的感应电流(设 $\mu = 1$)：

$$j_i = -\frac{2\sigma i\omega}{\theta + \nu} A e^{-\theta z + i\omega t}\left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0\right)。 \tag{7.79}$$

由(7.54)，$\theta^2 = 4\pi i\omega\sigma + \nu^2$，可以得出：

$$\theta = 2^{-\frac{1}{2}}[\{(k^4 + \nu^4)^{\frac{1}{2}} + \nu^2\}^{\frac{1}{2}} + i\{(k^4 + \nu^4)^{\frac{1}{2}} + \nu^2\}^{\frac{1}{2}}] = \tau + i\tau, \tag{7.80}$$

其中

$$k^2 = 4\pi\sigma\omega,$$

$$\tau = 2^{-\frac{1}{2}}\{(k^4 + \nu^4)^{\frac{1}{2}} + \nu^2\}^{\frac{1}{2}}。 \tag{7.81}$$

由(7.80)和(7.81)不难看出，当 $z = 1/\tau$ 时，感应电流将衰减 $1/e$，定义 $d = 1/\tau$ 为穿透深度。(7.81) 表明，穿透深度除与电导率 σ 和场的变化频率 ω 有关外，还依赖于场源线度 ν，当 $\sigma = 10^{-15}$ e. m. u，$T = 100$ 秒，$2(\pi\sigma\omega)^{\frac{1}{2}} \sim 2.8 \times 10^{-8}$ 厘米$^{-1}$，约与 ν 同量级，这时，ν 将对穿透深度有显著影响。而当 $\sigma = 10^{-12}$e. m. u. (大于地壳岩石，小于海水的电导率)，$T = 10$ 秒，$2(\pi\sigma\omega)^{\frac{1}{2}} \sim 2.8 \times 10^{-6}$ 厘米$^{-1}$，则穿透深度受场源影响较小，

$$d \approx (2\pi\sigma\omega)^{-\frac{1}{2}}。$$

4. 非周期变化场的电磁感应

以上主要介绍了周期性变化场的电磁感应问题的定解方法。地磁变化场还有一类非周期变化，例如"磁暴时变化" D_{st}。对于周期变化场，实质上是求解无初值的亥姆霍兹方程。而非周期变化，则是按初值定解的扩散方程(5.19)、(5.20)。这里我们以均匀球体电磁感应为例，说明以积分变换求解非周期感应场的方法和步骤。

在自由空间 ($r > a$) 解的形式仍为(7.19)。设非周期变化

$$\left.\begin{aligned} e_n &= \sum_s e_s(1 - e^{-\alpha_s t}) \qquad & t \geqslant 0 \\ e_n &= 0 & t \leqslant 0 \end{aligned}\right\}。 \tag{7.82}$$

相应外源磁场的标量势

$$W^i_{e\,n} = a e_s(1 - e^{-\alpha_s t}) Y_n(\theta, \lambda)\rho^n。 \tag{7.83}$$

为了方便，以下省略脚标 s，即只考虑(7.82)的一个典型项。

本章第二节中(7.19)至(7.23)的步骤仍然全部适用。这里的主要任务是用积分变换求解方程(7.24)，并利用边界条件(7.27)、(7.28)的定解问题。首先对方程(7.24)作拉普拉斯积分变换，设：

$$\bar{R}_n(p, \rho) = \int_0^\infty e^{-pt} R_n(t, \rho) dt。 \tag{7.84}$$

并记作 $\bar{R}_n(p, \rho) \doteqdot R_n(t, \rho)$，利用初始条件(7.82，$t = 0$)，方程(7.24)变换为：

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \bar{R}_n(p, \rho)}{\partial \rho}\right) = \{n(n+1) + 4\pi\mu a^2\rho^2\sigma p\}\bar{R}_n(p, \rho). \tag{7.85}$$

对于均匀电导率分布，(7.85) 为 $n+\frac{1}{2}$ 阶球贝塞尔方程，在 $\rho \to 0$ 时有限的解为，

$$\bar{R}_n(p, \rho) = \bar{C}_n\rho^{-\frac{1}{2}}I_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho), \quad k^2 = 4\pi\mu\sigma p. \tag{7.86}$$

常系数 $\bar{C}_n(p)$ 由场的连续条件 (7.27)、(7.28) 的积分变换确定，即：

$$\bar{C}(p)F_n(p, \rho)|_{\rho=1} = -\frac{1}{n+1}p\bar{e}_n(p) + \frac{1}{n}\bar{i}_n(p), \tag{7.87}$$

$$\bar{C}(p)F_n(p, \rho)|_{\rho=1} - \bar{C}(p)\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}F_n(p, \rho)\right\} = -\mu p(\bar{e}_n(p) + \bar{i}_n(p))。 \tag{7.88}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} &F_n(p, \rho) = \rho^{-\frac{1}{2}}I_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho), \\ &\bar{e}_n(p) \doteq e_n(t), \\ &\bar{i}_n(p) \doteq i_n(t)。 \end{aligned}\right\} \tag{7.89}$$

由(7.87)、(7.88)可以解出：

$$\bar{i}_n(p) = \frac{n}{n+1}\left\{1 - \frac{(2n+1)\mu F_n(p, 1)}{(n\mu+1)F_n(p,1) + F'}\right\}\bar{e}_n(p)。 \tag{7.90}$$

$$\bar{C}(p) = \left\{-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n+1)\mu}{(n\mu+1)F(p, 1) + F'}\right\}\bar{e}_n(p)。 \tag{7.91}$$

(7.90)、(7.91)即为本章第二节中的 (7.31)。由此可以看出，上述积分变换过程与将时间 (t) 空间 (r, θ, λ) 域中的 $\partial/\partial t$，换成算子 p 后的时空域中的处理方法完全相同，只要认定其所得结果已变换为新的 p 和空间域就是了。所不同的是，对于周期场，得到(7.31) 后，解已完全确定。而非周期场则还要把 p，空间域的结果反变换为普通的时空域。这正是非周期场问题的困难所在。这种反变换的具体过程为，

先由(7.82)解出 $\bar{e}_n(p)$，

$$\bar{e}_n(p) = e_s\int_0^\infty e^{-pt}(1 - e^{-\alpha t})\,dt = \frac{e_s\alpha}{(p+\alpha)p}。 \tag{7.92}$$

将(7.92)代入(7.90)，解(7.90)的反变换。即在复平面 p 积分：

$$i_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\left[\frac{n}{n+1}\left\{1 - \frac{(2n+1)\mu F_n(p, 1)}{(n\mu+1)F_n(p, 1) + F'}\right\}\right.$$
$$\left.\times\frac{e_s\alpha}{p(p+\alpha)}\right]e^{pt}dp。 \tag{7.93}$$

其中 δ 是实数。 先取 δ 使得 p 平面上与虚轴平行的积分路线在被积函数全部奇点的右侧。下面会看出，其奇点的实部全部小于零，因此积分线可取为 $\delta > 0$。 选取如图(7.19) 所示积分路线 Γ，(即由与虚轴平行的直线 $Re(p) = \delta$ 和左方加一个圆环所构成的围道。其圆弧的圆心位于 $D = 0$ 点，半径为 R。圆弧上的点 $p = Re^{i\theta}$，不经过被积函数的任何奇点。由于被积函数的奇点是孤立的，这是可以作到的。可以证明，当 $R \to \infty$ 时沿如图所示迴路的积分与 (7.93) 的积分路线等效。而按柯西定理这个迴路积分，等于被积函数全部奇点处的留数之和乘以 $2\pi i$。 因此把(7.93)的积分化成了较简便的求留数和的问题。

由 (7.89)式可得：

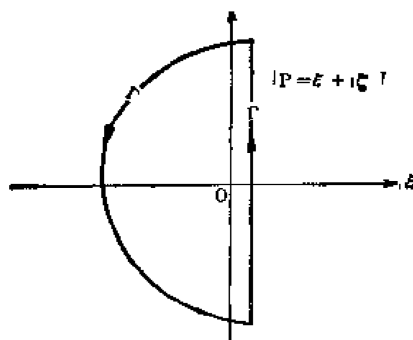


图 7.19

$$\left.\begin{aligned}
&\{F'(p,\rho)\}_{\rho=1}=-\frac{1}{2}J_{n+\frac{1}{2}}(ka)+ka\{J'_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho)\}_{\rho=1},\\
&J'_{n+\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial x}J_{n+\frac{1}{2}}(x),\quad x=ka\rho,\\
&J'_{n+\frac{1}{2}}=J_{n-\frac{1}{2}}-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{ka}J_{n+\frac{1}{2}}。
\end{aligned}\right\}\qquad(7.94)$$

将(7.94)代入(7.93):

$$i_n(t)=\frac{e_s}{2\pi i}\oint_{\Gamma R_{\to\infty}}\left[\frac{n}{n+1}\left\{1-\frac{(2n+1)\mu J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}+kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)}\right\}\right.$$
$$\left.\times\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}\right]e^{pt}dp。\qquad(7.95)$$

把(7.95)的积分分成两部分:

$$i_{n,1}(t)=\frac{e_s}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}e^{pt}dp=\frac{n}{n+1}(1-e^{-\alpha t})e_s,\qquad(7.96)$$

$$i_{n,2}(t)=\frac{-e_s}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\left[\left\{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n+1)\mu J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka)+kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)}\right\}\right.$$
$$\left.\times\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}\right]e^{pt}dp。\qquad(7.97)$$

(7.97)的被积函数的奇点除 $p=0$, $p=-\alpha$ 外,还有包括花括号中分母的全部零点,即:

$$n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka)+kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)=0\qquad(7.98)$$

的全部根。方程(7.98)有无穷多个一重实根 $p=\alpha_{ns}$,

$$(ka)_{p=\alpha_{ns}}=\sqrt{4\pi\sigma\mu\alpha_{ns}}\ a=k_{ns}a,\ s=1,2\cdots。\qquad(7.99)$$

考虑到 α_{ns} 与 $e^{\alpha_{ns}t}$ 的自由衰减场相对应,α_{ns} 只能取负实数。下面分别求出积分(7.97)中被积函数全部极点处的留数。$p=0$、$p=-\alpha$ 处的留数不难求出(以下暂不考虑(7.96)、(7.97)中的常数因子: $-ne_s/(n+1)$):

$$Res[f(0)]=\frac{(2n+1)\mu}{n\mu+n+1},\qquad(7.100)$$

$$Res'[f(-\alpha)] = -\frac{(2n+1)\mu e^{-\alpha t} J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a)}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a) + k_\alpha a J_{n-\frac{1}{2}}(k_\alpha a)}, \tag{7.101}$$

其中 $k_\alpha^2 = 4\pi\mu\sigma\alpha$。$p = \alpha_{ns}$ 处的留数可借助于(7.98)等式左边函数的微分求出，

$$\frac{d}{dp}\{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka) + kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)\}_{p=\alpha_{ns}}$$

$$= \left\{\frac{ka}{2p}[n(\mu-1)J'_{n+\frac{1}{2}}(ka) + kaJ'_{n-\frac{1}{2}}(ka) + J_{n-\frac{1}{2}}(ka)]\right\}_{p=\alpha_{ns}}$$

$$= \left\{\frac{1}{2p}\left[ka\left(n\mu - \frac{1}{2}\right)J_{n-\frac{1}{2}} + \left(-n(\mu-1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (ka)^2\right)J_{n+\frac{1}{2}}\right]\right\}_{p=\alpha_{ns}}。 \tag{7.102}$$

考虑 α_{ns} 为方程(7.98)的根，则(7.102)还可改写成：

$$\frac{d}{dp}\{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}} + kaJ_{n-\frac{1}{2}}\}_{p=\alpha_{ns}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_{ns}}\{n(\mu-1)(n\mu+n+1) - k_{ns}^2a^2\}J_{n+\frac{1}{2}}(k_{ns}a)。 \tag{7.103}$$

由(7.103)可以得出：

$$Res[f(\alpha_{ns})] = \frac{2(2n+1)\mu\alpha e^{\alpha_{ns}t}}{[n(\mu-1)(n\mu+n+1) - k_{ns}^2a^2](\alpha_{ns}+\alpha)}, \tag{7.104}$$

$$s = 1, 2, \cdots$$

(7.100)、(7.101)和(7.104)即为(7.97)中被积函数在全部奇点处的留数，由此容易得出 $i_{n2}(t)$。再加上(7.91)或 $i_{n1}(t)$，最后得出，

$$i_n(t) = \frac{ne_s}{n+1}\left[-\frac{(n+1)(\mu-1)}{n\mu+n+1} - e^{-\alpha t}\right.$$

$$+ \frac{(2n+1)\mu J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a)e^{-\alpha t}}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a) + k_\alpha a J_{n-\frac{1}{2}}(k_\alpha a)}$$

$$+ 2(2n+1)\mu k_\alpha^2$$

$$\left.\times \sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha_{ns}t}}{\{n(\mu-1)(n\mu+n+1) - k_{ns}^2a^2\}(k_{ns}^2 + k_\alpha^2)}\right]。 \tag{7.105}$$

根据函数在极点的留数就是函数分解为部份分式后相应极点分式的系数这一性质，由(7.104)和(7.100)可以得出

$$\frac{(2n+1)\mu J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(ka) + kaJ_{n-\frac{1}{2}}(ka)} \cdot \frac{1}{p} = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{p-\alpha_{ns}}\right.$$

$$\left.\times \frac{2(2n+1)\mu\alpha}{n(\mu-1)(n\mu+n+1) - k_{ns}^2a^2(p+\alpha)}\right\}$$

$$+ \left\{\frac{(2n+1)\mu}{n\mu+n+1} \cdot \frac{1}{p}\right\}。 \tag{7.106}$$

由(7.106)，令 $p = -\alpha$，可以得到：

$$\frac{(2n+1)\mu J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a)}{n(\mu-1)J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha a)+k_\alpha a J_{n-\frac{1}{2}}(k_\alpha a)}=\frac{(2n+1)\mu}{n\mu+n+1}$$

$$+\sum_s\left\{\frac{-2(2n+1)\mu\alpha}{\{n(\mu-1)(n\mu+n+1)+k_{ns}^2a^2\}(\alpha_{ns}+\alpha)}\right\}。\tag{7.107}$$

(7.107)左侧即为(7.105)方括号中第二项，因此(7.105)可改写为：

$$i_n(t)=\frac{ne_t}{n+1}\left[-\frac{(n+1)(\mu-1)}{n\mu+n+1}(1-e^{-\alpha t})\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)\mu k_a^2(e^{\alpha_{ns}t}-e^{-\alpha t})}{\{n(\mu-1)(n\mu+n+1)-k_{ns}^2a^2\}(k_{ns}^2+k_a^2)}\right]。\tag{7.108}$$

由(7.108)容易看出，$t=0$，$i_n(t)=0$，与初始条件(7.82)吻合。由(7.91)、(7.89)按上述处理方法即可求得 $C_n(t)$ 和 $R_n(t,p)$。与 $i_n(t)$ 一样，在 $t=0$ 时，$C_n(t)$ 将为零，相应地感应电流亦为零。与 $i_n(t)$ 相应的磁场标量势

$$W_i=a\rho^{-n-1}i_n(t)Y_n(\theta,\lambda)。\tag{7.109}$$

若 $\alpha>0$，则当 $t\to\infty$ 时，$e(t)\to e_t$，即外场趋于稳定值，(7.108)的常数项，即与这一稳定场的静磁感应相当。当 $\mu=1$ 时，静磁感应项为零。$e^{\alpha_{ns}t}(\alpha_{ns}<0)$ 项与衰减场相对应，当 $t\to\infty$ 时，$i_n(t)$即趋于稳定的静磁感应，这与一般物理道理相符。

当 $\alpha\to\infty$ 时，$i_n(t)\to\phi_n(t)$，即 $\phi_n(t)$ 与"急始"型外源感应场相对应，由(7.108)可得：

$$\phi_n(t)=\frac{n}{n+1}\left\{2n(2n+1)\mu\right.$$

$$\times\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha_{ns}t}}{n(\mu-1)(n\mu+n+1)-k_{ns}^2a^2}$$

$$\left.-\frac{(n+1)(\mu-1)}{n\mu+n+1}\right\}。\tag{7.110}$$

不难证明

$$i_n(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t e_n(t-\mu)\phi_n(u)du=e(t)\phi(0)$$

$$+\int_0^t e(t-u)\phi'(u)du。\tag{7.111}$$

其中 $\phi'=d\phi/dt$。

若取 D_{st} 的主要项 $n=1$，$m=0$，设 $\mu=1$，则由(7.98)，

$$J_{\frac{3}{2}}(ka)=0,$$

得：

$$ka=s\pi,\quad s=1,2,\cdots,$$

$$\alpha_{ns}=-s^2\pi^2/4\pi\sigma a^2=-s^2A,$$

$$A=\pi^2/4\pi\sigma a^2。$$

设外源场 $e(t)=e^{-\alpha t}$，$\alpha=p^2A$，则由(7.108)可得 D_{st} 的感应场：

$$i_p(t)=\frac{3}{\pi^2}\left[\left\{At+\frac{21-2p^2\pi}{12p^2}\right\}e^{-p^2At}\right.$$

$$\left.-p^2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^{-s^2At}}{s^2(s^2-p)}\right]。\tag{7.112}$$

卡普曼和普赖斯最先利用 D_{st} 的内外场系数研究了地球内部电导率的分布[22]，他们取非导电层的厚度 $d\sim 350$ 公里，得出 $\sigma\sim 4.4\times 10^{-12}$ e. m. u. 与观测结果符合较好。D_{st} 的这种分析结果与 §2.3(1)S_q 场结果的差异，是由于电导率随深度增加，而 D_{st} 有较深的穿透深度的缘故。

（四）薄层导体和上地幔的屏蔽效应

在全球广阔的地面上有海洋的分布，与地壳和上地幔相比，它的厚度很薄，但电导率却很高 ($0.5-1.0\times 10^{-11}$e. m. u.)。在地壳中也存在有局部性的高导电薄层。考虑这种类型的介质对电磁感应结果的影响是利用电磁感应方法研究深部电性结构经常遇到的问题。它们的共同特点是，多数自然电磁场的穿透深度都远远大于介质的厚度，因此可以把介质作为薄层处理。另外，它们的电导率都远高于周围介质，因此又可以忽略周围介质的导电性，把它作为绝缘介质处理。对于海洋的影响必须考虑球面分布，而地壳高导层则可视为平面薄层，因此又可分为球面薄层和平面薄层电磁感应问题 。

电磁感应问题的多数源场来源于地球外部，但长期变化则来源于核幔边界，它的变化也将受到地幔介质的屏蔽。长期变化的电磁感应是本节要讨论的另一类特殊的电磁感应问题。

1. 薄层导体中的电磁感应

①基本方程

假定将一导电薄层放在绝缘介质中，在薄层中总电流：

$$i_s=\int_0^d \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{s}。$$

其中 i 为电流密度，d 为薄层厚度。同样定义薄层的积分电阻率 ρ

$$\frac{1}{\rho}=\int_0^d \sigma ds。$$

若平行于薄层面的电场强度的分量为 E_s，则

$$\boldsymbol{E}_s=\rho \boldsymbol{i}_s。\tag{7.113}$$

在薄层内，由马克斯韦方程(5.2)可以得到

$$\nabla\times \boldsymbol{E}_s=-\boldsymbol{n}\mu\frac{\partial H_n}{\partial t},\tag{7.114}$$

$\boldsymbol{n}$ 为薄层的法线方向。将(7.113)代入(7.114)，得：

$$\rho\nabla\times \boldsymbol{i}_s+\nabla\rho\times \boldsymbol{i}_s=-\boldsymbol{n}\mu\frac{\partial H_n}{\partial t}。\tag{7.115}$$

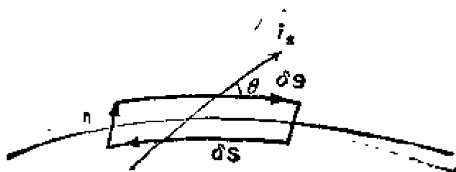


图 7.20

将马克斯韦方程(5.1)(忽略位移电流)用于图 7.20 所示小迴路，则有

$$(H_s)_+\delta s-(H_s)_-\delta s=4\pi i_s\delta s\sin\theta$$

下标＋，一分别表示薄层导体外的正侧和相反一侧，θ 是 δs 和 i 之间的锐角。因此得：

$$\boldsymbol{i}=(1/4\pi)\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_+-\boldsymbol{H}_-)。\tag{7.116}$$

定义电流函数 Ψ：

$$\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{n}\times\nabla\Psi。\tag{7.117}$$

则由(7.116)可得

$$\Psi=(1/4\pi)(W_+-W_-)。\tag{7.118}$$

W 是层外自由空间的磁位。若将(7.116)代入(7.115)，得：

$$\rho\nabla\times[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_+-\boldsymbol{H}_-)+\nabla\rho\times[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_+-\boldsymbol{H}_-)]=-4\pi\boldsymbol{n}\frac{\partial H_n}{\partial t},\tag{7.119}$$

化简后可得

$$\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{H}_+-\boldsymbol{H}_-)+\nabla\rho\cdot(\boldsymbol{H}_+-\boldsymbol{H}_-)=-4\pi\frac{\partial H_n}{\partial t}\boldsymbol{n}。\tag{7.120}$$

若薄层外部源场产生的磁位为 W_e，由于电磁感应产生的磁位为 W_i，则有 $W=W_e+W_i$。由于外源磁场在层面上是连续的，则(7.120)式成为：

$$\rho\nabla\cdot[\nabla(W_{i+}-W_{i-})]+\nabla\rho\cdot\nabla(W_{i+}-W_{i-})$$
$$=-4\pi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_e}{\partial\boldsymbol{n}}+\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{n}}\right)。\tag{7.121}$$

在薄层外 W_i 满足：

$$\nabla^2W_i=0。\tag{7.122}$$

方程(7.121)、(7.122)即为当 W_e 已知时，求解由薄层电磁感应而产生的磁位 W_i 的基本方程。

②平面薄层

取直角座标系 (x,y,z)，设平面薄层位于 $z=0$ 的平面，由于：

$$W_{i+}=-W_{i-}\tag{7.123}$$

成立，则有：

$$\Psi=(1/2\pi)W_{i+}\tag{7.124}$$

(7.121) 式成为：

$$-\rho\frac{\partial^2W_i}{\partial z^2}+\nabla\rho\cdot\nabla W_{i+}=-2\pi\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W_e}{\partial z}+\frac{\partial W_i}{\partial z}\right),\tag{7.125}$$

或用 Ψ 表示为：

$$\rho\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$
$$=-\frac{\partial H_z}{\partial t},\quad z=0。\tag{7.126}$$

(i) 均匀薄层

当薄层的电阻抗均匀时，(7.125) 简化为：

$$\rho\left(\frac{\partial^2W_i}{\partial z^2}\right)_+=2\pi p\left(\frac{\partial W_e}{\partial z}+\frac{\partial W_i}{\partial z}\right)_+,\tag{7.127}$$

其中 p 表示 $\partial/\partial t$。若外部磁场为，

$$W_e = A e^{\lambda z} \sin \lambda x, \tag{7.128}$$

则因电磁感应产生的磁位为：

$$W_t = \begin{cases} B e^{-\lambda z} \sin \lambda x, & z > 0, \\ -B e^{\lambda z} \sin \lambda x, & z < 0。\end{cases} \tag{7.129}$$

由 $z = 0$ 处的边界条件(7.127)，得：

$$B = 2\pi p(\rho\lambda + 2\pi p)^{-1} A。 \tag{7.130}$$

在 $z > 0$ 的自由空间，总磁位为：

$$W = \rho(\rho + 2\pi p/\lambda)^{-1} W_e, \quad z > 0。$$

若磁场时间因子为 $e^{i\alpha t}$，$\alpha = 2\pi/T$，则(7.130)式中 $p = i\alpha$。由此可见，由于薄层的存在，磁场将被屏蔽，其衰减因子为：

$$f = \rho^{-1}\left(\rho + \frac{2\pi i\alpha}{\lambda}\right), \tag{7.131}$$

ρ、α、λ 为实数，(7.131)还可以改写为：

$$\left.\begin{aligned} & f = A e^{i\varphi}, \\ & A = \left[1 + \left(\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \\ & \tan\varphi = \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}。\end{aligned}\right\} \tag{7.132}$$

其中 A 为幅度衰减因子，φ 为位相变化。从(7.132)可以看出，薄层电导率愈大，源场频率愈高，薄层屏蔽作用愈强，场的相位改变也愈大，这显然是合理的。

(ii) 非均匀薄层

力武常次[2] 在处理非均匀薄层问题时假定电阻抗 ρ 只在 x 方向有变化，外部磁场在 x 方向没有变化，其磁位为：

$$W_e = A e^{-qz} \cos qy, \tag{7.133}$$

则由薄层电磁感应产生的磁位可写成：

$$W_t = \cos qy \sum_{m=0}^{\infty} e^{\sqrt{m^2p^2+q^2}\, z}(i_{mc}\cos mpx + i_{ms}\sin mpx), \tag{7.134}$$

相应电流函数为

$$\Psi = \cos qy \sum_{m=0}^{\infty} (K_{mc}\cos mpx + K_{ms}\sin mpx), \tag{7.135}$$

则由(7.124)式得：

$$i_{mc} = 2\pi K_{mc}, \quad i_{ms} = 2\pi K_{ms}。 \tag{7.136}$$

若平面薄层位于 $z = 0$ 处，则边界条件(7.125)式可以写成如下形式：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\rho\,(m^2p^2 + q^2)\cos mpx + \left(\frac{d\rho}{dx}\right)mp\sin mpx\right] K_{mc}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\left[\rho\,(m^2p^2 + q^2)\sin mpx - \left(\frac{d\rho}{dx}\right)mp\cos mpx\right] K_{ms}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[Aq - 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{m^2p^2+q^2}\,(K_{mc}\cos mpx + K_{ms}\sin mpx)\right]。\tag{7.137}$$

用 $\cos Mpx$ 乘(7.137)式的两边,从 $-\pi/p$ 到 π/p 对 x 积分,可得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m^2p^2+q^2)\int_{-\pi/p}^{\pi/p}\rho(x)\cos mpx\cos Mpx dx\right.\\
&\quad\left.+ mp\int_{-\pi/p}^{\pi/p}\frac{d\rho}{dx}\sin mpx\cos Mpx dx\right]K_{mc}\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m^2p^2+q^2)\int_{-\pi/p}^{\pi/p}\rho(x)\sin mpx\cos Mpx dx\right.\\
&\quad\left.- mp\int_{-\pi/p}^{\pi/p}\frac{d\rho}{dx}\cos mpx\cos Mpx dx\right]K_{ms}\\
&=\begin{cases}(2\pi/p)\dfrac{d}{dt}[Aq-2\pi qK_{0c}] & M=0\\ -(\pi/p)\,2\pi\sqrt{M^2p^2+q^2}\,\dfrac{dK_{Mc}}{dt} & M>0。\end{cases}
\end{aligned}\tag{7.138}$$

若 ρ_0 为 ρ 的量度单位,用

$$\rho_1 = \rho/\rho_0。\tag{7.139}$$

定义无量纲的阻抗 ρ_1,则(7.138)式可写成:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_1(m,M)+A_3(m,M)\}K_{mc}+\{B_1(m,M)-B_3(m,M)\}K_{ms}]\\
&=\begin{cases}(2\pi/\rho_0p)(q/p)\dfrac{d}{dt}(A-2\pi K_{0c}), & M=0\\ -(2\pi^2/\rho_0p)\sqrt{M^2+q^2/p^2}\,\dfrac{dK_{Mc}}{dt}, & M>0。\end{cases}
\end{aligned}\tag{7.140}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned}
A_1(m,M)&=(m^2+q^2/p^2)\int_{-\pi}^{\pi}\rho_1(s)\cos ms\cos Ms ds,\\
A_3(m,M)&=m\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\rho_1}{ds}\sin ms\cos Ms ds,\\
B_1(m,M)&=(m^2+q^2/p^2)\int_{-\pi}^{\pi}\rho_1(s)\sin ms\cos Ms ds,\\
B_3(m,M)&=m\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\rho_1}{ds}\cos ms\cos Ms ds。
\end{aligned}\right\}\tag{7.141}$$

若用 $\sin Mpx$ 代替 $\cos Mpx$,同样可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_2(m,M)+A_4(m,M)\}K_{mc}+\{B_2(m,M)-B_4(m,M)\}K_{ms}]\\
&=\begin{cases}0 & M=0\\ -(2\pi^2/\rho_0p)\sqrt{M^2+q^2/p^2}\,\dfrac{dK_{Ms}}{dt} & M>0\end{cases}
\end{aligned}\tag{7.142}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
A_2(m, M) &= (m^2 + q^2/p^2)\int_{-\pi}^{\pi} \rho_1(s)\cos ms \sin Msds,\\
A_4(m, M) &= m\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\rho_1}{ds} \sin ms \sin Msds,\\
B_2(m, M) &= (m^2 + q^2/p^2)\int_{-\pi}^{\pi} \rho_1(s)\sin ms \sin Msds,\\
B_4(m, M) &= m\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\rho_1}{ds} \cos ms \sin Msds。
\end{aligned}\right\} \tag{7.143}
$$

(7.140)和(7.142)式即为求解 K_{mc} 和 K_{ms} 的联立微分方程。

周期性变化

在外部磁场的变化完全是周期性变化时，若周期为 T，则

$$
\frac{d}{dt} = i\alpha \ (\alpha = 2\pi/T,\ i = \sqrt{-1})。 \tag{7.144}
$$

将 K_{mc}、K_{ms} 的虚、实部分开，

$$
\left.\begin{aligned}
K_{mc} &= \bar{K}_{mc} + iK^*_{mc},\\
K_{ms} &= \bar{K}_{ms} + iK^*_{ms}
\end{aligned}\right\} \tag{7.145}
$$

则(7.140)和(7.142)成为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}[(A_1 + A_3)\bar{K}_{mc} + (B_1 - B_3)\bar{K}_{ms}] - 2\pi\beta\varepsilon\sqrt{M^2 + q^2/p^2}\,K^*_{Mc} = 0,\\
&\sum_{m=0}^{\infty}[(A_1 + A_3)K^*_{mc} + (B_1 - B_3)K^*_{ms}] + 2\pi\beta\varepsilon\sqrt{M^2 + q^2/p^2}\,\bar{K}_{Mc}\\
&\quad = 2\beta\gamma(q/p)A,\\
&\sum_{m=0}^{\infty}[(A_2 + A_4)\bar{K}_{mc} + (B_2 - B_4)\bar{K}_{ms}] - 2\pi\beta\delta\sqrt{M^2 + q^2/p^2}\,K^*_{Mc} = 0,\\
&\sum_{m=0}^{\infty}[(A_2 + A_4)K^*_{mc} + (B_2 - B_4)K^*_{ms}] + 2\pi\beta\delta\sqrt{M^2 + q^2/p^2}\,\bar{K}_{Ms} = 0。
\end{aligned}\right\} \tag{7.146}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta = \pi\alpha/\rho_0 p\\
&\left.\begin{aligned}\gamma &= 1\\ \delta &= 0\\ \varepsilon &= 2\end{aligned}\right\} M = 0,\quad
\left.\begin{aligned}\gamma &= 0,\\ \delta &= 1,\\ \varepsilon &= 1,\end{aligned}\right\} M > 0。
\end{aligned}\right\} \tag{7.147}
$$

若适当取 m 和 M，(7.146) 就成为求解 $\bar{K}_{mc}$, K^*_{mc}, $\bar{K}_{ms}$, K^*_{ms} 的实变量未知元的联立方程组。在下面实例的计算中，取 $m, M = 0, 1, 2, \cdots 11$，(7.146) 式为 48 个未知元素的联立方程组。

为模拟海水的影响，取如图 7.21 所示的 ρ_1 分布。海水的电导率约为 10^{-11} e. m. u.，泥土的电导率一般是 10^{-13} e. m. u.。因此，在海陆的分界处的电阻抗有很大的差别。同时还应考虑到海水的深度逐渐变化的因素。 根据这些参数将图 7.21 所示的 ρ_1 分布具体化为：

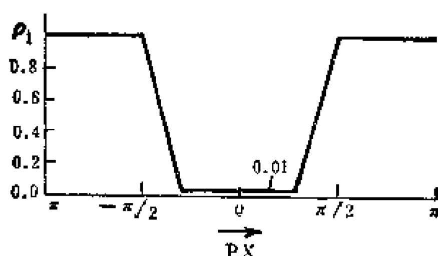


图 7.21　ρ_1 的分布

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho_1 = 1.00 && -\pi \leqslant px \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\
&\rho_1 = 1.00 - \frac{4.95}{\pi}\left(px + \frac{\pi}{2}\right) && -\frac{\pi}{2} < px \leqslant -\frac{3}{10}\pi, \\
&\rho_1 = 0.01 && -\frac{3}{10}\pi < px \leqslant \frac{3}{10}\pi, \\
&\rho_1 = 0.01 + \frac{4.95}{\pi}\left(px - \frac{3}{10}\pi\right) && \frac{3}{10}\pi < px \leqslant \frac{\pi}{2}, \\
&\rho_1 = 1.00 && \frac{\pi}{2} < px \leqslant \pi。
\end{aligned}\right\} \tag{7.148}
$$

实际计算时,将 px 从 $-\pi$ 到 π 分成 100 个小区间,则在第 i 个点有:

$$
\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)_i = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\rho_{1,i+1} - \rho_{1,i-1}}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\rho_{1,i+2} - 2\rho_{1,i+1} + 2\rho_{1,i-1} - \rho_{1,i-2}}{2}\right]。 \tag{7.149}
$$

其中 Δx 是两点间的距离。由(7.149)求得参数 A、B,即可对(7.141)和(7.143)进行数值积分。由 (7.146) 求解 $\bar{K}$ 和 K^*,则最后可得感应场 W_i (7.134) 和薄层内电流函数 Ψ (7.135)。在计算中取参数 $p = q$。对于空间波数 p,假定取纬度 38° 处经度角距 40° 的弧长作为半波长,则 $p = 1.793 \times 10^{-8}$,图(7.21)所示 ρ_1 分布已假定陆地电阻率 $\rho_1 = 1$,若陆地电导率 $\sigma = 10^{-13}$ e. m. u., 厚度为 10 公里,则 $\rho_0 = 10^{-7}$e. m. u., $\rho_0 p = 0.1793$ e. m. u.。对于周期 $T = 1$ 小时的源场,$\sigma t = 0$, $\pi/3$, $2\pi/3$ 的计算所得电流函数 Ψ 等值线的分布如图 7.22 所示。由图 7.22 可以看出,感应电流主要集中于薄层的高导区,在高导电区的边缘,垂直分量 Z 最强。离开高导电区,Z 将迅速衰减,这可定性解释前面所述的海岸效应。

非周期变化

对于非周期变化,将方程(7.140)用差分近似,得

$$
\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_1(m,M) + A_3(m,M)\}K_{mc}(t) + \{B_1(m,M) - B_3(m,M)\}K_{ms}(t)]
$$
$$
= \begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta t}\cdot\dfrac{2\pi}{\rho_0 p}\cdot\dfrac{q}{p}[A(t+\Delta t) - A(t) - 2\pi\{K_{0c}(t+\Delta t) - K_{0c}(t)\}], & M = 0 \\ -\dfrac{1}{\Delta t}\cdot\dfrac{2\pi^2}{\rho_0 p}\sqrt{M^2 + q^2/p^2}\{K_{Mc}(t+\Delta t) - K_{Mc}(t)\}, & M > 0 \end{cases} \tag{7.150}
$$

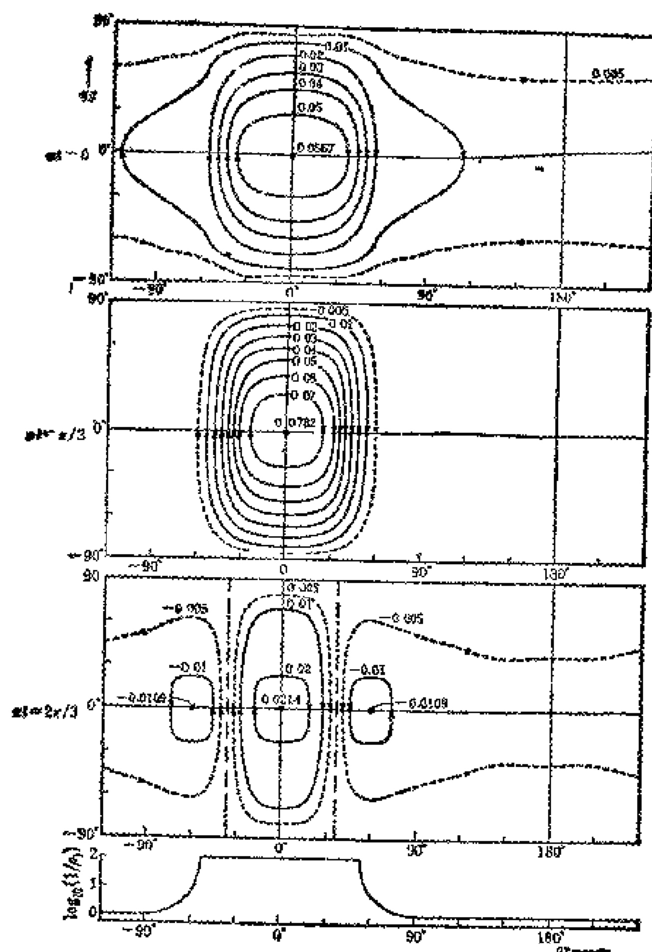


图 7.22　$T=1$ 小时的薄层感应电流体系（Ψ 等值线）底部为无量纲电导率 ρ 的分布[2]

将(7.150)改写为：

$$K_{0c}(t+\Delta t)=K_{0c}(t)-\frac{p}{2Cq}\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_1(m,0)+A_3(m,0)\}K_{mc}(t)$$
$$+\{B_1(m,0)-B_3(m,0)\}K_{ms}(t)]-\{A(t+\Delta t)-A(t)\}/2\pi,$$
$$M=0 \tag{7.151}$$

$$K_{Mc}(t+\Delta t)=K_{Mc}(t)-\frac{1}{C\sqrt{M^2+q^2/p^2}}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_1(m,M)+A_3(m,M)\}\times K_{mc}(t)+\{B_1(m,M)$$
$$-B_3(m,M)\}K_{ms}(t)],\qquad M>0。 \tag{7.152}$$

由(7.142)同样可得

$$K_{Ms}(t+\Delta t)=K_{Ms}(t)-\frac{1}{C\sqrt{M^2+q^2/p^2}}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}[\{A_2(m,M)+A_4(m,M)\}K_{mc}(t)+\{B_2(m,M)$$

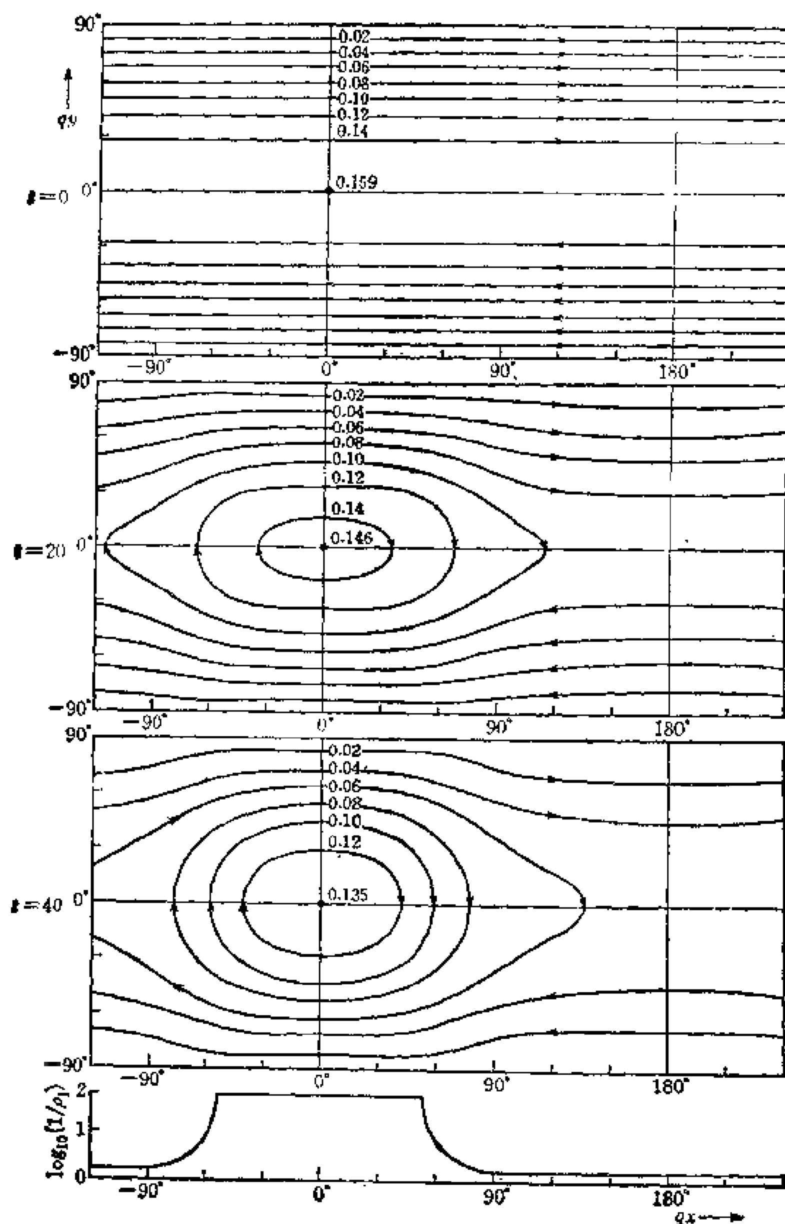


图 7.23a　感应电流的自然衰减

$$-B_4(m,M)\}K_{ms}(t)],\qquad M>0_{\circ}\tag{7.153}$$

其中

$$C=2\pi^2/(\Delta t\rho_0 p)_{\circ}\tag{7.154}$$

若 $K(t)$ 给定(相当于初始值),则由(7.151)—(7.153)可求出 $t+\Delta t$ 时的各K值。如此循环,则可求得指定时刻 t 的流函数 Ψ 和感应场 W_i。适当地取 Δt 是很重要的,若 Δt 取值过大,则不能得到稳定的解,反之若 Δt 取值过小,则将过多地耗费计算时间。

作为非周期性变化的实例,我们考虑由 $t=0$ 时单位振幅的外部磁场感应产生的电流的自然衰减问题。对于电导率取与上述周期场相同的分布。这时,因 $t=0$, $K_{0c}=1/2\pi$,而其它的系数皆为零。如图 7.23a 所示,感应电流是平行于 x 轴流动。

图 7.23 给出了 $t=0$, 20, 40, 60, 80 以及 100 秒的感应电流函数Ψ的等值线图。

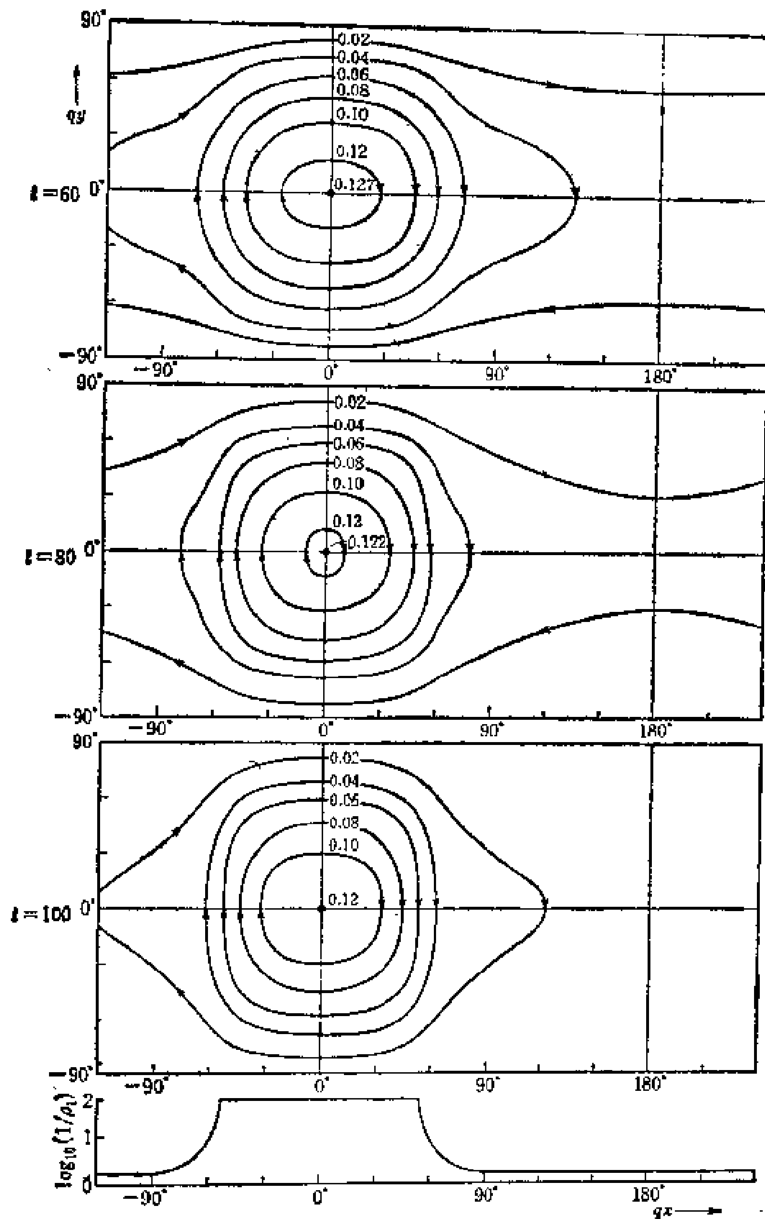


图 7.23（续上） 感应电流的自然衰减[1]

由图可以看出，电流强度随时间的增加而衰减，电流集中在薄层的高电导率区。也就是说，阻抗高的地方的电流几乎为零，只有在低阻抗的地方，电流依然存在。这是容易理解的，因为阻抗高，焦尔热损耗大，衰减就快，而高导区则相反。对于磁场，若 $t=0$ 时，感应场完全抵消了外源场，则当 $t>0$ 时，高导区边缘却产生较强的磁异常，且随时间衰减很慢。

③球面薄层

在地磁学中，薄球壳的电磁感应是特别重要的。若球壳半径为 a，用球坐标 (r, θ, λ)，则薄层基本方程(7.121)式写作：

$$a^{-2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$+\frac{\rho}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\Big](W_{i+}-W_{i-})$$

$$=-4\pi\frac{\partial^2}{\partial t\partial r}(W_e+W_i)。\tag{7.155}$$

由(7.118)式,可将(7.155)改写为

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\rho}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\rho}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]\psi$$

$$=-a^2\frac{\partial^2}{\partial t\partial r}(W_e+W_i),\qquad r=a。\tag{7.156}$$

i 均匀球层

当球壳均匀时,由于 $\partial\rho/\partial\theta=\partial\rho/\partial\lambda=0$,则(7.156)式成为:

$$\rho\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right]\Psi=a^2\frac{\partial H_r}{\partial t},\qquad r=a。\tag{7.157}$$

H_r 为磁场强度的 r 分量,而电流密度由下式给出:

$$i_{t,\theta}=\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda},\qquad i_{t,\lambda}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}。\tag{7.158}$$

若球壳外侧和内侧的磁位分别为W和 W',则 $\nabla^2W=\nabla^2W'=0$,容易解得:

$$\left.\begin{aligned}W_n^m&=a\left[e_n^m\left(\frac{r}{a}\right)^n+i_n^m\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1}\right]Y_n^m,&r>a,\\W_n^{m\prime}&=ae_n^{m\prime}\left(\frac{r}{a}\right)^nY_n^m,&r<a。\end{aligned}\right\}\tag{7.159}$$

式中的 Y_n^m 表示球面函数 $P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}m\lambda$。

若电流函数的代表项写作:

$$\Psi_n^m=K_n^mY_n^m。\tag{7.160}$$

则球壳外侧和内侧感应场的磁位为:

$$\left.\begin{aligned}U_n^m&=4\pi n(2n+1)^{-1}K_n^m\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1}Y_n^m,&r>a,\\U_n^{m\prime}&=-4\pi(n+1)(2n+1)^{-1}K_n^m\left(\frac{r}{a}\right)^nY_n^m,&r<a。\end{aligned}\right\}\tag{7.161}$$

由连续条件可知,当 $r=a$ 时有:

$$W'-U'=W-U。\tag{7.162}$$

由此得出:

$$\left.\begin{aligned}e_n^m-e_n^{m\prime}&=\frac{4\pi}{a}\frac{n+1}{2n+1}K_n^m,\\i_n^m&=\frac{4\pi}{a}\cdot\frac{n}{2n+1}K_n^m。\end{aligned}\right\}\tag{7.163}$$

将(7.160)代入(7.157)可得:

$$K_n^m=\frac{a^2p}{\rho n(n+1)}[ne_n^m-(n+1)i_n^m]。\tag{7.164}$$

其中 p 表示 $\partial/\partial t$。由(7.163)和(7.164)可得:

$$
\left.\begin{aligned}
i_n^m &= -\frac{n}{n+1} c_n p(1+c_n p)^{-1} e_n^m, \\
e_n^{m'} &= (1+c_n p)^{-1} e_n^m。
\end{aligned}\right\} \tag{7.165}
$$

其中 $c_n = \frac{4\pi a}{\rho(2n+1)}$。当外源场 e_n^m 已知时，则由(7.165)即可求出球外感应场和球内磁场$e_n^{m'}$，再由(7.164)可求出相应薄层内的感应电流，则整个空间的场完全确定。

现在我们考查一下薄层对于均匀的外部磁场的屏蔽效应。相应于均匀场，$n=1$，$m=0$。为简单起见，省略系数中 $n=1$，$m=0$ 的角标，则(7.165)成为：

$$
e' = (1+cp)^{-1} e, \quad c = \frac{4\pi a}{3\rho}。 \tag{7.166}
$$

若磁场变化是周期性的(周期为 T)，则(7.166)式为：

$$
e' = (1+ic\alpha)^{-1} e。 \tag{7.167}
$$

振幅比以及位相差由下式给出：

$$
\left.\begin{aligned}
f &= \mathrm{mod}\,(e'/e) = (1+A^2)^{-\frac{1}{2}}, \\
\delta &= \arg\,(e'/e) = -\tan^{-1} A。
\end{aligned}\right\} \tag{7.168}
$$

其中

$$
A = 4\pi a\alpha/(3\rho)。 \tag{7.169}
$$

表 7.1 球壳的屏蔽效应[1]

(f 为磁场的振幅比，δ 为位相差)

A	f	δ(度)
0	1.0000	0.0
1	0.7072	45.0
2	0.4472	63.4
3	0.3163	71.6
4	0.2425	76.0
5	0.1961	78.7
6	0.1644	80.5
7	0.1414	81.9
8	0.1240	82.9
9	0.1104	83.7
10	0.0995	84.3
15	0.0665	86.2
20	0.0499	87.1

表 7.1 给出了不同 A 值，f 和 δ 的计算结果。由表可以看到，若 A 很大，f 随之减小。也就是说，导体壳对外部磁场的屏蔽作用增强。这相当于高导电率或大尺度(a)的球层，或源场频率高的情况，这从物理道理上是容易理解的。

我们假定地球表面覆盖着一层深度为 1000 米的均匀的海水。若海水电导率为 4×10^{-11}e. m. u，则相应周期为 1 日，1 小时和 1 分钟的 f 值为 0.790、0.053 和 0.000。可见，周期为 1 分钟左右的变化磁场就可以完全被海水所屏蔽掉了。

ii 非均匀球层

因外场势满足拉普拉斯方程，则对于非均匀球层，源场之势

$$
W_e = a e_k^l \left(\frac{r}{a}\right)^k P_k^l(\cos\theta)\cos(l\lambda + \varepsilon_k^l), \qquad r > a。 \tag{7.170}
$$

设 $r=a$ 的非均匀球层内的感应电流的流函数为:

$$\Psi=\sum_{n}\sum_{m}P_n^m(\cos\theta)(K_n^{mc}\cos m\lambda+K_n^{ms}\sin m\lambda) \tag{7.171}$$

则球层外侧($r=a$)与其相应的感应场势:

$$W_i=a\sum_{n}\sum_{m}\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1}P_n^m(\cos\theta)(i_n^{mc}\cos m\lambda+i_n^{ms}\sin m\lambda)。 \tag{7.172}$$

由

$$\left.\begin{aligned}ai_n^{mc}&=4\pi n(2n+1)^{-1}K_n^{mc},\\ ai_n^{ms}&=4\pi n(2n+1)^{-1}K_n^{ms}。\end{aligned}\right\} \tag{7.173}$$

将(7.170)、(7.171)、(7.172)式代入(7.156)式,则有:

$$\begin{aligned}&\sum_{n}\sum_{m}\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta}\frac{dP_n^m}{d\theta}(K_n^{mc}\cos m\lambda+K_n^{ms}\sin m\lambda)\\ &\quad+\sum_{n}\sum_{m}\frac{m}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\lambda}P_n^m(-K_n^{mc}\sin m\lambda+K_n^{ms}\cos m\lambda)\\ &\quad-\sum_{n}\sum_{m}n(n+1)\rho_1P_n^m(K_n^{mc}\cos m\lambda+K_n^{ms}\sin m\lambda)\\ &=-\beta[ake_k^lP_k^l\cos(l\lambda+\varepsilon_k^l)-4\pi\\ &\quad\times\sum_{n}\sum_{m}\frac{n(n+1)}{2n+1}P_n^m(K_n^{mc}\cos m\lambda+K_n^{ms}\sin m\lambda)。\end{aligned} \tag{7.174}$$

其中

$$\beta=ap/\rho_0,\ \left(p=\frac{\partial}{\partial t}\right),\ \rho_1=\rho/\rho_0。 \tag{7.175}$$

ρ_0 为球壳电阻抗的单位,ρ_1 为无量纲阻抗。

用 $P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\cos M\lambda$ 乘(7.174)式的两边,分别从 0 到 π、0 到 2π 对 θ 和 λ 进行积分,则得:

$$\begin{aligned}&\sum_{n}\sum_{m}[(A_N^{Mc}-C_N^{Mc}-E_N^{Mc})K_n^{mc}+(B_N^{Mc}+D_N^{Mc}-F_N^{Mc})K_n^{ms}]\\ &=\begin{cases}-\beta\left[aNe_N^M\cos\varepsilon_N^M\dfrac{2\pi}{2N+1}\dfrac{(N+M)!}{(N-M)!}\right.\\ \qquad\left.-8\pi^2\dfrac{N(N+1)}{(2N+1)^2}\dfrac{(N+M)!}{(N-M)!}K_N^{Mc}\right] & k=N,\ l=M\\ 8\beta\pi^2\dfrac{N(N+1)(N+M)!}{(2N+1)^2(N-M)!}K_N^{Mc} & k\neq N,\ l\neq M。\end{cases}\end{aligned} \tag{7.176}$$

而,

$$
\left.\begin{aligned}
A_N^{Mc} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} P_N^M \sin\theta \cos m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda, \\
B_N^{Mc} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} P_N^M \sin\theta \sin m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda, \\
C_N^{Mc} &= m \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} \frac{P_n^m P_N^M}{\sin\theta} \sin m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda, \\
D_N^{Mc} &= m \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} \frac{P_n^m P_N^M}{\sin\theta} \cos m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda, \\
E_N^{Mc} &= n(n+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_1 P_n^m P_N^M \sin\theta \cos m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda, \\
F_N^{Mc} &= n(n+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_1 P_n^m P_N^M \sin\theta \sin m\lambda \cos M\lambda d\theta d\lambda。
\end{aligned}\right\} \quad (7.177)
$$

同样,用 $P_N^M(\cos\theta)\sin M\lambda$ 乘(7.174)式的两边,得:

$$
\sum_n \sum_m [(A_N^{Ms} - C_N^{Ms} - E_N^{Ms})K_n^{mc} + (B_N^{Ms} + D_N^{Ms} - F_N^{Ms})K_n^{ms}]
$$

$$
= \begin{cases} \beta\left[aNe_N^M \sin \varepsilon_N^M \dfrac{2\pi}{2N+1} \dfrac{(N+M)!}{(N-M)!} \right. \\ \qquad \left. + 8\pi^2 \dfrac{N(N+1)}{(2N+1)^2} \dfrac{(N+M)!}{(N-M)!} K_N^{Ms} \right] & k = N,\ l = M \\ 8\beta\pi^2 \dfrac{N(N+1)}{(2N+1)^2} \dfrac{(N+M)!}{(N-M)!} K_N^{Ms} & k \neq N,\ l \neq M。 \end{cases} \quad (7.178)
$$

其中 A_N^{Ms}、$B_N^{Ms}\cdots$是将(7.177)式中 $\cos M\lambda$ 换成 $\sin M\lambda$ 的积分常数。

同样地,对于周期性源场(周期为 T),$p = i\alpha$, $\alpha = 2\pi/T$,与非均匀平面薄层的处理方法相同,将方程分解为实、虚两部分,由此也可以得到求解 $\bar{K}_n^m$(实)、K_n^{*m}(虚)的联立方程组,即可由给定的电导率分布求解感应场和感应电流。

力武常次[3]将上述理论应用于接近实际地球面层的电导率模式,结果发现,感应电流将绕过大陆,特别是南太平洋中环形电流将更为显著。

iii 半球层导体

若设想把地球表面的海水集中于半个球面层,则较均匀球层模式更接近于真实海洋的屏蔽效应。

设球层的半径为 a,半球层的部分为 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,外部源场为沿 $\theta = 0$ 轴方向的均匀场(H_0),对于理想导体球层,阿修耳(Ashour)[23][24]用解析方法求出 $r = a$ 处的电流函数 Ψ、电流密度 i(只有 i_λ 分量,$i_\theta = 0$)、以及法线和切线方向的感应磁场,其结果为:

$$
\Psi = \begin{cases} (-H_0 a/4\pi^2)\{(3\cos\theta + 1)\tan^{-1}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + 3(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\}, & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \quad (7.179)
$$

$$
i_1 = \begin{cases} (-H_0/4\pi^2)\sin\theta\{3\tan^{-1}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + 2(\sec\theta)^{\frac{1}{2}} + (\cos\theta)^{\frac{1}{2}}/(1+\cos\theta)\} & \\ & 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.180}
$$

$$
Z_i = \begin{cases} -H_0\cos\theta, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}。 \\ -H_0\cos\theta + (H_0/\pi)\ \{2\cos\theta\tan^{-1}(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - 2(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + (-\sec\theta)^{\frac{1}{2}}\} & \\ & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.181}
$$

$$
H_{i\theta} = \begin{cases} \pm 2\pi i + (H_0/4)\sin\theta, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \\ (H_0/2\pi)\{\frac{\pi}{2} - (-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}/(1-\cos\theta) - \tan^{-1}(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\}\sin\theta & \\ & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.182}
$$

这里(±)表示球壳层的外侧和内侧。

在球层附近磁力线的分布和球层内的感应电流分别由图 7.24 和 7.25 给出。图

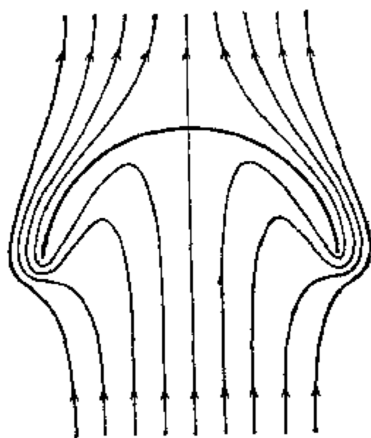


图 7.24 平行于 $\theta = 0$ 轴的磁力线受半球壳理想导体影响而变形的情况[2]

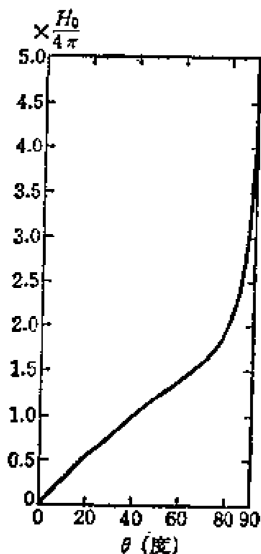


图 7.25 半球壳内感应电流的分布[2]

7.24 表明，当 $\theta \geqslant 60°$，电流密度急剧增加，在半球壳的边缘，$\theta = 90°$，电流密度为无穷大。相应感应电流产生的磁场的法线分量如图 7.26 所示，在半球壳边缘同样为无穷大。

当外部场与半球层的底面赤道大圆平行时，阿修耳给出：

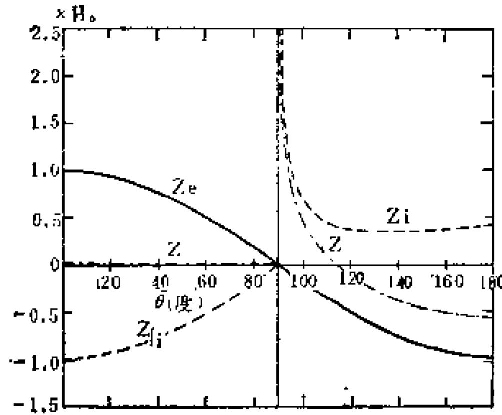


图 7.26　源场 Z_e、感应磁场 Z_i 以及总磁场 $Z = Z_e + Z_i$ 的法线分量的分布[2]

$$
\Psi = \begin{cases} -(H_0 a/4\pi^2)[3\sin\theta\{\tan^{-1}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + (\cos\theta)^{\frac{1}{2}}/(1+\cos\theta)\} \\ \quad + 2(\pi+2)^{-1}\{2\cot(\theta/2)\tan^{-1}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \\ \quad - \pi\csc\theta(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\}]\cos\lambda, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \quad \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.183}
$$

$$
\left.\begin{aligned} i_\theta &= -(1/a)\csc\theta\tan\lambda\Psi(\theta,\lambda), \\ i_\lambda &= (H_0/4\pi^2)[3(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - 3(\sec\theta)^{\frac{1}{2}}/(1+\cos\theta) \\ &\quad + (\pi+2)^{-1}\{2\pi(\cos\theta)^{\frac{3}{2}}(\csc\theta)^2 + (\pi-2)(\sec\theta)^{\frac{1}{2}}\} \\ &\quad + \{3\cos\theta - 4(\pi+2)^{-1}(1-\cos\theta)^{-1}\}\tan^{-1}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}]\cos\lambda。 \end{aligned}\right\} 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \tag{7.184}
$$

$$
i_\theta = i_\lambda = 0, \qquad \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \tag{7.185}
$$

$$
Z_i = \begin{cases} -H_0\sin\theta\cos\lambda & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -H_0\sin\theta\cos\lambda + (H_0/\pi)\{2\sin\theta[\tan^{-1}(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} + (-\sec\theta)^{\frac{1}{2}}] \\ \quad - \pi(\pi+2)^{-1}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}[(\cos\theta)^2 - \cos\theta]^{-\frac{1}{2}}\}\cos\lambda, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.186}
$$

$$
H_{i,\lambda\pm} = \begin{cases} \mp 2\pi i_\theta + (H_0/2)\left\{1 - 4(\pi+2)^{-1}\csc\theta\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}\sin\lambda \\ \qquad\qquad 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -(H_0/\pi)\csc\theta\sin\lambda\left[\left\{\sin\theta - 4(\pi+2)^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}\tan^{-1}(-\sec\theta)^{\frac{1}{2}}\right. \\ \quad \left. - \left\{4(\pi+2)^{-1}\csc\theta - \tan\dfrac{\theta}{2}\right\}(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right], \quad \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi。 \end{cases} \tag{7.187}
$$

$$
H_{i,\theta\pm}=\begin{cases}\pm 2\pi i_\lambda-(H_0/2)\left\{\cos\theta-2(\pi+2)^{-1}\sec^2\dfrac{\theta}{2}\right\}\cos\lambda, & 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\\ -(H_0/\pi)\left[\left\{\cos\theta-2(\pi+2)^{-1}\sec^2\dfrac{\theta}{2}\right\}\tan^{-1}(-\sec\theta)^{\frac{1}{2}}\right.\\ \left.+\{1+\sin^2\theta-(\pi-2)(\pi+2)^{-1}\cos\theta\}\csc^2\theta(-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right]\\ \times\cos\lambda, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi。\end{cases}\tag{7.188}
$$

相应磁力线的分布如图 7.27 所示。图 7.28 为半球壳内感应电流流线的分布(沿 $\theta=0$ 的

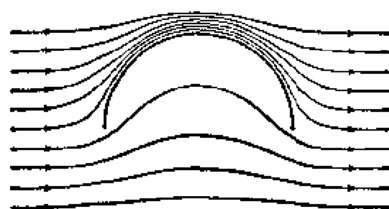


图 7.27 $\lambda=0$ 平面内的磁力线的变形[2]

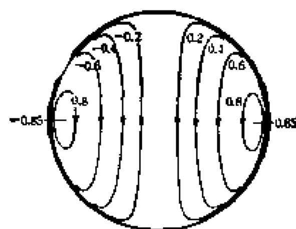


图 7.28 感应电流的流线(数字以 $H_0a/4\pi$ 为单位)[2]

轴俯视)。图 7.29 为磁场法向分量的分布。由图上看出,与沿 $\theta=0$ 方向的磁场的感应问题一样,在半球壳边缘,电流和磁场也变为无穷大。

上述分析表明,伴随外部磁场的变化,在海陆的分界处有可能产生很强的异常磁场。这与海岸效应磁异常的性质相符:垂直分量的异常发生在海陆交界处的大陆一侧,而水平分量很大的异常则出现在海洋一侧。

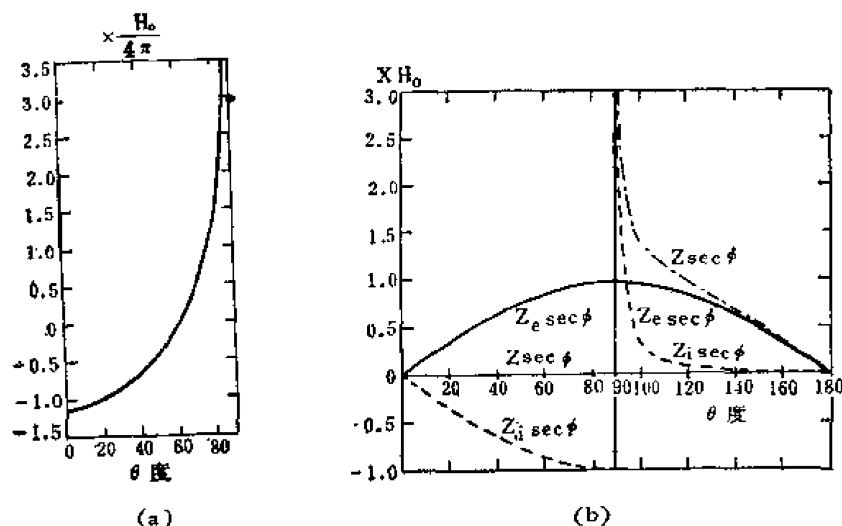


图 7.29 (a)感应电流($i_\lambda\sec\lambda$)的分布;(b)外部感应磁场($Z_e\sec\lambda$),感应电流产生的磁场($Z_i\sec\lambda$)和总磁场的法线分量的分布[2]

2. 长期变化场的电磁感应

一般认为,地磁长期变化场来源于地核或核幔边界处的电流体系。这种缓慢变化的电磁场将在地幔中产生感应电流。地球表面观测到的长期变化是源场电流体系和地幔感应电流贡献的总和。不难相信,与上述各节处源场的电磁感应问题不同,由地球表面长期变化的观测是无法将这种源场和感应场分开的。若源场作为系统的输入,地幔介质为一

滤波器，则长期变化的观测值即为源场经滤波器后的响应输出。长期变化的电磁感应是既不知输入又不知滤波器性能，仅仅已知输出的情况下的感应问题。因此，只有当对源场模型作一定推测后，才有可能由长期变化的电磁感应问题研究地幔介质的性质。例如：麦克唐纳（K. L. McDonald）用核幔边界处无序放置的磁偶极子模拟长期变化的源场，求得地幔底部电导率约为 2.0×10^{-9} 电磁单位[25,26]。当然，若地幔介质的性质已知，长期变化电磁感应的结果又使我们有可能由地面观测值恢复长期变化源场的状态或研究地幔介质对源场的屏蔽效应。

①平板模型

研究地幔介质对长期变化的屏蔽效应，最简单的是平板地幔模式。设电导率分布如

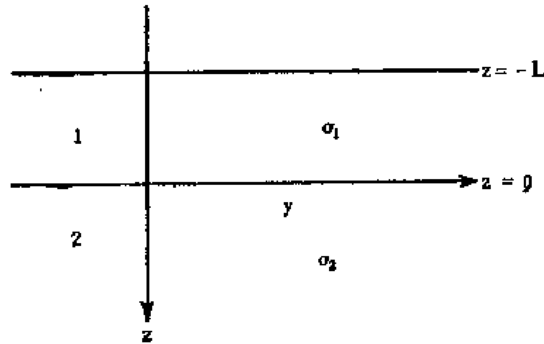


图 7.30

图 7.30 所示，$z<-l$ 为自由空间，区域 1 为平板导体（σ_1），区域 2 为半无限空间导体（σ_2），是长期变化源场的所在地。

在自由空间（$z<-l$）场势 W 满足拉普拉斯方程。若只考虑内源场，则由（7.50）可得：

$$W_{mn}=i_{mn}e^{\nu z}P_{mn}(x,y)。\tag{7.189}$$

其中 $P_{mn}(x,y)$ 满足方程(7.43)，其典型解如(7.49)所示；i_{mn} 与(7.50)中的 $B(t)$ 相当。由(7.189) 求得相应磁场 x、y、z 向的三个分量：

$$\boldsymbol{H}=\begin{cases}-i_{mn}e^{\nu z}\partial P_{mn}/\partial x\ \boldsymbol{i}\\-i_{mn}e^{\nu z}\partial P_{mn}/\partial y\ \boldsymbol{j}\quad z\leqslant-l。\\-\nu i_{mn}e^{\nu z}P_{mn}\quad\ \boldsymbol{k}\end{cases}\tag{7.190}$$

在导电区 1 和2，对感应场有意义的极型磁场的一般解可写作：

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{k}\Psi)。\tag{7.191}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 为 z 方向的单位矢量，标量函数 Ψ 满足方程 （7.22）。在图 7.30 所示直角坐标系中，用分离变量法求解 Ψ，设

$$\Psi(x,y,z)=Z(z,t)P(x,y)。\tag{7.192}$$

这里 P 与（7.189）中的 P 相同。$Z(z,t)$ 满足（7.44）。对于图 7.30 所示电导率分布，(7.44）成为：

$$\frac{\partial^2Z(z,t)}{\partial z^2}=\left(\nu^2+4\pi\mu\sigma_i\frac{\partial}{\partial t}\right)Z(z,t)。\tag{7.193}$$

其中角标 $i=1$，2 分别对应于图 7.30 所示区域 1 和 2。方程(7.193)的典型解为：

$$
\left.\begin{aligned}
Z_{mn}(z,\ p) &= A_{mn}e^{-\theta_1 z} + B_{mn}e^{\theta_1 z},\ -l \leqslant z \leqslant 0, \\
Z_{mn}(z,\ p) &= C_{mn}e^{-\theta_2 z} + D_{mn}e^{\theta_2 z},\ 0 \leqslant z。
\end{aligned}\right\} \tag{7.194}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_i^2 &= \nu^2 + k_i^2 \\
k_i^2 &= 4\pi\mu\sigma_i p
\end{aligned}\right\} i = 1,\ 2。 \tag{7.195}
$$

其中 p 为算符 $\partial/\partial t$。容易理解，自由空间 $(z \leqslant -l)$ 内源场的解写作(7.189)的形式，就已经约定参数 ν 的实部必须为正。因此 (7.194) 中与系数 D_{mn} 相关联的解代表介质 2$(z \geqslant 0)$ 中长期变化的源场，其余各项为长期变化的感应场。最后将(7.191)写成分量形式，得

$$
\boldsymbol{H} = \begin{cases}
(-A_{mn}e^{-\theta_1 z} + B_{mn}e^{\theta_1 z})\theta_1 \partial P_{mn}/\partial x & \boldsymbol{i} \\
(-A_{mn}e^{-\theta_1 z} + B_{mn}e^{\theta_1 z})\theta_1 \partial P_{mn}/\partial y & \boldsymbol{j} \\
(A_{mn}e^{-\theta_1 z} + B_{mn}e^{\theta_1 z})\nu^2 P_{mn} & \boldsymbol{k}
\end{cases} \quad -l \leqslant z \leqslant 0。 \tag{7.196}
$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{cases}
(-C_{mn}e^{-\theta_2 z} + D_{mn}e^{\theta_2 z})\theta_2 \partial P_{mn}/\partial x & \boldsymbol{i} \\
(-C_{mn}e^{-\theta_2 z} + D_{mn}e^{\theta_2 z})\theta_2 \partial P_{mn}/\partial y & \boldsymbol{j} \\
(C_{mn}e^{-\theta_2 z} + D_{mn}e^{\theta_2 z})\nu^2 P_{mn} & \boldsymbol{k}
\end{cases} \quad z \geqslant 0。 \tag{7.197}
$$

由磁场在边界 $z = -l$ 和 $z = 0$ 处的连续条件和解(7.189)、(7.196)、(7.197)可以得出：

$$
\left.\begin{aligned}
-i_{mn}e^{-\nu l} &= \theta_1(-A_{mn}e^{\theta_1 l} + B_{mn}e^{-\theta_1 l}), \\
-i_{mn}e^{-\nu l} &= \nu(A_{mn}e^{\theta_1 l} + B_{mn}e^{-\theta_1 l}), \\
\theta_1(-A_{mn} + B_{mn}) &= \theta_2(-C_{mn} + D_{mn}), \\
A_{mn} + B_{mn} &= C_{mn} + D_{mn}。
\end{aligned}\right\} \tag{7.198}
$$

若长期变化的源场系数 D_{mn} 已知，则由关系式(7.198)可确定全部待定系数 i_{mn}、A_{mn}、B_{mn}、C_{mn}，即全部空间场的解(7.189)、(7.196)、(7.197)完全确定。对于我们所感兴趣的自由空间，

$$
i_{mn} = -4\nu\theta_1\theta_2 e^{\nu l} D_{mn}/\Phi。 \tag{7.199}
$$

其中

$$
\Phi = (\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 + \nu)e^{\theta_1 l} - (\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \nu)e^{-\theta_1 l}。 \tag{7.200}
$$

为考查平板导体对源场的屏蔽效应，令 $\sigma_1 = 0$，则(7.199)式变成：

$$
(i_{mn})_{\sigma_1=0} = -2\nu\theta_2 D_{mn}/(\theta_2 + \nu)。 \tag{7.201}
$$

定义屏蔽系数 f

$$
f = |i_{mn}/(i_{mn})_{\sigma_1=0}|, \tag{7.202}
$$

对于周期性源场，$p = i\omega(\omega = 2\pi/T)$，则屏蔽系数为：

$$
f = |2\theta_1(\theta_2 + \nu)e^{\nu l}/\Phi|, \tag{7.203}
$$

进一步，若 $\sigma_2 = 0$，介质 2 中不再有感应场，则平板导体 σ_1 只对纯场源起屏蔽作用，此时，

$$
(f)_{\sigma_2=0} = |4\nu\theta_1 e^{\nu l}/[(\theta_1 + \nu)^2 e^{\theta_1 l} - (\theta_1 - \nu)^2 e^{-\theta_1 l}]| \tag{7.204}
$$

设平板导体σ_1与地幔厚度相当，取为 3000 公里，磁场长期变化的波长$2\pi/\nu = 3000$ 公里，$\sigma_1 = 10^{-11}$e. m. u.，分别对 $\sigma_2 = 0$ 和 $\sigma_2 = 10^{-9}$ e. m. u. 求得对应各种源场周期T的屏蔽系数如下表所示。

表 7.2 对应不同周期场的平板屏蔽系数 f[2]

周期 T（年）	0.1	0.5	1.0	2.0	10.0
$\sigma_2=0$	0.0042	0.573	0.778	0.948	1.00
$\sigma_2=10^{-9}$e. m. u	0.0067	0.626	0.800	0.953	1.00

从表中可以看出，σ_2 对 f 的影响不大，它总的趋势是减小平板导体的屏蔽效应，这从物理道理上不难理解。图 7.31 为平板厚度和参数 ν 不变，$\sigma_2=0$ 时屏蔽系数 f 对源场周期 T 以及 σ_1 的依赖关系。由图 7.31 可知，当 $\sigma_1<10^{-9}$e. m. u.（与下地幔电导率相当），对于周期超过 10 年的变化场，平板导体的屏蔽效应可以忽略。

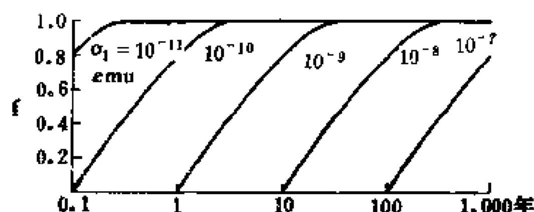


图 7.31 屏蔽系数 f 对于周期 t 和 σ_1 的依赖关系[2]

②球壳模型

长期变化是全球范围大尺度的变化，其波长可与地球半径相比拟。因此，球壳模型要比上述平板模型更为适宜。设球形地球的电导率分布如图 7.32 所示。在区域 $q_1a\leqslant r\leqslant a$，其电导率趋于零：$\sigma=\sigma'=0$；在区域 $q_2a\leqslant r\leqslant q_1a$，与导体地幔相对应，其电导率为 $\sigma=\sigma_0\rho^{-l}$ $(\rho=r/a)$；在区域 $0\leqslant r\leqslant q_2a$，与地核相对应，$\sigma=\sigma_c$。

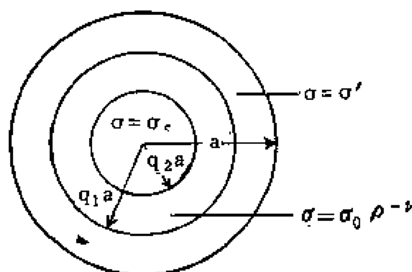


图 7.32 球形地球的电导率分布

上图所示的导体球长期变化的感应效应与前面球体电磁感应一节的处理方法相同。对于自由空间和球体的非导体区域（$q_1a<r$）磁场的位势 W 由(7.19)的内源场部分确定，即：

$$W_n=ai_n(t)\rho^{-n-1}Y_n(\theta,\lambda)\qquad q_1\leqslant\rho\tag{7.205}$$

相应磁场：

$$\boldsymbol{H}=\begin{cases}(n+1)\rho^{-n-2}i_nY_n & \boldsymbol{e}_r\\ -\rho^{-n-2}i_n\partial Y_n/\partial\theta & \boldsymbol{e}_\theta\\ -\rho^{-n-2}i_n\partial Y_n/\sin\theta\partial\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda\end{cases}\qquad q_1\leqslant\rho\tag{7.206}$$

在地核内，由于 $\sigma=\sigma_c$ 为常数，相应电场的解由 (7.25) 确定，若用算符 p 表示 $\partial/\partial t$，

则(7.25)可写作:

$$\boldsymbol{E} = aR_n(p, \rho)\, \boldsymbol{r} \times \nabla Y_n(\theta, \lambda) \tag{7.207}$$

其中 $R_n(p, \rho)$ 满足方程(7.24),改用算符 p,则(7.24)成为:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial R_n}{\partial \rho}\right) = \{n(n+1) + 4\pi\mu\sigma a^2\rho^2 p\} R_n \tag{7.208}$$

将 $\sigma = \sigma_c$ 代入(7.208)解得:

$$R_{n,3}(p, \rho) = C_{n,3}\rho^{-\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho), \qquad \rho \leqslant q_2。 \tag{7.209}$$

其中 $k^2 = 4\pi\mu\sigma_c p$, $I_{n+\frac{1}{2}}(ka\rho)$ 为虚宗量贝塞耳函数,由 (5.65) 式确定。由 (7.207) 和 (7.209) 可得相应磁场(设 $\mu = 1$) 的解:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \begin{cases} -n(n+1)\rho^{-1} R_{n,3}(p, \rho) Y_n(\theta, \lambda) & \boldsymbol{e}_r, \\ -\rho^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho R_{n,3}) \partial Y_n / \partial \theta & \boldsymbol{e}_\theta, \quad \rho \leqslant q_2。 \\ -\rho^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho R_{n,3}) \partial Y_n / \sin\theta \partial\lambda & \boldsymbol{e}_\lambda, \end{cases} \tag{7.210}$$

对于地幔,因 $\sigma = \sigma_0 \rho^{-l}$, 不再是均匀介质。为了解这种非均匀介质电磁感应问题的处理方法,不妨先假定电导率为球对称分布 $\sigma = \sigma(\rho)$ 的一般情况。此时,磁场扩散方程(5.19)的成立条件(5.15)一般不再满足,即 $\boldsymbol{E} \times \nabla\sigma \neq 0$,因此和均匀介质不同,不能由(5.19)出发求解磁场 $\boldsymbol{H}$。我们再考查对感应效应有意义的环型电场(7.207)。因(7.207)中环型电场 $\boldsymbol{E}$ 没有经向分量,故 $\boldsymbol{E} \cdot \nabla\sigma = 0$,满足电场扩散方程 (5.20) 的成立条件(5.16)。因此,$\sigma = \sigma(\rho)$ 型电导率分布的电磁感应问题须从方程(5.20)出发,首先求解电场 $\boldsymbol{E}$。特别有意义的是,可以证明,与均匀或分层均匀的情况一样,这里环型电场 $\boldsymbol{E}$ 中的标量函数 Ψ,见(7.21)式,仍满足方程(7.22),即(7.207)中的径向函数 R_n 仍满足方程(7.208)。证明如下:

将(7.21)代入(5.20),

$$\nabla^2(\nabla \times [\boldsymbol{r}\Psi]) = 4\pi\mu\sigma(\rho) \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times [\boldsymbol{r}\Psi])。$$

经向量运算,得

$$\nabla \times (\boldsymbol{r}\nabla^2\Psi) = \nabla \times \left[\boldsymbol{r}\left(4\pi\mu\sigma(\rho)\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)\right] - 4\pi\mu(\nabla\sigma(\rho)) \times \left(\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)。$$

容易看出,右端最后一项为零,上式简化为:

$$\boldsymbol{r} \times \nabla(\nabla^2\Psi) = \boldsymbol{r} \times \nabla\left[4\pi\mu\sigma(\rho)\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right]。$$

因此 Ψ 满足方程(7.22),即:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi\mu\sigma(\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial t}。 \tag{7.211}$$

显然,因 (7.208) (或 7.24) 是由 (7.211) 或 (7.22) 经分离变量所得到的方程,故 R_n 所满足的(7.208)对于 $\sigma = \sigma(\rho)$ 型的电导率分布也必然有效。但对于球对称型的电导率的一

般分布，极型电场 $\nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{r}\Psi_s)$ 中的标量函数 Ψ_s 则不再满足方程(7.211) 这就是第五章第 **1** 节所指出的，当介质不均匀时的一般情况，环型和极型电磁场的标量函数 Ψ 将遵从不同的方程，要得到完整的电磁场解答，必须分别求解环型和极型场所满足的方程。而不能象均匀介质那样，可直接利用关系式(5.84)。

将地幔 $(q_1\leqslant\rho\leqslant q_2)$ 电导率 $\sigma=\sigma_0\rho^{-l}$ 代入(7.208)，并化为：

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial R_n}{\partial\rho}-\left(\frac{n(n+1)}{\rho^2}+k_0^2a^2\rho^{-l}\right)R_n=0。\tag{7.212}$$

其中 $k_0^2=4\pi\mu\sigma_0p$。作变换，

$$R_n=\rho^{-\frac{1}{2}}Z(p,\rho)。\tag{7.213}$$

则(7.212)成为：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial\rho}-\left\{\frac{n(n+1)+\frac{1}{4}}{\rho^2}+k^2a^2\rho^{-l}\right\}Z=0。\tag{7.214}$$

再对(7.214)作变换，

$$\rho^{1-\frac{l}{2}}=\frac{|l-2|}{2k_0a}z,\qquad l\neq 2。\tag{7.215}$$

则(7.214)成为，

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial Z}{\partial z}-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)Z=0。\tag{7.216}$$

其中

$$\nu=\frac{2n+1}{|l-2|},\qquad l\neq 2。\tag{7.217}$$

方程(7.216)与(5.64)相同，为虚宗量的贝塞耳方程，其解由(5.65)式确定，或分别用第一类和第二类虚宗量贝塞耳函数 $I_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$ 表示(见第五章)。最后得到方程(7.212)的解为：

$$R_{n,2}(p,\rho)=\begin{cases}\rho^{-\frac{1}{2}}(C_{n,2}K_\nu(z)+D_{n,2}I_\nu(z)), & l\neq 2,\\ \rho^{-\frac{1}{2}}(C_{n,2}\rho^{-\frac{1}{2}-\theta_n}+D_{n,2}\rho^{-\frac{1}{2}+\theta_n}), & l=2,\end{cases}$$
$$q_1\leqslant\rho\leqslant q_2。\tag{7.218}$$

其中，

$$\theta_n^2=n(n+1)+\frac{1}{4}+k_0^2a^2。\tag{7.219}$$

相应磁场为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=\begin{cases}-n(n+1)\rho^{-1}R_{n,2}Y_n & \boldsymbol{e}_r,\\ -\rho^{-1}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho R_{n,2})\dfrac{\partial Y_n}{\partial\theta} & \boldsymbol{e}_\theta,\\ -\rho^{-1}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho R_{n,2})\dfrac{\partial Y_n}{\sin\theta\partial\lambda} & \boldsymbol{e}_\lambda,\end{cases}\qquad q_1\leqslant\rho\leqslant q_2。\tag{7.220}$$

设长期变化来源于地核表层的面电流，其流函数为

$$J_n=K_nY_n。\tag{7.221}$$

则由 $\rho=q_2$、$\rho=q_1$ 处磁场的连续条件和(7.206)、(7.210)、(7.220)、(7.221)式可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R_{n,2})\right]_{\rho=q_2}-\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R_{n,3})\right]_{\rho=q_2}=\rho\frac{4\pi}{a}K_n,\\
&(R_{n,2})_{\rho=q_2}=(R_{n,3})_{\rho=q_2},\\
&n(R_{n,2})_{\rho=q_1}=-i_n p q_1^{-n-1},\\
&\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R_{n,2})\right]_{\rho=q_1}=i_n p q_1^{-n-1}。
\end{aligned}\right\}\tag{7.222}$$

当长期变化源场 K_n 已知时，由(7.222)可确定全部待定系数 i_n、$C_{n,2}$、$D_{n,2}$、$C_{n,3}$。非导电区域 $(\rho\geqslant q_1)$、地幔 $(q_1\geqslant\rho\geqslant q_2)$ 以及地核 $(\rho<q_2)$ 中的电场和磁场完全确定。特别是我们感兴趣的 i_n（可由观测确定）和 K_n（源场）之间的关系为：

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{a}K_n=q_1^{-n-\frac{1}{2}}q_2^{-\frac{1}{2}}\frac{2n+1}{n}z_1&\left[\frac{z_2}{2\nu}\{I_{\nu+1}(z_2)K_{\nu+1}(z_1)-K_{\nu+1}(z_2)I_{\nu+1}(z_1)\}\right.\\
&+\frac{k_0q_2a}{2n+1}\cdot\frac{I_{n-\frac{1}{2}}(k_0q_2a)}{I_{n+\frac{1}{2}}(k_0q_2a)}\\
&\left.\times\{I_\nu(z_2)K_{\nu+1}(z_1)+K_\nu(z_2)I_{\nu+1}(z_1)\}\right]i_n,\qquad l\neq 2。
\end{aligned}\tag{7.223}$$

其中 $z_1=z_{\rho=q_1}$，$z_2=z_{\rho=q_2}$，由(7.215)确定。

令地核和地幔电导率为零，则(7.223)式简化为：

$$\frac{4\pi}{a}K_n=q_2^{-n-1}\frac{2n+1}{n}i_{n,0}。\tag{7.224}$$

由(7.223)和(7.224)所确定的 $|i_n/i_{n,0}|$ 即可考查地幔导体对于磁场的屏蔽效应。

为了解地幔对长期变化源场的具体屏蔽效果，设源场为核幔边界处沿径向放置的一个磁矩为 M 的偶极子，取偶极子方向为极轴，地核半径为 r_c，则偶极子的磁位可表示为：

$$W_d=M(r\cos\theta-r_c)/(r^2+r_c^2-2rr_c\cos\theta)^{\frac{3}{2}}。\tag{7.225}$$

其中 θ 为过测点的矢径与极轴的夹角。利用球函数的母函数(5.36)式

$$(r^2+r_c^2-2rr_c\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_c^{n+1}}P_n(\cos\theta) & r<r_c,\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_c^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) & r>r_c。\end{cases}$$

将等式两边分别对 r_c 求导数，得：

$$\begin{aligned}
&(r^2+r_c^2-2rr_c\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}(r_c-r\cos\theta)\\
&=\begin{cases}\displaystyle r_c^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{r_c}\right)^nP_n(\cos\theta), & r<r_c,\\ \displaystyle -r_c^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{r_c}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta), & r>r_c。\end{cases}
\end{aligned}$$

于是(7.225)式可展成

$$W_d = \begin{cases} -\frac{M}{r_c^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{r}{r_c}\right)^n P_n(\cos\theta), & r < r_c, \\ \frac{M}{r_c^2}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{r_c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta), & r > r_c。\end{cases} \tag{7.226}$$

在地球表面，

$$(W_d)_{r=a} = \frac{M}{r_c^2}\sum_{n=0}^{\infty} nq_2^{n+1}P_n(\cos\theta)。\tag{7.227}$$

将(7.227)代入(7.224)，即可得到与单一偶极子源等效的面电流流函数的幅度：

$$K_n = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{2n+1}{a^2q_2^2}。\tag{7.228}$$

假设地核电导率 $\sigma_c = 10^{-6}$e. m. u，地幔电导率 $\sigma = \sigma_0\rho^{-l}$，$\sigma_0 = 10^{-12}$e. m. u，$l = 11$，偶极子强度的变化周期 $T = 100$ 年，则 $p = 2\pi/T \cdot i$。将这些参数的取值和(7.228)代入(7.223)，则地表 $r = a$ 处的场值完全确定，再令 $\sigma_c = 0$ 和 $\sigma = \sigma_0\rho^{-l} = 0$，由(7.228)和(7.224)算出 $i_{n,0}$ 和相应地面磁场的分布。直到 $n = 30$ 的计算结果绘于图 7.33。图中将电导率实际分布情况的磁场放大了 5.86 倍。由图中看出，放大后，在极轴上，磁场大小与无屏蔽作用时的磁场大体相当。可见地幔导体的屏蔽效果是显著的。

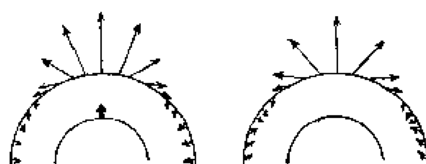


图 7.33　核幔边界处放置的磁偶极子的磁场在地表相对强度的分布[2]

左：地核，地幔电导率皆为零；

右：$\sigma_c = 10^{-6}$e. m. u，$\sigma = \sigma_0\rho^{-l}$，$l = 11$，$\sigma_0 = 10^{-11}$e. m. u，磁场大小放大了 5.86 倍。

三、地球内部的电导率

从上述地球电磁感应典型问题的讨论可以看出，各种类型的地球电磁变化场都与地球内部的电导率有关。由于不同频率的源场对地球的穿透深度不同，因此利用各种不同频率的变化场的电磁感应可以获得地下不同深度电导率的信息。现将地球内部电导率的研究结果综合绘于图 7.34。

（一）地壳和地幔的电导率

地壳和地幔顶部电导率的研究多利用大地电磁测深方法观测和分析各种类型的电磁脉动场。近年来又发展了利用高灵敏度地磁仪布设台阵观测的所谓磁测深方法。因后者能给出各类脉动变化的空间分布，便于考虑源场的影响，对于研究电性构造的横向不均匀性是更为有效的一种测深方法。干燥岩石的电导率约 10^{-14}～10^{-15} 电磁单位，是地下电导

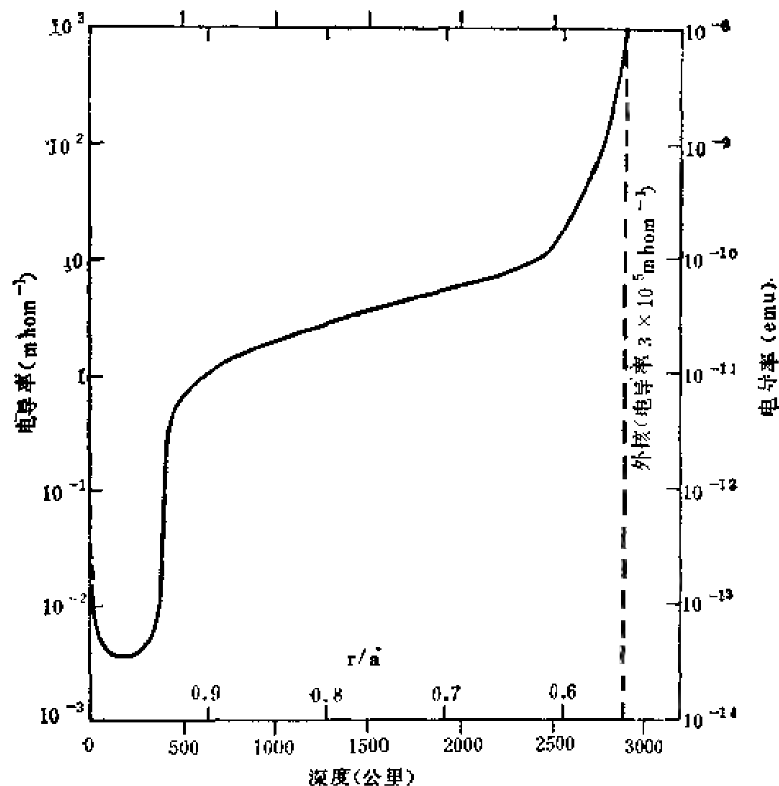


图 7.34 地球内部电导率的分布[1]

率的下限。上地幔计划的大量观测表明，深度 100 公里附近的上地幔顶部电导率约高出周围介质 1 至 2 个量级，约为 2×10^{-12} 电磁单位，与上地幔的软流层相当[27]。地壳和地幔电导率还存在显著的横向不均匀性，这种不均匀性可深达 100 公里以下[28,29]。

获得更深部地幔电导率的信息，多利用较长周期的地磁变化场，例如湾型扰动、S_q 场、磁暴 D_{st} 主相变化。对于此类变化场的电磁感应的研究，最先采用的是均匀地球模型，即最外层为一不导电的球层，厚度为 D，内部为均匀电导率分布。在本章第二节中曾给出了部分结果。现将主要结果综合列于表 7.3。从表 7.3 可以看出，不同作者利用不同类型的变化场所得结果有一共同之处：在深 400 公里左右，电导率有一突然增加（图 7.34），此处可能相当于地幔中的过渡层(即所谓 C 层)。

从表 7.3 还可以发现由 S_q 场和 D_{st} 所得结果的差异。为此，拉希里和普赖斯提出了非均匀球模型[30]，即：

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma=\sigma' & 1>\rho>q,\\ \sigma=\sigma_0\rho^{-l} & q>\rho_\circ\end{array}\right\} \tag{7.229}$$

若取 $\sigma'=10^{-15}$e. m. u, $q=0.94$ ($D=400$ 公里)，得到 $\sigma_0=1.0\times10^{-12}$ e. m. u, $l=11$。这样的结果除适合于 S_q 场外，也能适于湾扰、D_{st} 和 27 天周期变化场的电磁感应结果。班克斯 (R. J. Banks) 近年来又重新计算了各类变化场(包括周期为 11 年的)的电磁感应，获得了最新的结果[31,32]。图 7.34 中的上地幔 (2000 公里以上) 电导率的分布就是基于班克斯的结果绘制的。

由于穿透深度的限制，由外源场的电磁感应无法获得地幔底部电导率的信息。为此，

表 7 3[27]

地磁变化场类型	著 者	D(公里)	σ(e m. u.)	有效深度(公里)	备 注
S_q	卡普曼	250	3.6×10^{-13}	700*	*为一日和半日波的平均
	永 田	400	1.5×10^{-12}	850*	
	永 田	400	5.1×10^{-12}	850*	
D_{st}	卡普曼 普里塞	400	4.4×10^{-12}	1100	
Bay	力 武	260	10^{-13}	320	
	力 武	600	$>10^{-12}$		
11年周期变化	行 武	400	6×10^{-10}	<1500	深度 400～1500 公里时 $\sigma=10^{-1}$ e m u

必须利用本章第二节所述地幔对长期变化的屏蔽效应。麦克唐纳利用如图 7.34 所示模型，得出地幔最底部电导率为 2×10^{-9} e. m. u.，而核幔边界上部 1000 公里附近约为 6×10^{-10}e.m. u.[26]。而柯里 (R. G. Currie)由长期变化场的谱分析得出在地幔底部厚约 2000 公里范围内的平均电导率约为 2×10^{-9} e. m. u.[33]。但应指出，地幔电导率的不确定性可达一个量级。考虑到既使在常温下，固体物质的电导性能仍可有较大的变化，对于深部电导率能确定在一个量级范围内，仍然是了不起的成功。

（二）地幔导电机制

图 7.34 所示地幔电导率的分布，清楚地显示出地幔物质的半导体性质，其导电性能对温度的依赖非常灵敏。纯的半导体内电子的能级如图 7.35a 所示，只有当电子由价电子带 (Valence band) 被激发到更高能级的导电带时，它才具有导电的性能。价电子带与传导带之间的能量间隔为 E_g；对于不纯的半导体，在价电子带与传导带之间将出现新的能级。这个能级在低温下可能被电子占据，成为新的传导带电子的供应者(图 7.35b)，构成电子导电的机制，称为 n 型半导体。新能级与传导带之间的能量差为 E_d；在低温下这个能级也可能是空的(图 7.35c)，成为结合带电子的接受者，当电子进入新能级后，结合带留下空穴，构成空穴导电的机制，称为 p 型半导体，价带与新能级间的能量差为 E_a。纯的和不纯的半导体除在外电场作用下电子移动(或空穴移动)形成电子（或空穴）导电外，

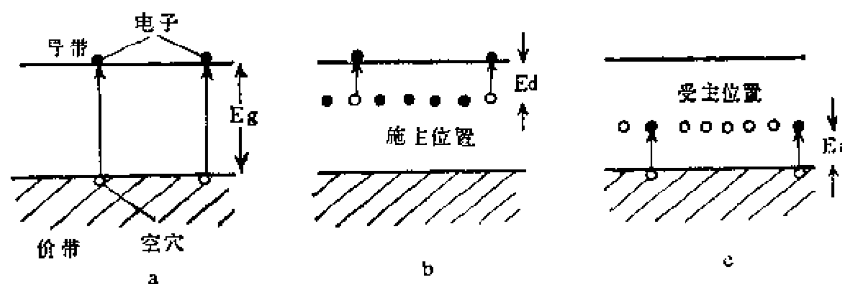


图 7.35 纯的和不纯的半导体电子的能级示意图[17]。
a 纯半导体； b n 型半导体； c p 型不纯半导体。

在高温状态下也能够发生离子的整体移动，形成离子导电。无论纯半导体、非纯半导体或离子导电，其导电性能都正比于荷电离子的数目，而荷电离子数对温度的依赖遵从玻尔兹曼分布。因此三种导电机制对温度有相似的依赖关系，可简单表示为：

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_e + \sigma_3 = \sigma_{i0} e^{-\frac{E_a}{2kT}} + \sigma_{e0} e^{-\frac{E}{2kT}} + \sigma_{30} e^{-\frac{Q}{kT}} \qquad (7.230)$$

其中 σ_i、σ_e、σ_3 分别代表纯、不纯和离子导电机制的电导率；E 为 E_d 或 E_a，Q 为离子的扩散能。

在实验室压力条件下，构成地幔主要成分的橄榄石其 E_g 约为 8 电子伏特 (eV)。这样高的能级在上地幔的温度条件下，电子的激发是很困难的。因此上地幔物质只可能是不纯半导体和离子导电机制。实验发现，直至硅酸盐的熔融状态，离子导电都是有意义的。但对于地幔深部更高的压力条件，离子的扩散能 Q 将增大，离子导电受到限制。一般认为，在下地幔纯半导体的导电机制是主要的。根据外推估计，在地幔底部，$\sigma_{i0} \approx 7 \times 10^{-5}$ e. m. u.，温度 $T \approx 3300°$ K，要达到如图 7.34 所示 3×10^{-9} e. m. u. 电导率的数值，则 E_g 必须小到 4.5 电子伏特。由于在高温高压条件下测定能量 E_g 的困难，在地幔深部 E_g 能否降到如此低的数值还不能肯定。因此地幔深部导电机制的确定还有赖于高温高压实验技术的发展。

实验还表明[27]，当橄榄石在适当压力温度条件下相变为尖晶石时，电导率可增加两个量级。因此图 7.34 所示上地幔 400 公里深处电导率的突变可能是橄榄石相变的结果。

根据岩石矿物导电性能对温度压力的依赖关系可由深部电导率的分布推测地球深部的温度。这是地下电导率的观测和分析在地球物理研究中的另一项重要应用。

（三）地核内部的电导率

和地壳、上地幔情况不同，地核电导率还无法由电磁感应和实验室的直接测定来估算，只能根据实验条件下可能得到的数据外推得出。埃文斯 (R. Evans) 等人提出[34]，地核中电阻率为 $(1\sim2)\times10^{-6}\ \Omega$m。但斯特西指出，$2\times10^{-6}\ \Omega$m 是地核电阻率的最下限，否则将与热流的实际可能值相矛盾。基勒 (R. N. Keeler) 近年做出了 1.4×10^{11} 巴（相当于外核的压力）和 3000° K 的温压条件的瞬时测量，估算得地核电阻率约 3.3×10^{-6} Ωm[27]。虽然至今地核导电性能仍不能最后确定，但斯泰西综合各种数据的分析提出，$3\times10^{-6}\Omega$m ($\sigma = 3\times10^{-6}$ e. m.u.) 仍然是地核电阻率的最佳估计值。

参 考 书 目

[1] Cagniard, L., 1953. Basic theory of the magnero-telluric method of geophysical prospecting, Geophysics, 18, 605—635.

[2] 力武常次，1972.《地球电磁気学》，岩波書店。

[3] 国家地震局兰州地震大队电磁测深组，1976。中国南北地震带北段地壳和上地幔的电性特征，地球物理学报，19，28—34.

[4] Akasofu, S., and S. Chapman, 1972. *Solar-Terrestrial Physics,* Oxford at the Clarendon Press

[5] Matsushita, S., and W. H. Campbell, 1967. Physics of Geomagnetic Phenomena, Acad. Press, New York ad London.

[6] Jacobs, J. A., 1970. *Geomagnetic Micropulsations, Physics and Chemistry in Space,* **1**, Springer-ver-

lag.

[7] Akasofu, S., 1968. *Polar and Magnetospheric Substorms*, D. Reidel Publ. Co., Pordrechit Holland

[8] Akasofu, S., 1977. *Physics of Magnetospheric Substorms*. D. Reidel Publ. Co., Pordrechit Holland.

[9] Filloux, J. H., 1979. Magnetotelluric and related electromagnetic investigations in geophysics, *Revs Geophys. Space Phys.*, 17, 282—294.

[10] Schumuker, U., and J. Jankowski, 1972. Geomagnetic induction studies and the electrial state of the upper mantle, *Tectonophysics*, 13, 233—256.

[11] Parkinson, W. D., 1964. Conductivity anomalies in Australia and the ocean effect, *J. Geomag. Geoelectr.*, **15**, 222—226.

[12] Gough, D. I., 1974. Electrial conductivity under Western North America in relation to heat flow, seismicity and structure, *J. Geomag. Geoelectr.*, **26**, 105—123

[13] Berdichevsky et al., 1976. Deep electromagnetic investigations, *Annales de Geophysique*, **32**, 143—153.

[14] 祁贵仲等，1981．渤海地区地磁短周期变化异常和上地幔高导层的分布，中国科学，7，869—879。

[15] Price, A. T., and G. A. Wilkins, 1963. New methods for the analysis of geomagnetic field and their application to the Sq field of 1932-3, *Trans. Roy. Soc., London, A*, **256**, 31—98.

[16] 祁贵仲，1979．区分局部地磁异常的源场理论，地球物理学报，**22**，66—77．

[17] Chapman, S., 1919. The solar and lunar diurnal variations of terrestrial magnetism, *Phil. Trans. Roy. Soc., London, A*, **218**, 1—118.

[18] Price, A. T., 1950. Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor with a plane boundry, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **3**, 385—410.

[19] Lilley, F. E., and M. N. Sloan, 1976. On estimating electrical conductivity using gradient data from magnetometer arrays, *J. Geomag. Geoelectr.*, **28** 321,—328.

[20] Price, A. T., 1962. The theory of magnetotelluric method when the source field is considered, *J. Geophys. Res.*, 67, 1907—1918.

[21] Gough, D. I., and J. R. Bannister, 1978. A polar magnetic substorm observed in the evening sector with a two-dimensional magnetometer array, *Geophys. J. R. astr. Soc*. **53**, 1—26.

[22] Chapman, S., and A. T. Price, 1930. The electric and magnetic state of the interior of the Earth as inferred from terrestrial magnetic variations. *Phil. Trans. Roy. Soc., London, A*, **229**, 427—460.

[23] Ashour, A. A., 1965. On a transformation of coordinates by inversion and its application to electromagnetic induction in a thin perfectly conducting hemispherical shell, *Proc. London Math. Soc.*, **15**, 557—576.

[24] Ashour, A. A., 1965. The coast-line effect on rapid geomagnetic variations, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 10, 147—161.

[25] McDonald, K. L., 1955. Geomagnetic secular variation at the core-mantle boundary, *J. Geophys Res.*, **60**, 377—388.

[26] McDonald, K. L., 1957. Penetration of the geomagnetic secular field through a mantle with variable conductivity, *J. Geophys. Res.*, **62**, 117—141.

[27] Stacey, F. D., 1977. *Physics of the Earth*, 2nd edtion John Wiley and Sons, Inc.

[28] Gough, D. I., 1973. The geophysical significance of geomagnetic variation anomalies, *Phys. Earth Plan. Int.* **7**, 379.

[29] Gough, D. I., 1973. The interpretation of magnetometer array studies, *Geopnys. J. R. astr. Soc*, **35**, 83—98.

[30] Lahili, B. N. and A. T. Price, 1939. Electromagnetic induction in nonuniform conductors and the determination of the conductivity of the Earth from terrestrial magnetic variations, *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, **237**, 509—540.

[31] Banks, R. J., 1969. Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle, *Geo-*

phys J. R astr Soc, 17, 457—487

[32] Banks, R J., 1972 The overall conductivity distribution of the Earth, *J. Geomag Geoeletr*, **24**, 337—351.

[33] Currie, R. G., 1968 Geomagnetic spectrum of internal origin and lower mantle conductivity, *J Geo Phys Res*, **73**, 2779 2786

[34] Evans, R., and A Jain, 1972 Calculations of electrcal transport properties of liquid metals at high pressures, *Phys Earth Planet Int*, 6, 141—145.

第八章　天然地震及其预测

从现代意义来看，地震学是研究地的震动的一门学问。天然地震固然是地震学的重要研究对象之一，但地震学的研究范围远远不限于此。预测和预防地震灾害对地震学的早期发展无疑起了推动作用。但这个问题比较复杂，当时的一般科学技术水平还不能对这个问题有所突破，所以在相当长的时期，地震预测问题并未取得显著的进展。相反，地震时所发出的地震波或用其他人工方法所产生的地震波却是研究地球内部情况的一个极有效的工具。于是有一时期地震学家的主要注意力便放在地震波的物理学及其应用方面。地震学的这一方面发展得很远，现已成为在生产建设和学术研究上极为重要的一门应用科学。

六十年代以后，情况有了明显的变化。首先，接连几次较大的地震都发生在人口稠密和工业集中的地区，造成严重的伤亡和破坏。1964 年美国阿拉斯加 8.5 级和日本新潟 7.5 级地震，1966 年我国邢台 6.8 级和 7.2 级地震都造成极大的损失。以后几年，我国又连续遭受几次破坏性地震，特别是 1976 年的唐山 8 级地震破坏尤其惨重，死亡了二十四万人。地震预测不仅在我国，也在全世界都成为急待解决的问题。另一方面，国际上地幔计划的完成和板块大地构造假说的提出都加深了人们对地球内部运动过程的认识。地下核爆炸地震监视方法的发展全面提高了当代测震技术的水平并促进了震源理论的发展。解决地震预测的科学和技术条件已渐臻成熟了。现在没有理由再认为地震预测是一个可望而不可及的研究课题，只有待科学工作者的共同努力。

一、地震的一些特征及地震成因

地面是不平静的，总在发生着微小的震动，叫做脉动。脉动的周期可由百分之几秒到几十秒，产生的原因很多，有自然的原因，如天气或气压的变化，海浪对海岸的冲击等等。也有人为的原因，如运输或工业振动等等。地震是在这样的脉动背景上发生的。地震大小相差很远，可小到人们不能感觉，也可大到震撼山岳。天然地震所释放的震动能量可相差十几个数量级。震动的频率范围也很宽。大地震低频成分的周期可达一小时，小地震的高频成分与脉动很难区别。但一般来说，地震的频率主要是在几十赫至几十分之一赫的范围。振幅可小到短于光波的波长。地震的频谱成分和地震的大小有关：地震越大，低频的成分越多。

大地震有时仿佛是突如其来的，造成严重的灾难。唐山大地震就是一例。但许多大地震是有前震或其他前兆的。没有前震或前兆的大地震有可能是因为观测不得其法。中等强度以上的地震之后总有余震，这是因为一大块地层在地震时发生断错，由一种平衡状态转到另一种平衡状态时，必然要经过一个调整阶段。余震就是这种调整的结果，不过这个调整过程的具体物理机制现在还没有弄清楚。

地下发生地震的地点叫做震源。震源在地面上的投影叫做震中。震源其实不是一个点，而是一个区域，所以震中也不是一个点而是一个区域，叫做震中区。地面上震动最利害的地方叫做极震区。极震区常常就是震中区，但因为地面震动的程度和地面的土质条件有关，极震区也可能不在震中区。地震大多数发生在十几公里到几十公里的深度，这叫做浅震。浅震可以浅到几公里深。地震也可以发生在七、八十公里以下，直到七百公里的深度，这叫做深震。破坏性最大的一般是浅震。

地震在全球的分布是不均匀的，但也不是随机的，有的地方地震多，有的地方地震少，但从长时期看，地震活动程度各地虽然大有差别，究竟地球上有无不震之区，还不能给出肯定的答案。地震多的地区叫做地震区。地震区的震中常呈带状分布，所以也叫做地震带。地震带的划分现在还没有公认的定量标准，所以它们的边界多少带有任意性。我国的破坏性地震大都聚集在一定的狭窄地带(图 8.1)。在这些地带内大小地震发生的时间、强度和空间分布都有一些共性，并与地质构造有些关系。按照地震活动性和地质构造特征，可以把我国划分成 23 个强震活动带(图 8.2)。其中，“南北地震带”由滇南的元江往北经过西昌、松潘、海源、银川直到内蒙古磴口；“华北坳陷地震带”由河南安阳往东北经过邢台、北京直到三河；“汾渭地震带”沿着汾河和渭河，是我国文化发达最早的地区，地震历史资料最为丰富。至于其他的地震带、包括众所熟知的“郯庐地震带”，其划分范围，各家有不小的分歧。

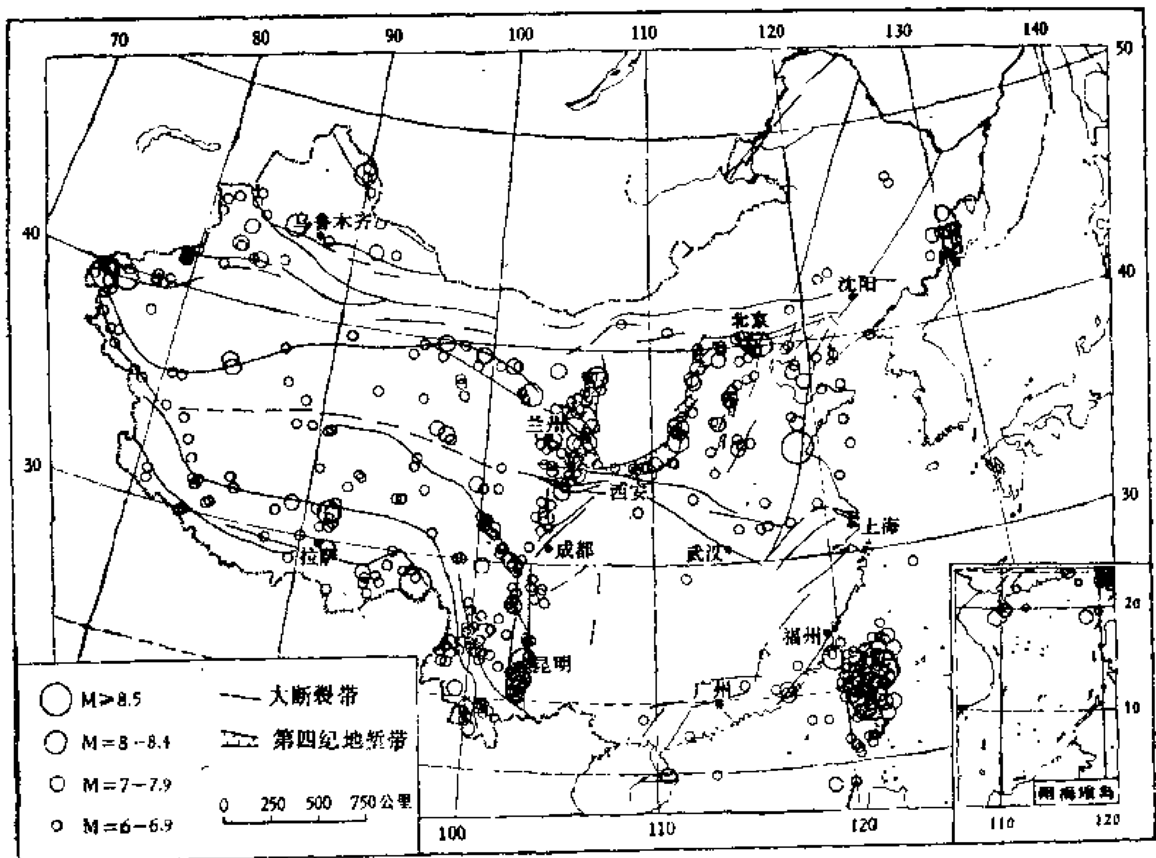


图 8.1 公元前 780 年至公元 1973 年 5 月我国 $M\geqslant6$ 的强震震中分布图

全球性的地震带有三个：环太平洋地震带和阿尔卑斯地震带(即欧亚地震带)是众所熟知的。近年又发现沿各大洋的海岭也有密集的地震活动，但最强的海岭地震不超过 7

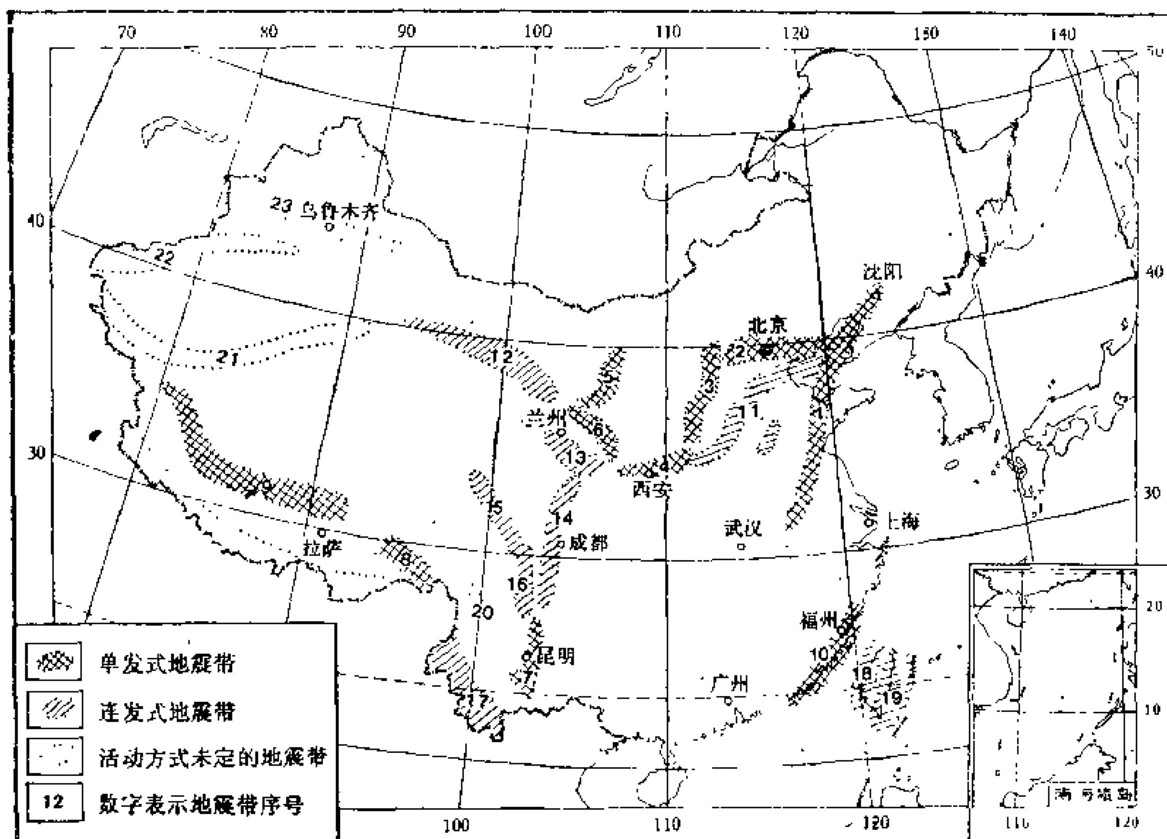


图 8.2 我国地震活动带的分布图

单发式地震带：1.郯城、庐江带； 2.燕山带； 3.山西带； 4.渭河平原带； 5.银川带； 6.六盘山带； 7.滇东带； 8.西藏察隅带； 9.西藏中部带； 10.东南沿海带。
连发式地震带： 11.河北平原带； 12.河西走廊带； 13.天水-兰州带； 14.武都-马边带； 15.康定—甘孜带； 16.安宁河谷带； 17.腾冲-澜沧带； 18.台湾西部带； 19.台湾东部带活动方式未定的地震带； 20.滇西带； 21.塔里木南缘带； 22.南天山带； 23.北天山带。

级。这个带在大洋里蜿蜒八万公里以上，标出了地球上最长的一个破裂带。在一张全球震中图上，这三个带是非常触目的(图 8.3 和图 8.4)。它们与地震的成因显然有关系。

地震在时间上的分布也是不均匀的。全球每年释放的地震波能量颇有起伏。个别地区的地震活动性随时间的变化也很大(图 8.5)。在有些地区，较大地震会在原地点附近重复发生，但时间间隔并不均匀。地震活动是有间歇性的，但并无固定的周期。许多大地震都伴随着地面上可见的断裂，其中有的是新产生的断层，有的是旧断层复活。断层若发生在覆盖层，这也可能是地面震动的结果；但若发生在基岩，这就与地震的成因有联系，所以常叫做地震成因断层。也有些地震并不伴随着地面断裂。根据断层成因假设，这可以解释为断层没有达到地面。这种说法是不严格的。有无不伴随断层的地震呢？还可存疑！

根据上述的现象，我们可以对地震的成因做一些评述。当前比较重要的地震成因假说有以下三个：断层成因说，相变成因说和岩浆冲击成因说，其中以断层成因说最为人所重视。

地震是地下某处在极短时间内释放出大量能量的结果。大块地层的断裂正好起到这样的作用。地下岩石受到长期的构造作用积累了应变能。岩石断裂时，应变能全部地或部分地释放出来，便产生地震。这种地震叫做构造地震。由这种简单的基本概念出发，断

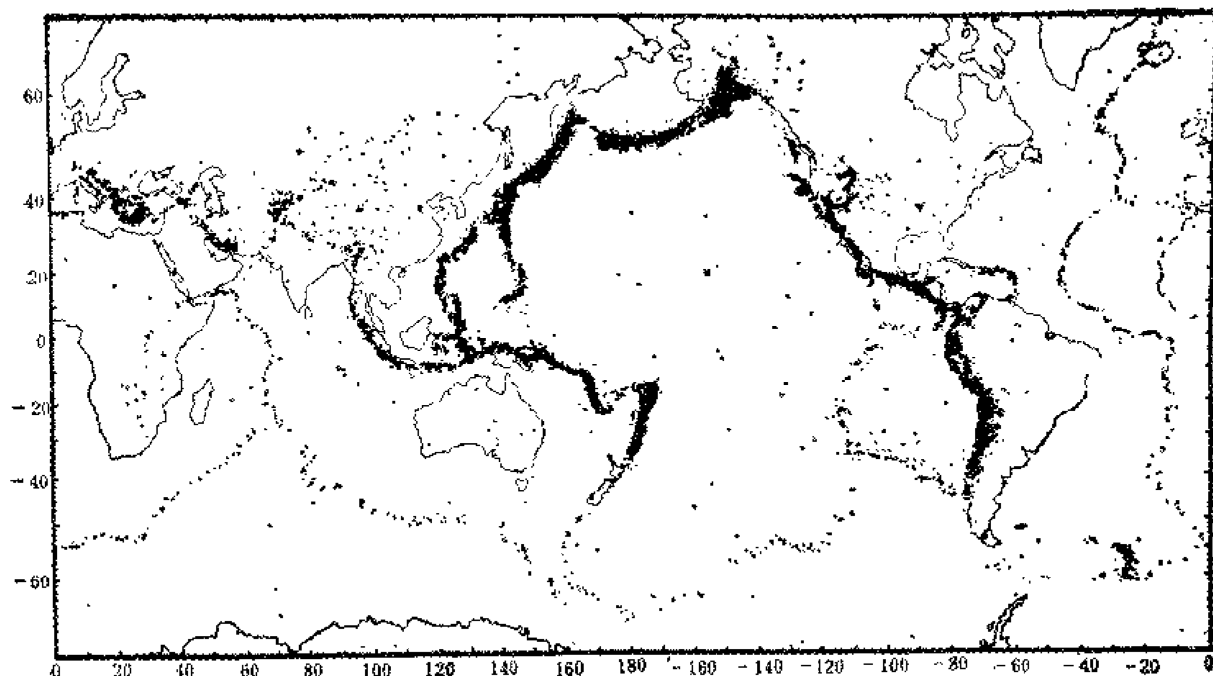


图 8.3　1961—1967 全球地震震中分布图(深度范围 0—100 公里)

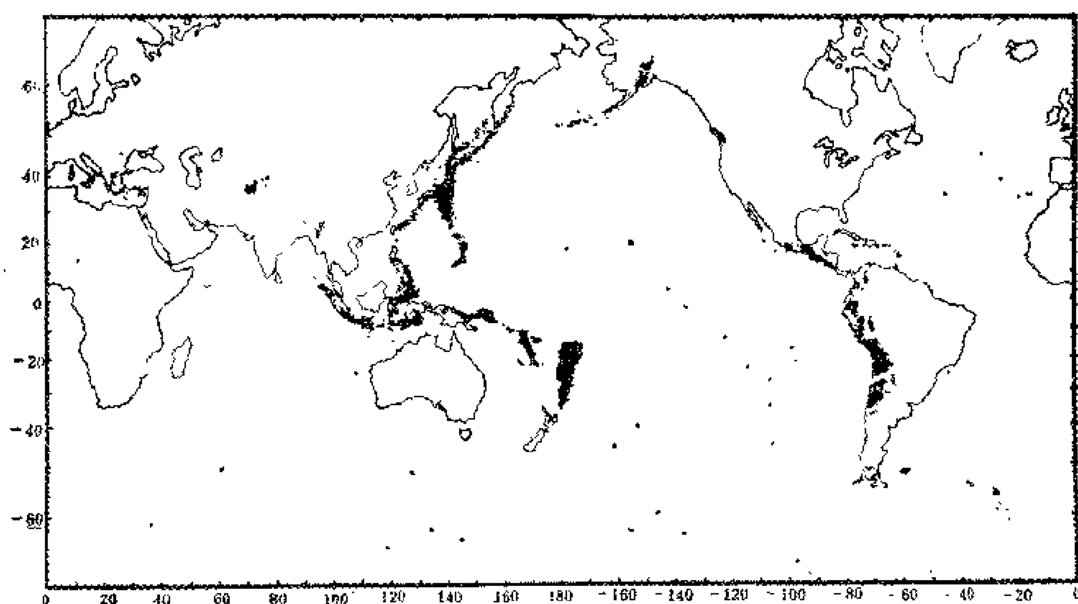


图 8.4　1961—1967 年全球地震震中分布图(深度范围 100—700 公里)

层成因假说已经历了几个发展阶段，即由简单的弹性回跳模式发展到岩石断错理论，又进入到研究震源断裂的物理过程。这些理论将在以后介绍。此处仅指出一个极简单的推论：岩石在一定的外界条件下所能积累的应变能密度是有限的。超过这个限度就发生断裂，至少对于浅层的脆性岩石是如此。一个地区的构造应力场的变化是以地质的时间尺度来衡量的，所以在千百年间可以认为构造应力场是恒定的。即使一个大地震可以改变局部地区的应力分布，但很难想象它可以改变区域性的应力状态。这种情况必然导致以下的结果：首先，应力在某处集中，发生了断裂和地震，释放了相当的应变能以后，断层又

固结起来。应变能又重新积累，以后又发生地震。这就说明了地震的重复性和间歇性。地震发生后，局部地区的应力分布和应力集中的条件难免有所变化。又因为岩石强度各处不同，所以地震的重复时间和发生的地点一般是不相同的。这就说明了地震的非周期性，但原地重复和间隔相近的情况也不是不可能的，不过罕见而已。

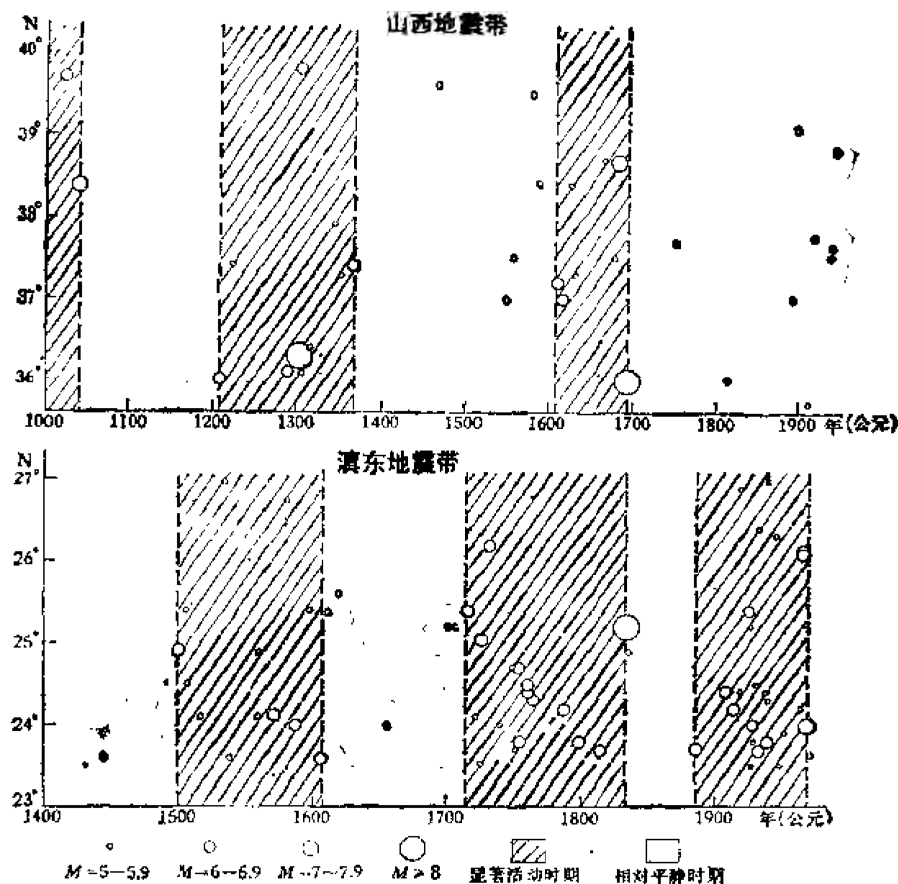


图 8.5 我国山西地震带和滇东地震带的地震活动的时、空、强分布

由此看来，一个地震活动全过程可以显示出四个阶段：应力积累期，活动加速期，能量释放期和应力调整期(图 8.6)。这几个阶段都可以实际观测到，不过在某些地区，不一定四个阶段全都表现得很明显。

在地面以下，温度和压力都是随深度而增加的。岩石在几十公里深度以下的温、压条件下，一般说是不能发生弹性断裂的。于是断层成因假说对于较深的地震就难以解释。相变成因说认为当地下的温度和压力达到一定的临界值时，岩石所含矿物的结晶状态可能发生突然的变化，从而使岩石的体积也发生突然变化。这样就可以产生地震。然而这个假说有一定的困难，因为必须有极大块岩石同时发生相变，然后才可能产生这样的效果，而这是极不可能的。若各处岩石的相变只是次第发生，则只能产生岩层的变形，而不能产生地震。另一方面，地震仪记录到的深地震的初动符号也表现有弹性断裂的迹象，说明深地震也可能是弹性断裂产生的。这一点，自从板块大地构造假说提出后，已得到很好的解释。地震的相变成因说现正失去重要的依据。

岩浆冲击说在日本比较受到重视，因为那个地区的岩浆活动相当普遍，而火山地震也

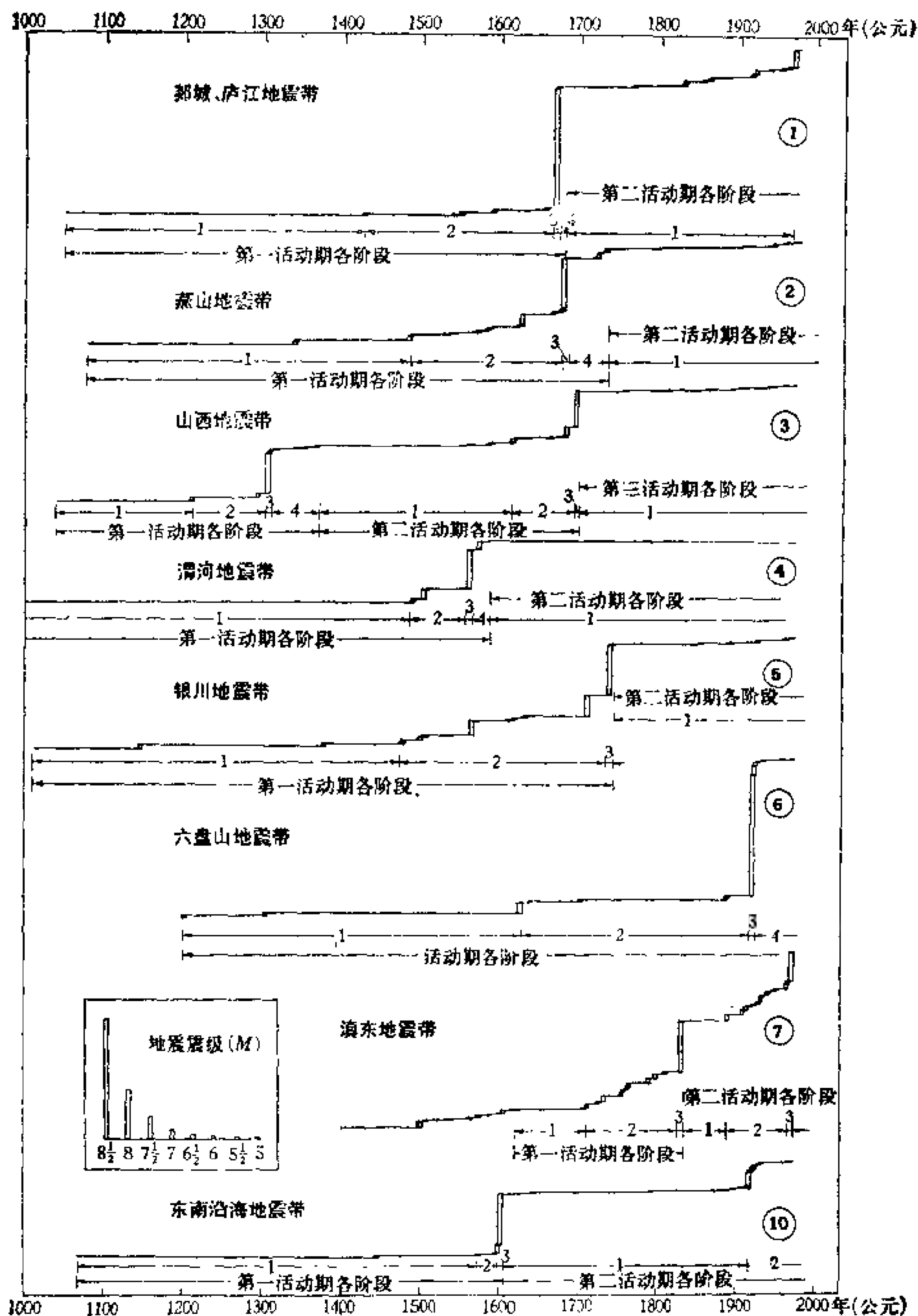


图 8.6 我国一些地震带地震活动的阶段性

纵轴是应变释放量，横轴是时间

可以说是岩浆冲击的一种结果。火山地震一般强度不大。有人认为较大的火山地震其实也是构造地震，不过由火山将其触发而已。断层地震和岩浆冲击的地震有一个基本不同之点：前者是内能的释放，后者则是外力的冲击，但对岩浆触发的构造地震来说，则两种方式兼而有之。岩浆的动能似乎并不很大。无论那种成因的大地震，其所释放的震动能

量主要都来源于岩层的应变能。

根据统计，地球每年所释放出的地震波能量其数量级约为10^{25}尔格，设地震波能量占地震总能量的百分之一，则地球每年由于地震所消失的能量其数量级约为10^{27}尔格。但地球每年仅由放射性物质衰变所产生的能量至少比这个数值高一个数量级。所以地震的能源不难解释。地球不是僵死的。它不但受日、月的外力作用，而内力也在发展，因此产生各种运动。地球形状和重力场的观测表明地球内部不是处于流体静平衡状态，而是存在着应力差，即是说，存在着剪切应力，所以发生地层断裂和其他地质构造运动的条件是存在的。但是这个应力差在地球内部怎样分布及其产生的机制仍很不清楚。所谓的"力源"问题，在地学中还是一个很有争论的问题。许多作者曾提出过一些定性的假说，但都经不起定量的考验。如果说地震的基本成因是由于板块构造运动，那么后者的力源也还是一个尚未解决的问题。

二、地震的强度

表示地震的强弱有两种方法：一种是表示地震本身的大小，它的量度叫做震级。震级是地震固有的属性，与所释放的震动能量有关系，但与观测点的远近或地面土质的情况无关。另一种是表示地震影响或破坏的大小，它的量度叫做烈度。烈度不但与地震本身的大小有关，而且与观测点的距离、土质情况、建筑物的类型等等都有关系。震级和烈度都是表示地震强弱的，但概念不同，且时常混淆。

地震的影响可表现在人的感觉、器物的动态、建筑物的损坏情况、自然环境的变化等等。少数人感到地动与许多人惊逃户外，吊灯摇摆与桌椅翻倒，粉墙上发生裂纹与山墙倒塌，土地上出现裂缝与山石劈裂等等，它们所反映的地震强度显然是不同的。这些现象都是可以在地震现场直接调查，无须借助于精密的仪器。它们叫做宏观现象。将易见的宏观现象按照它们所反映的地震强度分成若干类，每类中的现象都反映差不多相等的强度，因而可以叫做等效的。按照强弱的顺序，每类可以指定一个数字，这就是烈度。将反映不同烈度的宏观现象按照烈度的顺序分类，列成一个表，就叫做烈度表。一个地震发生后，调查者可对照烈度表中的现象在现场确定各地点所反映的烈度。烈度是随地而异的。在地图上，将烈度相同的地点用曲线连起来，这就构成一个等震线图。等震线的间隔一般是一度。应指出，烈度是根据现场的宏观现象而估定的。它是一个定性的描述，而不是一个精确的物理量。若能将烈度估定到半度就已经很不错了，写出更精确的数值，实际上是没有意义的。在抗震设计中，时常需要更精确的物理量。然而这必须用仪器去测量，不是宏观的现场调查所能做到的。根据等震线的形状，有时对震源断层的取向和产状得到一些启发；根据等震线间隔的疏密，有时可以估计震源的深度。这只是在极简单的地质情况和地震不大时，才是可能的。

烈度表从十六世纪就开始有人用。起初很简单，以后逐渐详细，包罗的现象也越来越多。现在国际上最通用的烈度表共分 12 度(十度和七度的表仍有人用)，即是说，可以将地震的影响由不用仪器所能感到的最轻微的地动直到最严重的山崩地陷，分成 12 个等级(表 8.1)。因此烈度的最小值是零，最大值是 XII。它也不可能有负值。在这一点上，烈度与震级是不同的。

表 8.1 修订的麦加利（G. Mercalli）烈度表

I	除少数在特别有利条件下的人感觉外，一般均无感觉
II	只有少数静止的、特别是在高楼上的人有感觉。精密悬挂物可能摇动
III	户内的、特别是住在高楼上的人显著地感觉，但许多人不知道这是地震。停着的汽车有轻微的摇动。有像载重汽车驶过那样的振动。可以估计振动的持续时间
IV	白天户内许多人感觉，户外很少人感觉。夜间有些人被惊醒，碟子、窗户、门摇动、墙壁裂隙作响。有像载重汽车驶过那样的感觉。停着的汽车显著地摇动
V	几乎每个人都感觉，许多人惊醒。有些碟子、窗户等破裂；涂墙泥有少量拆裂；不稳的物体翻倒。有时可看到树木、电线杆和其他高物体的摇动。钟会停摆
VI	所有人皆感觉；许多人惊逃户外。有些重的家具移动位置；墙上泥灰有少量脱落，或有少数烟囱被损坏。一般损坏轻微
VII	人人惊逃户外。设计和建造良好的房屋损坏不大；普通的建筑物有轻微到中等程度的损坏；设计和建筑较差的建筑物有相当大的损坏；有些烟囱破裂。正在驾驶汽车的人可以感觉到
VIII	特别设计的建筑物有轻微损坏；一般坚固程度的建筑物有相当的损坏，并有部份坍塌；不良结构的建筑物则损坏很大。建筑骨架间的填垫物被抛出。烟囱、工厂的烟道、石柱、石碑、墙都倒塌。很重的家具翻倒。喷出少量的沙和泥浆。井中的水有变化。正在驾驶汽车的人有不安的感觉
IX	特别设计的建筑物有相当程度的损坏；良好设计的建筑骨架歪斜；坚固的房屋损坏很大，并部分坍塌。许多房屋从地基上移开。有显著的地裂。地下管道破裂
X	一些建筑良好的木结构被毁；大多数石造建筑物和建筑骨架连同地基均被毁坏；有很厉害的地裂。铁轨弯曲。在河岸和陡坡上有相当程度的塌方。沙和泥浆移动。水漫出堤岸
XI	即使有的话也只留下个别石造建筑物。桥梁毁坏。地面出现宽阔的裂缝。地下管道完全不能使用。在潮湿的土中出现地陷和塌方。铁轨剧烈地弯曲
XII	全部被毁。地表面上出现可见波动。视线和水平线歪曲。物体被抛向空中

烈度主要是反映地震所造成的破坏情况；这对于采取抗震措施是很有用的；但烈度不能完全地反映地震本身的大小，而地震本身的大小却是研究地球的构造运动和能量释放的极重要的数据，所以对此也必须有一种量度。1935 年，美国的里克特(C. F. Richter)在研究南加州浅源地方性地震时，发现这样一个事实：若将一个地震在各不同距离的台站上所产生的地震记录的最大振幅的对数 $\log A$ 与相应的震中距离 Δ 作图，则不同大小的地震所给出的 $\log A \sim \Delta$ 图都相似，并近似的平行。对于 A_0，A_1 两个地震，有 $\log_{10}A_1 - \log_{10}A_0 =$ 与 Δ 无关的常数。

若取 A_0 为一标准地震的最大振幅，则任一地震的地方性震级 M_L 可以用上式来定义，即

$$M_L = \log_{10}A - \log_{10}A_0 \tag{8.1}$$

A 是任一地震的最大振幅，A 与 A_0 必须在同一距离用同样的地震仪测得。标准地震的选

取原是任意的，但最好是能使一般的地震震级都是正值，因而 A_0 不宜太大。里克特所选的标准地震是在 $\Delta = 100$ 公里处记录到的地震波水平分量最大振幅为 $A_0 = 1$ 微米（所用的仪器是伍德-安德森扭力地震仪，其常数为：摆的固有周期 $T_0 = 0.8$ 秒，放大率 $V = 2800$，阻尼常数为 0.8）。若以微米为测量单位，则在 $\Delta = 100$ 公里时，$\log A_0 = 0$，$M_L = \log A$ 所以 M_L 也可以定义为：用以上的标准仪器在 $\Delta = 100$ 公里处所测得的最大振幅（以微米计）的常用对数。若不在 100 公里处测定，则须根据 $\log A_0 \sim \Delta$ 曲线，这个曲线叫做标定曲线，是由实测数据整理出来的。

以上定义需要有几点说明：①地震波的振幅和震源深度有关系，但在南加州的地震深度一般都在 16 公里上下，变化不大，可以看成一个常数。②近震的振幅和观测点的方位有关系。为了取得一致的结果，最好取不同方位台站所得结果的平均值。③各台站下面的地质情况不同，也影响地震记录的振幅。根据许多地震的观测，可以对每个台站给定一个校正值。④近震的最大振幅并不相当于一定的震相，可以是 S，也可以是面波，随距离而不同。由于以上这些原因，震级只是一个粗略的经验数值，并不很精确。不过多年实践证明，用震级来划分地震的大小还是相当一致的，这是因为震级是一种对数标度，振幅测量的误差对于 M_L 数值的影响不大，即使如此，天然地震的大小如此悬殊，以致最大的地震，震级接近于 9，而最小的地震，震级可以小到 -3 以下。

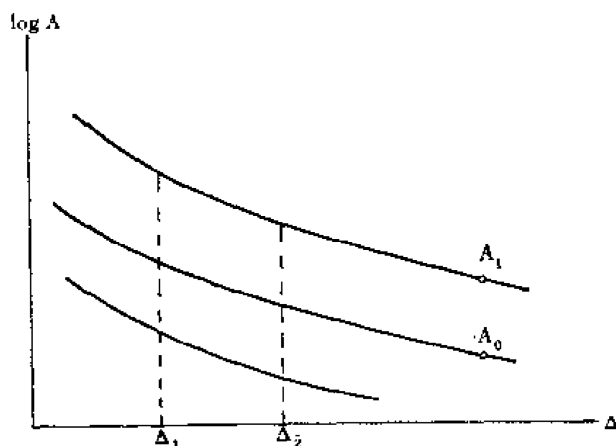


图 8.7

1945 年，以上测定地方震级 M_L 的方法被古登堡（B. Gutenberg）推广用于远震。在远震的地震图上，最大的振幅是面波。对于 $\Delta > 2000$ 公里的浅源地震，面波水平振幅最大值的周期一般都在 20 秒左右。古氏的公式是

$$M_S = \log_{10} A + B(\Delta) \tag{8.2}$$

$B(\Delta)$ 是零级地震的标定曲线。M_S 称为面波震级（有时只写 M，不用脚标）。上式虽不含波的周期 T，但实际意味着周期必须在 20 秒左右。为了便于应用其他周期的波，以后的研究多采用以下的公式：

$$M_S = \log_{10}(A/T)_{\max} + 1.66\log_{10}\Delta + 3.3 \tag{8.3}$$

式中的 A 是地动的振幅，以微米计（注意：在测定 M_L 时，A 是记录图上的振幅），Δ 是震中距离，以度计。此式与古登堡原来的公式，当 $T = 20$ 秒时，相差不多。

对于深源地震，面波不发育。古登堡采用体波（P. S. PP）来定震级，其公式是

$$m = \log_{10}\left(\frac{A}{T}\right) - \log_{10}\left(\frac{A_0}{T_0}\right) \tag{8.4}$$

A_0 和 T_0 是零级地震的地动振幅和周期。由于体波的振幅随深度的变化是可以粗略计算的，古氏计算了不同震相在不同深度的标定值，从而可以计算 m（m 有时也写成 m_b）。m 称为体波震级或统一震级。m 与 M_s 是不同的。

由于震级是由地动振幅所确定的，我们可以期望震级和地震波能量 E 有一定的关系。假定地动是简谐的，则 E 正比于 A^2，于是得 $\log_{10}E = a + 2M$ 式中的 a 是一个常数。不过这个关系并不准确，因为地震大小不同时，其能量在各波段上的分配也不同，而地震越大时，长波的能量越多。另一方面，定震级时常用最大振幅，而这段运动远不是简谐的。由于这些原因，上式中，M的系数是靠不住的，但是我们可以采取以上的函数形式，即是说，令

$$\log_{10}E = A + BM \tag{8.5}$$

A 和 B 是两个待定常数。由地震的记录可以定 M，也可以算 E。于是就可以由许多地震的记录图来确定最佳的 A 和 B 值。现在最通用的数值是 $A = 11.8$，$B = 1.5$，即

$$\log_{10}E = 11.8 + 1.5M \tag{8.6}$$

E 以尔格计，M是面波震级。

应当指出，震级的概念并不是很精确的，含有M的各种关系式也都是一种经验关系，然而震级这个概念却对地震学的发展起了极大的推动作用。此处只对震级作了一般的介绍而略去细节。不过震级概念的精确化现在仍是一个引人注意的问题。

三、地震的长期预测

地震是地下发生的一个物理过程。地震预测是在特定地质条件下的一个物理问题。绝大多数的破坏性地震是由岩层的大规模断裂产生的，但岩层断裂的物理机制现在还研究得不够。根据地质调查，可以圈出地表层潜在的构造活动地区，但由于地壳岩石的不均匀性，在长期的构造应力作用下，活动区的断裂发生地点和时间，必定带有一定的随机性，很难由野地调查来确定。由于这些原因，预测地震时，地质的、统计的和物理的因素都应考虑，但最基本的是地震形成的物理过程。

地震是地质构造运动的一种表现，所以应当发生在现代构造差异运动最强烈的地区。首先应在剪切应力表现最明显的地区。这种地区包括：活动的大断裂地带，不同大构造交界的地带，不同大断裂交汇的地带，地层运动的速度变化最大的地带等等。地震地质方法是预测地震活动地点的宏观方法。它的任务是寻找地震活动的地质标志，但由于地质的时间尺度太粗，预测地震发生的时间还必须借助于其它的方法。

利用考古和历史记录资料是另外两种宏观预测的方法，虽然应用时在地区上很受限制，但时间尺度比地质方法小多了。另一方面，必须根据历史的记述，宏观的地震活动才能有一个明确的强度概念。这样，综合解释地质，考古和历史地震的资料，可以大面积地划分不同程度的地震危险区，这种工作叫做地震区划。地震区划对于地震在不同地区可能发生的最大强度有所估计，但给不出可靠的地震发生时间。虽然如此，地震区划对于长远的建设规划仍是极有意义的。

由于地震的发生带有一定程度的随机性，所以可用数理统计或相关分析的方法从大量观测资料中寻找可能存在的趋势性规律，并据此估计地震的危险性。统计的对象常常是大小地震发生的时间序列，活动的重复率或与地震有关的各种参数。相关分析的范围更广，凡是怀疑对地震有前兆作用的现象都可以去做相关分析。但是，这里必须采取科学常识的判断和严格的统计检验，否则会导致虚幻的结果。统计方法只能给出统计性的结

论或概率，不能给出确定性的结果。这种不确定性来自方法本身，不是一个精确度的问题。统计结论来自所谓"大数法则"，它的可信程度决定于观测数据的多少和质量。没有足够多和足够好的观测数据，应用统计方法是不现实的。

长期预测并非全是统计性的，也有一些确定性的方法，如地面变形、震中迁移、气候的变化等等，每种方法都有成功的例子，但失败的例子，极少见诸记录。

四、地震的短期预测

地震不可能是一个孤立的现象，它是一个物理过程中的特定事件。认识了这个过程，就可以选择在这一事件之前任何其它事件做为前兆来预测地震。这样的做法是求解一个"正问题"，但可惜这个过程现在还很不清楚。我们只能根据现有的观测和实验结果假定这个过程的一些模式，推导这个模式所能引起的后果，然后通过实践检验来修正这个模式。另一种做法是求解一个"反问题"，即是说，选取某些可能是前兆的现象，从实践中验证它们是否和地震有联系。如果有，就从多次观测中，找出这个现象与地震之间的经验关系，并据此以做预测。可惜的是，怎样识别一个可能的前兆，现在还无明确的方法。现在正在检验的前兆现象至少有几十种，但明确无误的前兆现象还未发现。试用的方法可以分成两大类：测震的方法和其它的方法。

测震的方法是利用现在和以前地震的观测来预测将来的地震，也叫做以震报震。因为小地震并不是预测的对象，但小地震和破坏性的大地震往往有关系，因此就有可能通过观测小地震来预测大地震。利用地震仪的记录不受距离的限制，所以观测点不一定要在未来的震中区(这是不知道的)。这类方法很多，包括分析大小地震的时空分布、大小地震的关系(如果有的话)、地震波速的变化、地震图上任何特殊信号的分析等等，目的是寻找大地震将要到来的标志。例如，小震密集也许是大破裂之前小破裂增多所造成的，因而是一种前兆。如果某地区的小震特别平静，也许是因为那个地区的岩石强度特别大，但其边缘仍可能发生小破裂。这就在地面上形成一个地震空白区，如果应力积累的条件不变，这就意味着地震空白区反而有更大地震的危险性。以上两种相反的结论显然和地区的地质情况有联系。有时在大震之前，小震会有特殊的空间分布(如呈条带状等)。对于地震序列的预测，常用的方法有统计分析，蠕变曲线，b 值的变化等。

三十年代以前，就有人提出：地震波速的变化可能是一种前兆，但因波速测定的精确度很低，没有得到有意义的结果。到了七十年代，才有人用波速比值(V_P/V_S)的变化，做出几次预测。他们发现，在有些地震之前的一定时间内，这个比值一度下降，但以后又回升；当回升到正常比值或更高一些的时候，就发生地震。这个方法在某些地区曾取得有限的成功，但是否能在各处通用，还有待考验。

除了有关测震方面的现象外，有许多别的现象也曾作为地震的前兆而加以考验，但它们的科学根据大有差别，其中地面形变、地下水和水氡都取得过较好的效果，其它的方法就比较差了。

五、地震成因模式

反问题只是预测地震的一个方面，在一定程度上起到了预防的效果，但也引起一些副作用。要更好地解决问题，还必须同时研究正问题，即是说，从一定的理论前提出发，找出一个地震发生的模式。从这个模式，推导可能的前兆和不同前兆之间的关系。

模式不是来源于虚构的假设，而是由实践所启发而又可以由实践来验证的。模式至少有两个目的：①经验关系的有效范围决定于用以确定这个关系的数据。在这些数据变化范围之外，就必须外推；外推就必须根据某种模式来指导。通常几乎全是用直线外推，这是很靠不住的。②前兆出现的方法不一定表现为某一单纯物理量的变化，而更可能是几种物理量的综合。综合不等于简单的迭加。如何恰当地综合，必须借助于模式。

为了解释波速比的变化，美国人提出这样一个模式：当岩石中的应力达到一定程度时，岩石在沿应力方向上会发生微破裂，因而使体积膨胀，这种现象叫做微裂膨胀，或简称膨胀（dilatancy）。发生膨胀后，岩石中的波速就下降，但 P 波的速度下降得比 S 波快，因而波速比 V_P/V_S 减小。岩石在发生微破裂后，由于摩擦阻力，还不能错动，但此时若有水扩散到微裂缝里，则岩石强度加大，波速比又回升，直到岩石中的孔隙压力增到一定数值，岩石中的切应力胜过摩擦力和抗剪强度，便发生断裂错动，造成地震。这个震源产生的模式叫做膨胀-扩散模式。它很强调地下深处水的扩散作用。根据这种模式，地面上所观测到的其他前兆，如地形变、电阻率、水氡等，也将带有一定的形态和顺序。苏联人在解释波速比变化时所采用的模式与此不同。他们假定岩石中总是存在着均匀分布的微裂缝，当构造应力缓慢增加时，裂缝的数目和尺寸起初只缓慢地增加，但到达一定程度时，便加速地发展，此时岩石的力学性质也就起了变化。应力继续增加时，裂缝的数目和尺寸就在一个比较狭窄的区域内急剧地发展而形成一个不稳定带，应力继续增加时，这个带就崩溃而产生地震断层。这个模式并不要求水的介入，但也可以解释所观测的波速比变化。根据这个模式，地面上所产生的其它前兆与前一模式所产生的，在形态及顺序上将有所不同。在第十一章的末尾，将比较详细地述及。还有一些其它的地震成因模式，就不一一列举了。当前的情况是，所有的模式都在相当程度上含有未经证实的假设，它们都需要更多的实践去考验。

第九章　地震波的传播

从字面上讲，地震学就是研究地震的科学。到现在为止，人们对地球内部的了解主要来自地震学，因为人们不能直接达到地球内部，只能靠（天然的或人工的）地震激发的地震波来研究它。因此，地震学还包括对天然或人工震源所激发的地震波的研究以及对所有能从地震波传播得到的有关震源和地球的性质的研究。

当地震发生时，从震源辐射出各种类型的波，有些波通过地球内部传播，有些沿着表面传播。从这些波的走时或频散性质，可以确定地球内部的波速和深度的关系。在波传播过程中，在一些界面要发生反射和折射，于是，这些界面的位置和性质就可以借助于这些波的走时或振幅等特性加以确定。地震台记到的地震波的性质还可以用来推断震源的性质——震源机制。通过对震源机制的研究，可以进一步了解到产生这种机制的应力状况。最后，如果地震相当大，以至地球作为一个整体被激发起各种振型的振荡。地球振荡的性质和它的内部结构有关。研究大地震所激发的地球的振荡可以了解地球内部的性质。

我们将在本章和下一章讨论地震波的传播及地球的振荡问题。在讨论这个问题时，简单地把地球介质当作是分层均匀、各向同性和完全弹性的连续介质。诚然，地球内的岩石含有晶体，而晶体由于其特殊的规则的结构，它的弹性显示出某种程度的对称性，但通常不是各向同性的。但是，可以想见，在一块大到足以包含许多晶体的岩石中，如果晶体在所有方向上的取向是杂乱无章的，那么在不同方向上岩石弹性性质的差异大部分将相互抵消掉。所以，在地震学里，一般情况下可以假定地球介质是各向同性的。在某些特殊情况下，例如在地球的表面区域，晶体的取向可能是有一定规则的。此时就不能再用各向同性的假定，而必须处理地震波在各向异性介质中的传播问题。

经验表明，除了地表层外，在不同地层中，岩石的性质是不同的，在同一地层中，岩石的不均匀性对于地震波的影响并不显著。因此，我们可以认为在同一地层中岩石的性质是均匀的。

地震波的传播速度很高，约每秒几公里，当它通过某一部分介质时，时间极为短促，以致介质的非完全弹性来不及表现出来。因此，对于持续时间很短暂的地震波来说，地球介质主要表现出完全弹性的性质。

上述情况说明，在地震波理论中，把地球介质当作均匀、各向同性和完全弹性介质来处理，只是一种简化的假定。实践证明，这种假定可以使分析大大简单，并且在多数情况下可以得到与观测结果颇为符合的结果。自然，当上述假定偏离实际情况时，我们也还需要研究介质的不均匀性、各向异性和非完全弹性对波传播产生的效应，不过，目前我们暂不讨论它们。

一、弹性理论

(一)应力分析

1.体力和面力

作用在物体上的力分成两类。一类叫体力，一类叫面力。现在考虑图9.1所示的直角坐标系 $x_i(i=1,2,3)$ 中占据区域 R 的物体内的任意一个封闭的区域 V。P 是 V 中的一个点，δV 是在 P 点的体积元。作用于 δV 的总的体力 $\tilde{F}_i$（例如重力）是由物体以外的源引起的。如果 $\lim\limits_{\delta V\to 0}\tilde{F}_i/\delta V$ 这个极限存在并与 δV 无关，我们就把它定义为作用于 P 点的单位体积的体力，记为 F_i

$$F_i=\lim_{\delta V\to 0}\tilde{F}_i/\delta V \tag{9.1}$$

面力是通过物体任意表面(包括界面)而作用的力。它们是由邻近质点的相互作用而产生的。图9.2中的 S 是 V 内的一个面，P 是其上的一个点，δS 是包含 P 点的面积元。我们把 S 的一边记为"+"，另一边记为"－"。"+"的那边的质点作用于"－"的那边的质点的面力等效于作用于 P 点的一个单力 $\tilde{P}_i$ 和一对力偶 $\tilde{G}_i$。我们定义在 P 点"+"边的质点

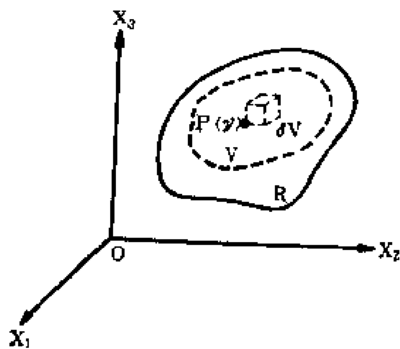


图 9.1　物体 R,闭合体积 V 和点 $P(\boldsymbol{r})$

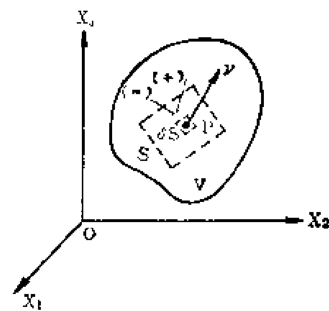


图 9.2　面 S 和包含了 P 点的面积元 δS

通过 S 作用于"－"边的质点的单位面积的力为应力矢量 P_i:

$$P_i=\lim_{\delta S\to 0}\tilde{P}_i/\delta S \tag{9.2}$$

一般情况下，这个极限是有限的、有意义的，它和位置及其作用平面的取向有关，即:

$$P_i=P_i(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\nu}) \tag{9.3}$$

$\boldsymbol{\nu}$ 是曲面 S 在 P 点的外法线，即以由"－"边指向"+"边的法线为正方向。所以，我们把它叫作在 P 点作用于方向为 $\boldsymbol{\nu}$ 的面上的应力。

作用于 P 点的力偶和 δS 之比是关于 δS 的线度的一级小量，当 δS 趋于零时这个比值趋于零。因而这对力偶通常可不予考虑。

2.应力张量

通常，P 点的应力随所考虑的小面积单元的法线方向 $\boldsymbol{\nu}$ 的不同而改变，而且一般与 $\boldsymbol{\nu}$ 成一角度。为了完整地说明 P 点的应力，就得给出 P 点处作用于该点的所有平面上的曳

引力。然而，我们将证明，所有这些曳引力都可以变换成作用在与坐标平面平行的平面上的曳引力分量。作用在每一个与坐标平面平行的平面上的曳引力，都可以分解为平行于坐标轴的三个分量。这样，用九个分量就可以确定一点的应力。

取两个直角坐标系，其坐标轴分别记以 1，2，3 轴和 1′，2′，3′ 轴基矢量分别记以 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_{k'}$。考虑包含 P 点在内的一个小四面体(图 9.3)，其三个面的内法线分别与 1，2，3 轴一致，而第四个面的外法线与1′轴一致。与四个面相应的面积分别为 $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$ 和 $\delta S_{1'}$。以 p_{ij} 表示作用于和 i 轴垂直的面上的应力在 j 轴上的分量，以 $a_{ij'}$ 表示 i 轴与 j' 轴之间夹角的余弦。小四面体在体力(如重力)、界面上的曳引力和构成物体的质点的惯性作用下是平衡的。以平行于 2′ 轴的分量为例。除面力以外，其它力均与四面体体积成正比。因此，若以 l 表示四面体的线度，则

$$\begin{aligned}
p_{1'2'}\delta S_{1'} &- p_{11}\delta S_1 a_{12'} - p_{12}\delta S_1 a_{22'} - p_{13}\delta S_1 a_{32'} \\
&- p_{21}\delta S_2 a_{12'} - p_{22}\delta S_2 a_{22'} - p_{23}\delta S_2 a_{32'} \\
&- p_{31}\delta S_3 a_{12'} - p_{32}\delta S_3 a_{22'} - p_{33}\delta S_3 a_{32'} = O(l^3),
\end{aligned}$$

两边除以 $\delta S_{1'}$，并令 $l \to 0$ 得：

$$\begin{aligned}
p_{1'2'} &= p_{11}a_{11'}a_{12'} + p_{12}a_{11'}a_{22'} + p_{13}a_{11'}a_{32'} \\
&\quad + p_{21}a_{21'}a_{12'} + p_{22}a_{21'}a_{22'} + p_{23}a_{21'}a_{32'} \\
&\quad + p_{31}a_{31'}a_{21'} + p_{32}a_{31'}a_{22'} + p_{33}a_{31'}a_{32'} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i1'}a_{j2'}p_{ij}
\end{aligned}$$

对于法线方向为 k' 的小面积上的应力在 l' 方向上的分量应有类似的结果。于是

$$p_{k'l'} = a_{ik'}a_{jl'}p_{ij} \tag{9.4}$$

这里，采用了哑指标下的求和约定，即如果在某一项中某一下角标出现两次，就等于该下角标依次取 1，2，3 的值而后将其相加。

因此，用有 9 个分量的 p_{ij}(它与任一特定的点和时刻有关)就可完全确定通过 P 点任一小面积的应力。这 9 个分量 p_{ij} 构成了 P 点的应力张量。

3. 应力张量的对称性

考虑一个通过 P 点的小平行六面体，其三边 PA, PB, PC 分别平行于 1，2，3 轴，长度为 $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$。

由图 9.4 可见，作用在平行于 Ox_1 轴的截面 $PADC$ 的应力在 1 方向的分量为 $-p_{21}$，但这个应力分量对 PC 轴的力矩为零。作用在 $BFEG$ 的应力在 1 方向的分量为 $\left(p_{21}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}\delta x_2\right)$，它对 PC 轴的力矩为$-\left(p_{21}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}\delta x_2\right)\delta x_1\delta x_2\delta x_3$。略去高次项，则为 $-p_{21}\delta x_1\delta x_2\delta x_3$。而在垂直于 Ox_1 轴截面上的应力对 PC 的合力矩为 $p_{12}\delta x_1\delta x_2\delta x_3$。其余的力(包括体力和惯性力)对 PC 的合力矩均为高次项。由此推得 $p_{12}=p_{21}$。类似地有 $p_{23}=p_{32}$ 及 $p_{13}=p_{31}$。所以对所有的 i, j 有：

$$p_{ij} = p_{ji}, \tag{9.5}$$

即应力张量是对称张量，其中 9 个分量只有 6 个是独立的。

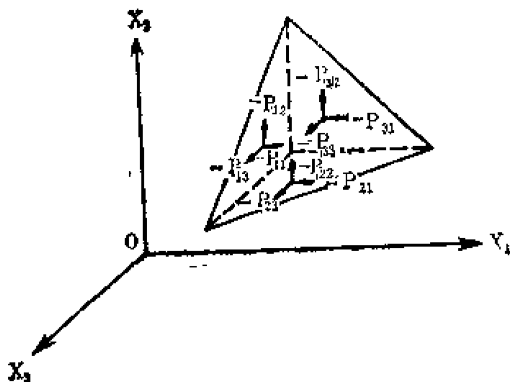


图 9.3 作用于小四面体上的力

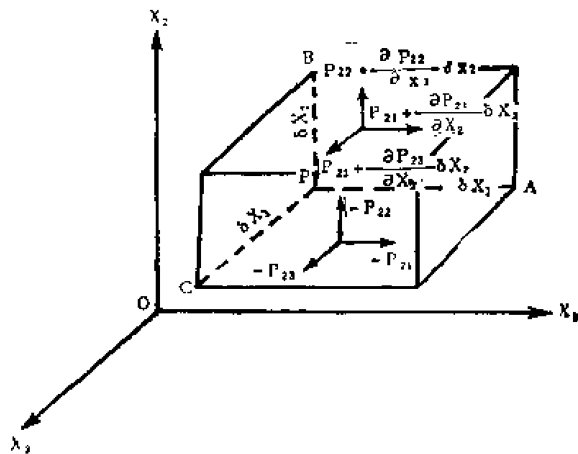


图 9.4 应力张量的对称性

4. 克朗内克(Kronecker) δ

以后,我们常常要用到一个二阶张量 δ_{ij},叫克朗内克 δ。这个张量是:

$$\delta_{ij}=1,\quad 若\ i=j;\qquad \delta_{ij}=0,\quad 若\ i\neq j。\tag{9.6}$$

容易证明,克朗内克 δ 当坐标变换时是保持不变的。因为

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j&=\delta_{ij}a_{ik'}\boldsymbol{e}_{k'}a_{jl'}\boldsymbol{e}_{l'}=\delta_{ij}a_{ik'}a_{jl'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{l'}\\&=a_{ik'}a_{il'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{l'}=a_{k'l'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{l'}=\delta_{k'l'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{l'}\end{aligned}\tag{9.7}$$

最后一步中运用了 $a_{k'l'}=\delta_{k'l'}$ 的性质。

δ_{ij} 和任一个任意阶张量的点乘仍等于该张量:

$$\delta_{ij}T_i=T_j,\tag{9.8}$$

其中 T_i 的下脚标 i 是任意一个张量 **T** 的分量的头一个下角标。

利用 $a_{ik}=\delta_{ik}$ 的性质和上述公式很容易求得作用于法线方向为 k' 的面上的应力的三个分量。为此,将(9.4)式中的 l' 换成 l:

$$p_{k'l}=a_{ik'}a_{jl}p_{ij}=a_{ik'}\delta_{jl}p_{ij}=a_{ik'}p_{il},$$

将 l 换成 j,即得:

$$p_{k'j}=a_{ik'}p_{ij}\tag{9.9}$$

若以 ν_i 代表 $a_{ik'}$,以 $p_j(\boldsymbol{\nu})$ 代表 $p_{k'j}$,那么上式可改写成:

$$p_j(\boldsymbol{\nu})=\nu_i p_{ij}。\tag{9.10}$$

当然,通过直接分析也可以求得上式。

5. 应力二次曲面

设 y_i 是以 P 为原点、坐标轴与 1,2,3 轴平行的坐标系中满足方程

$$p_{11}y_1^2+p_{22}y_2^2+p_{33}y_3^2+2p_{23}y_2y_3+2p_{31}y_3y_1+2p_{12}y_1y_2=C\tag{9.11}$$

的流动坐标。式中 C 为常数。则上式称为 P 点的应力二次曲面。按照哑指标下的求和约定,上式可写为:

$$p_{ij}y_iy_j=C\tag{9.12}$$

设 1′,2′,3′轴是另一个以 P 为原点的坐标系的轴，则因为坐标系 y_i 与 $y_{k'}$ 间有如下的变换关系：

$$y_i = a_{ik'}y_{k'} \tag{9.13}$$

所以在新坐标系中二次曲面方程变为：

$$p_{ij}a_{ik'}a_{jl'}y_{k'}y_{l'} = C,$$

但由 (9.4) 式，立即可得：

$$p_{k'l'}y_{k'}y_{l'} = C。 \tag{9.14}$$

由上式可知，在任一组通过 P 的直角坐标系中的应力二次曲面方程里的系数便是 P 点处垂直于坐标轴的平面上的应力分量。根据二次曲面理论，任一给定点上都有三个相互垂直的平面，这些平面上的应力的方向与其法向一致。这三个应力称为 P 点上的主应力，相应的坐标轴称为 P 点的主应力轴。知道了主应力的大小及主应力轴的方向，就完全确定了 P 点的应力张量。

由 (9.10) 式可以求得作用在法线方向为 $\boldsymbol{\nu}$ 的小平面上的应力的法向分量（法向力）为：

$$p_\nu(\boldsymbol{\nu}) = p_j(\boldsymbol{\nu})\nu_j = \nu_i\nu_j p_{ij}。 \tag{9.15}$$

如果 $\boldsymbol{\nu}$ 与 P 点至应力二次曲面上的动点的矢径的方向一致，则：

$$\nu_i = y_i/r, \tag{9.16}$$

由以上两式及 (9.12) 式即得：

$$p_\nu(\boldsymbol{\nu}) = C/r^2。 \tag{9.17}$$

这说明，作用在法线方向为 $\boldsymbol{\nu}$ 的小平面上的应力的法向分量与应力二次曲面的矢径的平方成反比。

由二次曲面理论可得，应力二次曲面上的某点的法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为：

$$\frac{n_1}{y_i p_{i1}} = \frac{n_2}{y_i p_{i2}} = \frac{n_3}{y_i p_{i3}}, \tag{9.18}$$

对比 (9.10) 式和上式，可知 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\nu})$ 是平行的。

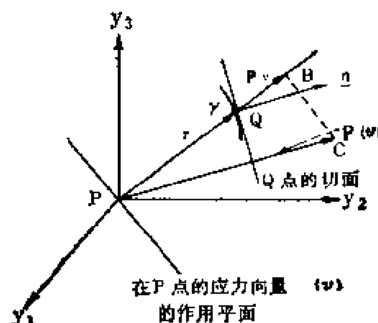


图 9.5 在 P 点的应力矢量和在 Q 点的应力二次曲面的法向的关系

根据上述性质，我们容易由应力二次曲面通过作图求得作用于任一小平面上的应力。在图 9.5 中，$\boldsymbol{\nu}$ 表示某一小平面的法向。设它与应力二次曲面相交于 A 点。作应力二次曲面在 A 点的法矢量 $\boldsymbol{n}$。由 P 点作平行于 $\boldsymbol{n}$ 的线 $\overline{PC}$。在 $\overline{PQ}$ 或其沿长线上量取 $\overline{PB}$，使之等于 C/r^2。过 B 点作垂直于 $\overline{PB}$ 的线 $\overline{BC}$。设 $\overline{BC}$ 和 $\overline{PC}$ 相交于 C 点，则 $\overline{PC}$ 就是作用于法向为 $\boldsymbol{\nu}$ 的小平面上的应力。

6. 运 动 方 程

设在给定的时刻 t，P 点的坐标为 x_i，加速度为 f_i。今考虑如图 9.4 所示的小平行六面体内的物质。令 X_i 为作用在这个物体上的单位质量的体力分量。

在垂直于 2 轴的两个平面上，平行于 3 轴的应力分量的合力是

$$-p_{23}\delta x_3\delta x_1 + \left(p_{23} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}\delta x_2\right)\delta x_3\delta x_1 = \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}\delta x_1\delta x_2\delta x_3,$$

因此，通过所有六个面平行于 3 轴的应力分量的合力是

$$\frac{\partial p_{j3}}{\partial x_j}\delta x_1\delta x_2\delta x_3,$$

各项除以 $\delta x_1\delta x_2\delta x_3$，即得相应的运动方程：

$$\rho f_3 = \frac{\partial p_{j3}}{\partial x_j} + \rho X_3,$$

ρ 是 x_i 点在 t 时刻的密度。注意到 p_{ij} 的对称性，即得运动方程：

$$\rho f_i = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i, \qquad i = 1,2,3 \tag{9.19}$$

或

$$\rho \boldsymbol{f} = \mathrm{div}(\mathbf{p}) + \rho \boldsymbol{X}。 \tag{9.20}$$

（二）应变分析

1. 无限小应变理论

变形体由于受到力的作用而形状发生变化时，我们就说这个物体发生了形变。于是，相对于体力和应力都为零时的标准位形，物体内部在 x_i 处的质量 P 就移动到一个新的位置。在连续介质力学中，有两种描述形变和运动的基本方法。一种叫拉格朗日法，另一种叫欧拉法。拉格朗日法也叫物质描述法，它以物质点未发生形变的位置和时间为自变量。如果以 $\boldsymbol{r} = x_i\boldsymbol{e}_i$ 表示质点在形变前的位置，则其形变后的位置 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}, t)$。欧拉法也叫空间描述法，它以形变后的质点的位置和时间为自变量，因此质点在形变前的位置是形变后质点的位置和时间的函数，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}', t)$。

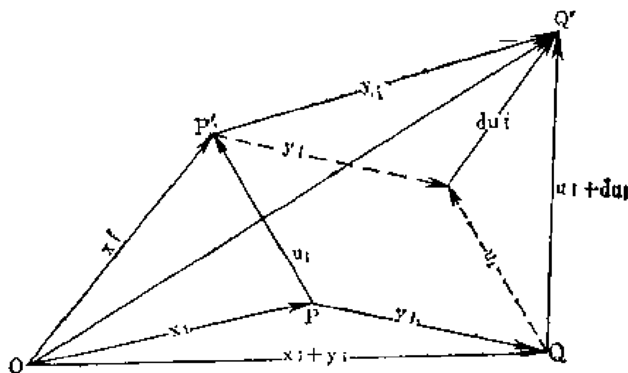


图 9.6 物体的变形

现在，我们来考察物体的变形(图 9.6)。设 P, Q 是物体内相邻的两点，在体力和应力都为零时它们的坐标分别为 x_i 和 $x_i + y_i$，y_i 是个无限小量。物体变形后，P 和 Q 各自移动至新的位置 P' 和 Q'，其坐标分别为 x_i' 和 $x_i' + y_i'$。以 u_i 和 $u_i + du_i$ 分别表示 P 点和 Q 点的位移，那么 P 点和 Q 点之间的距离平方的变化为：

$$d(\overline{PQ})^2 = y_i'^2 - y_i^2,$$

$$= (y_i + du_i)^2 - y_i^2 = 2y_i du_i + (du_i)^2, \tag{9.21}$$

$$= y_i'^2 - (y_i' - du_i)^2 = 2y_i' du_i - (du_i)^2。 \tag{9.22}$$

以变形前的质点位置 x_i 和时间 t 描写变形后的质点位置 x_i' 和位移 u_i(拉格朗日法),则:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} y_j,$$

从而

$$d(\overline{PQ})^2 = 2\varepsilon_{ij} y_i y_j, \tag{9.23}$$

其中 ε_{ij} 叫做有限应变张量,

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}, \tag{9.24}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)。 \tag{9.25}$$

如果采用欧拉法,则 x_i 和 u_i 可以用 x_i' 和 t 描写,于是

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j'} y_j,$$

从而

$$d(\overline{PQ})^2 = 2\varepsilon_{ij}' y_i' y_j', \tag{9.26}$$

其中 ε_{ij} 也叫做有限应变张量,

$$\varepsilon_{ij}' = e_{ij}' - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i'} \frac{\partial u_m}{\partial x_j'}, \tag{9.27}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i'}\right)。 \tag{9.28}$$

因为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j'},$$

而

$$x_k = x_k' - u_k,$$

所以

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j'}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x'}。 \tag{9.29}$$

如果质点的位移 u_i 和分量 $\partial u_i/\partial x_j$ 足够小,以至其二次项在含有一次项的方程中可以略去不计,那么:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} \doteq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{9.30}$$

从而

$$\varepsilon_{ij}' \doteq e_{ij}' \doteq \varepsilon_{ij} \doteq e_{ij}, \tag{9.31}$$

$$d(\overline{PQ})^2 \doteq 2e_{ij} y_i y_j。 \tag{9.32}$$

通常把 u_i 和 $\partial u_i/\partial u_j$ 足够小的情形叫做无限小应变。由以上分析我们看到，在无限小应变情形下，无论是用拉格朗日描述法，还是用欧拉描述法，位移的空间微商以及有限应变张量都是一样的。下面，我们将运用无限小应变理论研究地球介质的形变和运动，并且将采用比较自然和简单的拉格朗日法来描述形变和运动。

仍设 Q 是坐标为 x_i 的 P 点附近的点，其坐标为 $x_i + y_i$，这里 y_i 是个无限小量。于是准确到一级小量时，Q 点的位移为：

$$u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} y_j, \tag{9.33}$$

它可以改写成：

$$u_i - \xi_{ij} y_j + e_{ij} y_j, \tag{9.34}$$

其中

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{9.35}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial u_j}\right)。 \tag{9.36}$$

(9.34)式中的每一项都代表一个矢量，而 ξ_{ij}，e_{ij} 代表一个二阶张量。容易证明：

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}, \tag{9.37}$$

$$e_{ij} = e_{ji}。 \tag{9.38}$$

因此，当 $i = j$ 时 $\xi_{ij} = 0$。这样一来，ξ_{ij} 只有三个独立分量，而 e_{ij} 有六个独立分量。

第一项 u_i 是 P 点的位移，它表示包含 P 点的小体积元发生纯平移而没有旋转或形变。第二项 $-\xi_{ij}y_j$ 相当于一个体积元的纯旋转，而没有平移或形变，第三项 $e_{ij}y_j$ 则相当于形变。

2. 旋 转 张 量

我们以 ξ_{23} 和 ξ_{32} 为例来说明 ξ_{ij} 的意义。ξ_{23} 和 ξ_{32} 对位移[见(9.34)式的第二项]的贡献是：

$$(0, -\xi_{23}y_3, -\xi_{32}y_2) = (0, -\xi_{23}y_3, +\xi_{23}y_2) \tag{9.39}$$

它使 $\overline{PQ}$ 间的距离的平方相应地改变了：

$$d(\overline{PQ}^2) = \{y_1^2 + (y_2 - \xi_{23}y_3)^2 + (y_3 + \xi_{23}y_2)^2\}^2 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \tag{9.40}$$

对于 ξ_{23} 的一级小量来说，上式等于零。但包括 $\overline{PQ}$ 和 1 轴的平面围绕 1 轴转过了一个角度

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_3 + \xi_{23}y_2}{y_2 - \xi_{23}y_3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y_3}{y_2}\right)。 \tag{9.41}$$

不难证明，

$$\alpha = \tan^{-1}\xi_{23} \doteq \xi_{23}。 \tag{9.42}$$

因此，ξ_{23} 和 ξ_{32} 这一对元素与包含 P 点的小体积元像刚体一样相对于 1 轴的纯转动有关。对于另两对元素亦可作类似的分析。整个张量 ξ_{ij} 相应于通过 P 点的某个轴的一个微小的纯转动，我们称之为 P 点的旋转张量。转动也可以用向量 $\boldsymbol{\omega} = (\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12})$ 来表示。向

量 ω 可以表示为:

$$2\omega=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \tag{9.43}$$

它就是 $\boldsymbol{u}$ 的旋度,有时以 curl $\boldsymbol{u}$, rot $\boldsymbol{u}$ 或 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 表示。

3. 应 变 张 量

e_{ij} 的分量与物体的某种内部形变即应变有关,因此我们把它叫作 P 点的应变张量。

分量 e_{11} 对位移的贡献为 $(e_{11}y_1,0,0)$。它表示平行于 1 轴的小长度相对伸长为 e_{11}。类似地,e_{22}, e_{33} 表示平行于 2 和 3 轴的小长度的相对伸长分别为 e_{22} 和 e_{33}。

e_{23} 和 e_{32} 这一对分量对位移的贡献为 $(0, e_{23}y_3, e_{23}y_2)$,它们使距离 $\overline{PQ}$ 的平方相应地增加了

$$\begin{aligned}d(\overline{PQ}^2)&=\{y_1^2+(y_2+e_{23}y_3)^2+(y_3+e_{23}y_2)^2\}-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\\&\doteq 4e_{23}y_2y_3\end{aligned} \tag{9.44}$$

$\overline{PQ}$ 在 2—3 平面上的投影 $\overline{PQ_1}$ 平方的增量同样是 $4e_{23}y_2y_3$。所以 $\overline{PQ_1^2}$ 的相对增量为

$$\begin{aligned}\frac{d(\overline{PQ_1^2})}{\overline{PQ_1^2}}&=4e_{23}y_2y_3/(y_2^2+y_3^2)=4e_{23}\sin\alpha\cos\alpha\\&=2e_{23}\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{9.45}$$

式中,α 是 $\overline{PQ_1}$ 与 2 轴之间的夹角(图 9.7)。

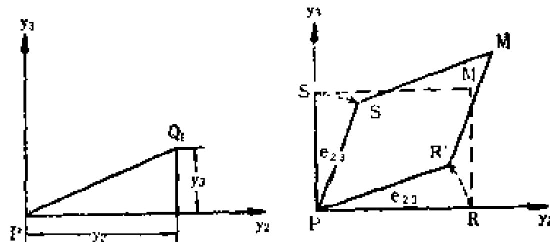


图 9.7 应变的切向分量

$\overline{PQ_1}$ 的方向绕 1 轴转过的角度为

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{y_3+e_{23}y_2}{y_2+e_{23}y_3}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{y_3}{y_2}\right), \tag{9.46}$$

这个角度等于:

$$\beta=\tan^{-1}(e_{23}\cos 2\alpha)\doteq e_{23}\cos 2\alpha。 \tag{9.47}$$

由以上结果可以看出 e_{23} 的性质。如果上述的 Q_1 点最初分别是 2 轴和 3 轴上的 R 点和 S 点,则由上式可知,形变时,$\overline{PR}$ 和 $\overline{PS}$ 绕 1 轴各转了 e_{23} 和 $-e_{23}$ 的角度,因而最初为直角的 $\angle RPS$ 减小了 $2e_{23}$,而 $\overline{PR}$ 和 $\overline{PS}$ 的长度不变。这种情况相当于原来截面为矩形的棱柱体 $PRMS$ 变形为截面为平行四边形的棱柱体而边长保持不变。我们把这种变形叫做切变,把 $2e_{23}$ 叫做切变角。对两对应变 e_{31}, e_{13} 和 e_{12}, e_{21} 也可以作类似分析。我们称 $i\neq j$ 时的 e_{ij} 为应变的切向分量。

前面我们已经指出过，在一般情况下，$\overline{PQ}^2$的增量 $d(\overline{PQ}^2)$ 可表示为(9.32)式所示的形式，对比(9.44)式与(9.32)式可知，(9.44)式只不过是(9.32)式的一种特殊情况。

4. 应变二次曲面

和应力二次曲面类似，我们可以引入 P 点的应变二次曲面，它由方程

$$e_{ij}y_iy_j = C \tag{9.48}$$

定义。式中 C 为常数。与对应力二次曲面的讨论类似，同样可以得出：在任一给定时刻，有一组通过 P 点的正交轴，相对于这些轴，P 点的切向应变分量为零。这些轴称为 P 点的应变主轴。知道了应变主轴的方向及相应的主应变(主伸长) e_{11}, e_{22}, e_{33}，就完全确定了 P 点附近的形变。因此，任一点附近的形变总可以表示为沿某三个互相垂直的方向上的简单拉伸的结果。

5. 体积膨胀

当坐标轴方向改变时，$e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 是不变量。因为

$$e_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = e_{ij}a_{ik'}\boldsymbol{e}_{k'}a_{jl'}\boldsymbol{e}_{l'} = e_{k'l'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{l'},$$

其中 $e_{k'l'}$ 是在新的坐标系中的应变张量，以 $a_{ik'}$ 表示 i 轴与 k' 轴夹角的方向余弦，可将 $e_{k'l'}$ 表示为：

$$e_{k'l'} = e_{ij}a_{ik'}a_{jl'}$$

因而

$$e_{k'k'} = e_{ij}a_{ik'}a_{jk'} = e_{ij}a_{ij} = e_{ij}\delta_{ij} = e_{ii}。 \tag{9.49}$$

不变量 e_{ii} 叫做体积膨胀。这是因为：在包含 P 点的小体积元在其边界的面积趋于零时，它的体积的增量和原来体积之比所趋近的极限就是体积膨胀 Θ。若 P 点处的主伸长为 e_{11}, e_{22}, e_{33}，则 P 处的体积膨胀 Θ 为：

$$\Theta = (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) - 1, \tag{9.50}$$

略去高阶小量，就得到：

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{ii}。 \tag{9.51}$$

根据 e_{ii} 在坐标变换下是不变量的性质可知，即使 e_{11}, e_{22}, e_{33} 不是主伸长，上式也是正确的：

$$\Theta = e_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = div(\boldsymbol{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{u}。 \tag{9.52}$$

体积压缩就是负的膨胀。

6. 连续方程

对于给定的某一部分物质，其质量是恒定的。在 δt 时间内，从体积元 δV 中流出的总质量可表示为 $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)\delta V\delta t$，这里，$v_i$ 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的分量。在同一时间内，δV 中质量的耗损为 $-\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta V\delta t$。这两项应当相等，因此：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0。 \tag{9.53}$$

这是连续方程的欧拉形式。

注意到

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

所以连续方程可以表示为另一种形式——拉格朗日形式：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{9.54}$$

式中，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9.55}$$

表示"随着运动的微商"。也可以说它表示由运动而产生的"总的变化率"。$\frac{\partial}{\partial t}$ 则表示局部变化率。

换一个角度看，若曲面 S 不是固定在空间，而是随时间连同它所包含的质点一起运动。则质量守恒原理可以表示为：

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta V) = 0。 \tag{9.56}$$

上式与 (9.54) 式是等价的，因为由类似于体积膨胀的表达式，我们可以求得单位时间里的体积膨胀的表达式：

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} \tag{9.57}$$

而由 (9.56) 式可得

$$\frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d(\delta V)}{dt} = 0。 \tag{9.58}$$

由以上两式就可得出 (9.54) 式。

速度和位移有如下关系：

$$v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \tag{9.59}$$

所以

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

略去二次项 $\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$，可以得：

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \tag{9.60}$$

特别是：

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right), \tag{9.61}$$

也即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{9.62}$$

或

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})。 \tag{9.63}$$

（三）广义虎克定律

1. 非各向同性的完全弹性体的应力-应变关系

1676 年，虎克（Hook）提出，在比例限度内，弹性棒的张应力 σ 和纵向伸长应变 e 成正比：

$$\sigma = Ee, \tag{9.64}$$

这就是著名的虎克定律。上式中，E 叫做杨（Young）氏模量或弹性模量。这个定律在比例限度内是成立的，超过此限度，就可观测到永久的或非弹性形变。

如前已述，应力张量 p_{ij} 确定了连续介质中的一个点 x_i 在时刻 t 的应力状态，而应变张量 e_{ij} 确定了应变状态。在指定的热力学条件下，变形体内的应力和应变是相伴地发生的。如果任一点上的应变分量是由该点的应力分量所决定时，这种情况就叫做完全弹性。在完全弹性的情况下，若设在指定的热力学条件下当 $e_{ij} = 0$ 时 $p_{ij} = 0$，即无应变的物体没有受到应力的作用，则虎克定律的一个很自然的推广就是假定

$$p_{ij} = p_{ij}(e_{kl})。 \tag{9.65}$$

当应变无限小时，将函数 $p_{ij}(e_{kl})$ 展成 e_{kl} 的幂级数，略去高于一次的项，就得到应力分量与应变分量的齐次线性函数：

$$p_{ij} = A_{ijkl}e_{kl}, \quad (i,j,k,l = 1,2,3) \tag{9.66}$$

这是虎克定律的一个推广，叫广义虎克定律。在许多情况下，它相当精确地反映了实际情况。

在最一般情况下，弹性系数共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 个。但是，因为应力张量是对称的，所以 $A_{ijkl} = A_{jikl}$，于是在 A_{ijkl} 中与指标 (i, j) 有关的量只有 6 个是独立的。类似地，因为应变张量是对称张量，所以 $A_{ijkl} = A_{ijlk}$，在 A_{ijkl} 中与指标 (k,l) 有关的量也只有 6 个是独立的。这样，在 81 个弹性系数中，顶多有 36 个系数是独立的。

后面我们将要证明应变能密度函数

$$W = \frac{1}{2} p_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2} A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{9.67}$$

这说明，$A_{ijkl} = A_{klij}$。这样一来，对于最一般的非各向同性的完全弹性体，独立的弹性系数只有 $36 - \left(\frac{36-6}{2}\right) = 21$ 个。

2. 各向同性的完全弹性体的应力-应变关系

各项同性是指弹性完全与方向无关。在各向同性的情况下，如果我们在坐标系(1,2,3)中将 p_{11} 与 6 个应变分量的关系表示为

$$p_{11} = Ae_{11} + Be_{22} + B'e_{33} + Ce_{23} + De_{31} + D'e_{12} \tag{9.68}$$

而在另一个坐标系(1',2',3')中,我们可以写出类似的关系:

$$p_{1'1'} = Ae_{1'1'} + Be_{2'2'} + B'e_{3'3'} + Ce_{2'3'} + De_{3'1'} + D'e_{1'2'}。 \tag{9.69}$$

如果两个坐标系间有如下关系[图 9.8a]:

1' 是 −1 方向,

2' 是 −3 方向,

3' 是 −2 方向,

则由上式可得:

$$p_{11} = Ae_{11} + B'e_{22} + Be_{33} + Ce_{32} + D'e_{13} + De_{21}。 \tag{9.70}$$

对比以上的(9.68)式与(9.70)式,可得 $B = B'$,$D = D'$。这样,p_{11} 与应变分量的关系就可以表示成:

$$p_{11} = Ae_{11} + B(e_{22} + e_{33}) + Ce_{23} + D(e_{31} + e_{12})。 \tag{9.71}$$

用类似方法,也可证明 p_{23} 与应变分量的关系可以表示为:

$$p_{23} = Ee_{11} + F(e_{22} + e_{33}) + Ge_{23} + H(e_{31} + e_{12})。 \tag{9.72}$$

因为介质各向同性,所以只要将以上两式的指标作循环代换,而不必变动系数 A, B, C, D, E, F, G, H,就可以得到其它四个应力分量的表示式。

以上结果表明,对于各向同性的完全弹性体,弹性系数最多只有 8 个,它们只与特定的热力学条件有关。

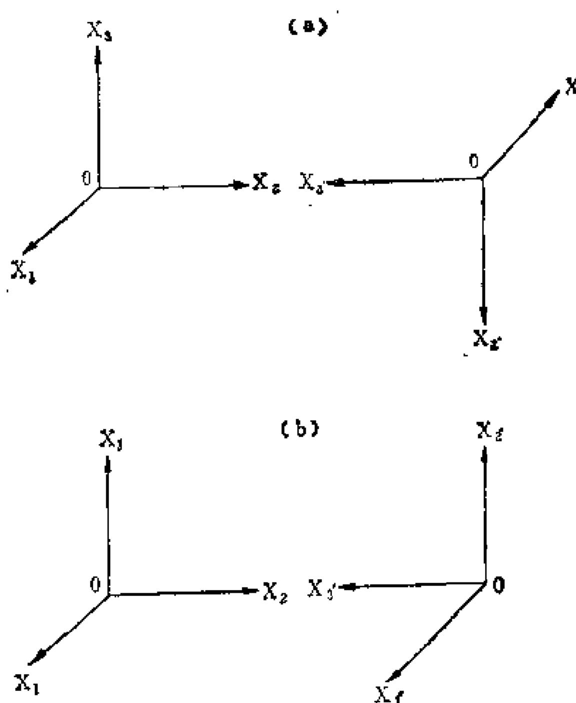


图 9.8 坐标系的变换

以上两个关系式与坐标轴的选取无关。所以特别地使(1,2,3)轴与 P 点的应变主轴相重合,则上两式变为:

$$p_{11} = Ae_{11} + B(e_{22} + e_{33}), \tag{9.73}$$

$$p_{23} = Ee_{11} + F(e_{22} + e_{33})。 \tag{9.74}$$

现在,取一个新的坐标系(1',2',3'),它是由原坐标系绕 1 轴旋转 $\pi/2$ 得到的,即 1' 轴与 1 轴重合,2' 轴与 3 轴重合,而 3' 轴与 2 轴方向相反[图 9.8b]。因为新坐标系的三个轴仍与应变主轴重合,所以

$$p_{2'3'} = Ee_{1'1'} + F(e_{2'2'} + e_{3'3'}),$$

它可以化为:

$$-p_{23} = Ee_{11} + F(e_{22} + e_{33})。 \tag{9.75}$$

对比(9.74)式和上式,立刻得出:在此情形下,$p_{23} = 0$。类似地可以证明,在同样条件下,$p_{31} = 0$ 和 $p_{12} = 0$。这就是说,对于各向同性的完全弹性体,P 点的应力主轴与该点的应变主轴是相重合的。

现在考虑一个张量,其分量

$$T_{ij} = p_{ij} - B\Theta\delta_{ij} - (A - B)e_{ij} \tag{9.76}$$

在 P 点的应力主轴坐标系中，因为当 $i \neq j$ 时 $p_{ij} = 0, e_{ij} = 0$，所以 $i \neq j$ 时 $T_{ij} = 0$。当 $i = j$ 时，因为 p_{ii} 的表示式如(9.73)式所示，结果 T_{ij} 也等于零。换言之，T_{ij} 在主轴坐标系中恒为零。根据张量在不同坐标系中的变换规则，可知在任何坐标系中它都恒为零。这样一来，

$$p_{ij} = B\Theta\delta_{ij} + (A - B)e_{ij}。 \tag{9.77}$$

对比(9.71)、(9.72)式与上式，即得 $C = D = E = F = H = 0, A - B = G$。今以 λ 表示 B，以 μ 表示 $\frac{G}{2}$，则(9.71)和(9.72)式可以写成：

$$p_{11} = \lambda\Theta + 2\mu e_{11}, \tag{9.78}$$

$$p_{23} = 2\mu e_{23}。 \tag{9.79}$$

而全部应力-应变关系为：

$$p_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{9.80}$$

λ，μ 称为拉梅弹性参数，μ 还叫做刚性系数。

3. 用位移表示的运动方程

将上式代入运动方程(9.19)式中，就得到：

$$\rho f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\Theta) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \rho X_i, \tag{9.81}$$

或

$$\rho f_i = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\Theta + \lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j} + \rho X_i。 \tag{9.82}$$

以向量形式表示，则为：

$$\rho \boldsymbol{f} = (\lambda + \mu)\nabla\Theta + \Theta\nabla\lambda + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \nabla\mu\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu + \rho\boldsymbol{X}, \tag{9.83}$$

其中 ∇^2 为拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$。

如果介质是均匀的，则 λ 和 μ 为常数，运动方程可化为：

$$\rho f_i = \lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j} + \mu\nabla^2 u_i + \rho X_i, \tag{9.84}$$

或

$$\rho\frac{d^2 u_i}{dt^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i + \rho X_i。 \tag{9.85}$$

注意到(9.55)式，可得当 u_i 和 v_i 都是一级小量时，$\frac{d^2 u_i}{dt^2} \doteq \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ 因此，运动方程化为：

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i + \rho X_i。 \tag{9.86}$$

相应的向量形式为：

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla\Theta + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{X}。 \tag{9.87}$$

4. 几种完全弹性物质

各向同性的完全弹性体按 μ 值的大小可分成三类。若 λ 和 μ 在各处均为无限大，则由(9.77)式可知，对于有限的 p_{ij}，e_{ij} 恒为零。这种物质叫做(理想)刚体。若 μ 有限且不为零，则此物质叫做完全固体。若 $\mu=0$，则叫做完全流体。

在上式中，令 $\mu=0$，则如果 $i\neq j$，$p_{ij}=0$。此时，由(9.11)式可知，应力二次曲面为一个球面。在这种情况下，作用于法向为 ν_i 的任一小平面上的应力为：

$$p_j(\nu)=\nu_i p_{ij}=\nu_i\lambda\Theta\delta_{ij}=\lambda\Theta\nu_j。\tag{9.88}$$

这说明，这个应力的方向和小平面垂直，大小总是等于 $\lambda\Theta$。应力张量只有一个独立的分量，我们把与它反号的量叫做流体静压力 p：

$$p=-p_{11}=-p_{22}=-p_{33}=-\lambda\Theta。\tag{9.89}$$

假定在各向同性的完全弹性体内，在 P 点邻近的物质受到一个流体静压力形式的附加应力 dp 的作用，则这个压力与其所引起的体积压缩之比叫做 P 点的体积模量或不可压缩性 k。由(9.80)式得：

$$dp_{ij}=\lambda d\Theta\delta_{ij}+2\mu de_{ij},$$

从而

$$-3dp=3\lambda d\Theta+2\mu d\Theta,\tag{9.90}$$

于是，

$$k=-\frac{dp}{d\Theta}=\lambda+\frac{2}{3}\mu。\tag{9.91}$$

将上式代入(9.80)式，立刻得：

$$p_{ij}=\left(k-\frac{2}{3}\mu\right)\Theta\delta_{ij}+2\mu e_{ij}。\tag{9.92}$$

当 $\mu=0$ 时，上式退化为完全流体的关系式：

$$p_{ij}=k\Theta\delta_{ij},$$

即

$$p=-k\Theta。\tag{9.93}$$

上式的 $p=-p_{11}=-p_{22}=-p_{33}$。$k$ 值中等大小的流体叫做气体；k 值很大的流体叫做液体。理想液体是不可压缩的，其 k 值为无限大。

5. 杨氏模量和泊松比

假设 P 为一小柱体内的一个点，柱体两端的平面与其棱垂直，并设每一端面上的应力全部为正应力，而柱体的侧面没有应力。P 处的杨氏模量定义为柱体端面上的应力与柱体纵向伸长的比值，而泊松比定义为柱体横向收缩与纵向伸长之比。

取1轴与棱柱相平行，由(9.80)式得，在这种情况下：

$$\begin{cases} p_{11}=\lambda\Theta+2\mu e_{11},\\ 0=\lambda\Theta+2\mu e_{22},\\ 0=\lambda\Theta+2\mu e_{33}, \end{cases}\tag{9.94}$$

因此

$$p_{11}=(3\lambda+2\mu)\Theta。\tag{9.95}$$

将上式代回到(9.94)式的第一式即得:

$$p_{11}=\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}p_{11}+2\mu e_{11},\tag{9.96}$$

因此杨氏模量 E 为:

$$E=\frac{p_{11}}{e_{11}}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}。\tag{9.97}$$

将(9.94)式的第二式代入第一式并运用上式结果,就得到泊松比 σ:

$$\sigma=-\frac{e_{22}}{e_{11}}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}。\tag{9.98}$$

由简单的代数运算,可根据以上结果用 E,σ 表示出 λ,μ 和 k。结果是:

$$\lambda=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},\tag{9.99}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)},\tag{9.100}$$

$$k=\frac{E}{3(1-2\sigma)}。\tag{9.101}$$

此外,

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2\sigma}{1-2\sigma}。\tag{9.102}$$

在以 p_{ij} 表示 e_{ij} 时,使用 E,σ 是比较方便的。因为

$$p_{kk}=(3\lambda+2\mu)\Theta=3k\Theta,\tag{9.103}$$

而由(9.80)式可得:

$$2\mu e_{ij}=p_{ij}-\lambda\Theta\delta_{ij},\tag{9.104}$$

所以

$$e_{ij}=\frac{1+\sigma}{E}p_{ij}-\frac{\sigma}{E}p_{kk}\delta_{ij}。\tag{9.105}$$

下面将要证明,若标准位形是稳定的,则 $\mu,k\geqslant 0$。据此由(9.91)和(9.97)可推知 $E\geqslant 0$。从而由(9.100)和(9.101)式可推出 $-1\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}$。对于所观测到的所有物质来说,$\sigma$ 一般都是正的。当 μ/k 减小时,σ 增大。对于完全流体,$\sigma=0.5$。

6. 完全弹性体的能量

考虑如图 9.4 所示的小平行六面体内的物质 M,设 P 是它的一个角点。今取 $p_{ij}=0$ 时的位形为标准位形。设时间 t 时 P 点的坐标为 x_i,平行六面体的边长为 δx_i,体积 $\delta V=\delta x_1\delta x_2\delta x_3$。设 $u_i,v_i,\dot{v}_i$ 分别是 P 的位移,速度和加速度。设在随后的一个小时间 dt 内,P 的位移的增量为 du_i,对M所作的功为 $dw\delta V$,M 的动能增加了 $dT\delta V$,吸收的热为 $dQ\delta V$。于是,由热力学第一定律,

$$dw+dQ=dU+dT,\tag{9.106}$$

式中，$dU\delta V$ 是M中内能的增量。

体力对M所做的功为 $\rho X_i du_i \delta V$，这里 X_i 是单位质量的体力。应力所做的功为 $\frac{\partial(p_{ij}du_i)}{\partial x_i}\delta V$。所以

$$dw = \rho X_i du_i + \frac{\partial(p_{ij}du_i)}{\partial x_i}。 \tag{9.107}$$

M的动能增量为：

$$\begin{aligned} dT\delta V &= d\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2 v\delta V\right) \\ &= \frac{1}{2}v_i^2 d(\rho\delta V) + \frac{1}{2}\rho\delta V d(v_i^2)。\end{aligned} \tag{9.108}$$

因为质量守恒[参见(9.56)式]，所以上式右边只剩下第二项，于是：

$$dT = \rho v_i \frac{dv_i}{dt}dt = \rho v_i f_i dt = \rho f_i du_i。 \tag{9.109}$$

由(9.107)，(9.109)和(9.19)式可得：

$$dw - dT = \rho X_i du_i + \frac{\partial(p_{ij}du_i)}{\partial x_i} - \rho f_i du_i = p_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}。 \tag{9.110}$$

由(9.60)式可知，在略去了二次项后，

$$\begin{aligned} dw - dT &= p_{ij}d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \\ &= p_{ij}(de_{ij} - d\xi_{ij})。\end{aligned}$$

因为 p_{ij} 是对称张量，ξ_{ij} 是反对称张量，所以 $-p_{ij}d\xi_{ij} = 0$。于是

$$dw - dT = p_{ij}de_{ij}。 \tag{9.111}$$

将上式代入(9.105)式，即得：

$$dU - dQ = p_{ij}de_{ij}。 \tag{9.112}$$

因为

$$\frac{dQ}{\tau} = dS, \tag{9.113}$$

式中，τ 是绝对温度，S 是熵。所以

$$dU - \tau dS = p_{ij}de_{ij}, \tag{9.114}$$

根据热力学第二定律，dS 是表示状态的变量的全微分。如果上述过程是等温过程，即 τ 是恒定的，那么 $d(\tau S)$ 是表示状态的变量的全微分。由热力学第一定律，dU 也是表示状态的变量的全微分。既然上述过程是等温过程，那么，用 e_{ij} 就是以描述M的状态。所以在等温过程的情况下，$d(U-\tau S)$ 是 e_{ij} 的全微分，从而 $p_{ij}de_{ij}$ 就是 e_{ij} 的全微分，于是：

$$p_{ij}de_{ij} = dW, \tag{9.115}$$

W是 e_{ij} 的函数，叫做恒温时的应变能函数。由上式可得：

$$p_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}。 \tag{9.116}$$

因为 p_{ij} 是 e_{ij} 的齐次线性函数[见(9.66)式]，所以W必为 e_{ij} 的齐次二次函数，我们将它

表示为:

$$W = a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}。 \tag{9.117}$$

因为

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = a_{ijkl}e_{kl} + a_{klij}e_{kl},$$

所以

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} e_{ij} = (a_{ijkl}e_{kl} + a_{klij}e_{kl})e_{ij},$$

$$= 2a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = 2W,$$

也就是:

$$W = \frac{1}{2} p_{ij}e_{ij}。 \tag{9.118}$$

当弹性体是各向同性体时,

$$2W = \lambda\Theta^2 + 2\mu e_{ij}^2, \tag{9.119}$$

式中的 λ, μ 都是等温参数。

利用 (9.92) 式可将上式改写为:

$$2W = k\Theta^2 + 2\mu\left(e_{ij}^2 - \frac{1}{3}\Theta^2\right), \tag{9.120}$$

或

$$2W = k\Theta^2 + 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij}\right)^2。 \tag{9.121}$$

如果标准位形是稳定的,则当 $e_{ij} \neq 0$ 时,$W \geqslant 0$。由上式立即可得出 k, $\mu \geqslant 0$。这是上节已用到的一个结论。

在绝热条件下,因为 $dQ = 0$,所以 (9.114) 式中的 $p_{ij}de_{ij}$ 仍是一个全微分。上面从 (9.115) 式至 (9.121) 式的推导仍然成立,只不过公式中的 λ, μ, k 应理解为绝热参数,W 应理解为绝热条件下的应变能密度函数。

7. 等温和绝热弹性系数

引进由如下的公式所定义的偏应力张量 P_{ij} 和偏应变张量 E_{ij}:

$$P_{ij} = p_{ij} - \frac{1}{3} p_{kk}\delta_{ij} = p_{ij} + p\delta_{ij}, \tag{9.122}$$

$$E_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij}。 \tag{9.123}$$

式中,p 是压强:

$$p = -\frac{1}{3} p_{kk}。 \tag{9.124}$$

由 (9.103) 式可得:

$$p = -k\Theta。 \tag{9.125}$$

由 (9.122)、(9.123)、(9.125) 和 (9.90) 四式,可得:

$$P_{ij} = 2\mu E_{ij}。 \tag{9.126}$$

根据 P_{ij} 和 E_{ij} 的定义可知 $P_{ii} = 0, E_{ii} = 0$。所以上式中只有 5 个独立的关系式，但连同(9.125)式，仍然有 6 个独立的关系式，它们和(9.80)式是等价的。

各向同性完全弹性的固体的热力学状态，可以用绝对温度 τ, p, P_{ij}, Θ 和 E_{ij} 加以确定。但由于(9.125)式和(9.126)式的缘故，只要用 τ, Θ 和五个独立的 E_{ij} 分量就足以完全确定其热力学状态。由(9.125)式可知，p 和 Θ 有关，并且可能通过 k 而和 τ 有关，但和 E_{ij} 无关。由(9.126)式可知，P_{ij} 和 E_{ij} 有关，但和 Θ 无关，并且可能通过 μ 而和 τ 有关。但是 k 和 μ 不能都与 τ 有关，否则(9.125)式与(9.126)式就不成其为互相独立的关系式。在流体这种特殊情况下 $\mu = 0$，此时只有一个弹性系数 k，所以只能是 k 与 τ 有关。所以在一般情况下，在 k 和 μ 这两个弹性系数中，只能是 k 与温度 τ 有关。

既然在(9.126)式中，μ 与温度无关，所以对于任何可逆的热力学变化，μ 都是一样的。特别是绝热刚性系数 μ_a 和等温刚性系数 μ_i 应当是相等的:

$$\mu_a = \mu_i。 \tag{9.127}$$

体积模量的情况则不同。绝热条件下的体积模量 k_a 定义为:

$$k_a = -(\partial p/\partial \Theta)_{s,E_{ij}}, \tag{9.128}$$

而等温条件的体积模量 k_i 定义为:

$$k_i = -(\partial p/\partial \Theta)_{\tau}。 \tag{9.129}$$

在应变保持不变的情况下的比热 c 的定义为:

$$c = \frac{1}{\rho}(\partial Q/\partial \tau)_{\Theta,E_{ij}}, \tag{9.130}$$

而体膨胀系数的定义 γ 为:

$$\gamma = (\partial \Theta/\partial \tau)_{p}。 \tag{9.131}$$

由(9.113)和(9.114)式得:

$$dU = \tau dS + p_{ij}de_{ij}, \tag{9.132}$$

将(9.122)和(9.123)式代入上式即得:

$$dU = \tau dS + P_{ij}dE_{ij} - pd\Theta。 \tag{9.133}$$

根据热力学第一定律，dU 是一个全微分，所以

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\Theta,E_{ij}} = -\left(\frac{\partial \tau}{\partial \Theta}\right)_{S,E_{ij}}。 \tag{9.134}$$

由(9.113)和(9.130)式可得:

$$\rho c = (\partial Q/\partial \tau)_{\Theta,E_{ij}} = \tau(\partial s/\partial \tau)_{\Theta,E_{ij}}。 \tag{9.135}$$

把 p 看作是 τ 和 Θ 的函数，而 τ 又是 Θ 的函数，则:

$$(\partial p/\partial \Theta)_{S,E_{ij}} = (\partial p/\partial \tau)_{\Theta}(\partial \tau/\partial \Theta)_{S,E_{ij}} + (\partial p/\partial \Theta)_{\tau}。 \tag{9.136}$$

将(9.128)，(9.129)式代入上式，即得:

$$k_a - k_i = -(\partial p/\partial \tau)_{\Theta}(\partial \tau/\partial \Theta)_{S,E_{ij}}, \tag{9.137}$$

$$= (\partial p/\partial \tau)_{\Theta}(\partial p/\partial S)_{\Theta,E_{ij}}\ [\text{用(9.134)式}] \tag{9.138}$$

$$= (\partial p/\partial \tau)_{\Theta}(\partial p/\partial \tau)_{\Theta}(\partial \tau/\partial S)_{\Theta,E_{ij}}。 \tag{9.139}$$

不难证明，如果

$$\begin{cases} x = x(y,z), \\ y = y(z,x), \\ z = z(x,y), \end{cases}$$

则

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 1,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1。$$

将以上两式运用于(9.139)式,则得:

$$\begin{aligned} k_a - k_t &= (\partial p/\partial \tau)_\Theta^2/(\partial s/\partial \tau)_{\Theta,E_{ij}}, \\ &= \tau[(\partial \Theta/\partial \tau)_p(\partial p/\partial \Theta)_\tau]^2/\rho c。 \end{aligned} \tag{9.140}$$

利用(9.129)和(9.131)式便得到:

$$k_a - k_t = \tau k_t^2 \gamma^2/\rho c。 \tag{9.141}$$

(四) 地球介质的非完全弹性

1. 偏应力和偏应变

地球介质在短时间作用力下表现为完全弹性,但在长时间作用力下则表现出非完全弹性。地球介质的非完全弹性,主要是在非完全对称应力的作用下出现的;既然如此,引入偏应力和偏应变张量 P_{ij} 和 E_{ij} 是比较适宜的。P_{ij} 和 E_{ij} 定义为:

$$P_{ij} = p_{ij} - \frac{1}{3} p_{kk}\delta_{ij}, \tag{9.142}$$

$$E_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk}\delta_{ij}。 \tag{9.143}$$

显然,当 $i \neq j$ 时,$P_{ij} = p_{ij}, E_{ij} = e_{ij}$。

由(9.102)式和以上两式,我们可得:

$$P_{ij} = 2\mu E_{ij}。 \tag{9.144}$$

由(9.142)和(9.143)两式可以证明 $P_{ii} = 0$, $E_{ii} = 0$,所以在上式中只有五个独立的关系式。连同(9.102)式,仍然有六个独立的关系式。(9.102)和(9.144)两式和(9.102)式是等效的,但是用这两个公式可以分别表示出完全对称应力和非完全对称应力两者的效应:(9.102)式反映了在完全对称应力作用下介质的性质,而(9.144)式则反映了对称应力的效应。

由(9.121)式和(9.123)式可得:

$$2W = k\Theta^2 + 2\mu E_{ij}^2。 \tag{9.145}$$

既然地球介质的非完全弹性主要是在非完全对称应力作用下出现的,所以在表示地球介质的非完全弹性时,我们将始终保持(9.102)式不变,而以不同方式改变(9.144)式,并假定所有用到的弹性参数与时间 t 无关。

2. 完全弹性体

应力和应变呈线性关系[(9.144)式]的物体即完全弹性体,也叫虎克体(图 9.9a)。用

一根遵从虎克定律的弹簧可以直观地表示这种物体；如果将完全弹性体与电路相比拟，则可发现，P_{ij} 相当于电流，E_{ij} 相当于电动势，而 2μ 相当于电导率。

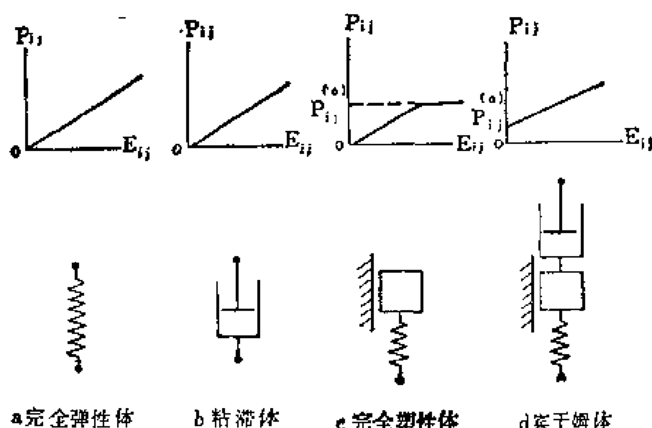


图 9.9 完全弹性体、粘滞体、完全塑性体和宾干姆体

3. 粘 滞 体

理想的粘滞体是一种最简单的非完全弹性体。对于这种物体，(9.144) 式仍成立，但偏应力不是与偏应变成正比，而是与偏应变的变化率成正比(图 9.9b)：

$$P_{ij} = 2\nu \frac{dE_{ij}}{dt} \tag{9.146}$$

这里，ν 是一个表示流体粘滞性的新参数，叫粘滞系数。具有上述性质的介质就叫做粘滞体，也叫牛顿体。我们可以用一个阻尼器直观地表示这种物体，阻尼器可以看成是在粘滞流体中移动的活塞，它服从牛顿粘滞性定律、即作用力正比于速率。不难证明，若 P_{ij} 和 E_{ij} 都是时间的简谐函数：

$$P_{ij} = P_{ij}^{(o)} e^{i\omega t},$$
$$E_{ij} = E_{ij}^{(o)} e^{i\omega t},$$

则

$$P_{ij} = 2\nu_i\omega_i E_{ij} = 2\mu^* E_{ij}。 \tag{9.147}$$

这说明在此条件下，粘滞体相当于弹性常数为 $\mu^* = i\omega\nu$ 的完全弹性体。如果仍如前面那样将 P_{ij} 和 E_{ij} 分别比作电路中的电流和电动势，则 $2\mu^*$ 便是相应的导纳。纯虚数的导纳意味着 E_{ij} 比 P_{ij} 滞后 $\pi/2$ 的位相。

4. 完 全 塑 性 体

如果物体在所受应力 P_{ij} 小于某定值 $P_{ij}^{(o)}$ 时为完全弹性体；而当应力等于 $P_{ij}^{(o)}$ 时便开始流动(图 9.9c)，即：

$$E_{ij} = P_{ij}/2\mu, \qquad 当\ P_{ij} < P_{ij}^{(o)}\ 时；\tag{9.148}$$
$$E_{ij}\ 可任意增大, \qquad 当\ P_{ij} = P_{ij}^{(o)}\ 时；$$

那么，这种物体便叫做完全塑性体，也叫圣 · 维南 (St. Venant) 体。

可以用图 9.9c 的模型直观地表示完全塑性体。在这个模型中，把 $P_{ij}^{(o)}$ 比作摩擦力，当

应力小于它时，比拟成位移的应变与应力成正比，当应力等于它从而克服了摩擦作用时，位移可以无限地增大。

5. 宾干姆（D. K. Bingham）体

如果物体在应力小于某定值 $P_{ij}^{(o)}$ 时表现为完全弹性体，而应力大于该定值时则为粘滞体(图 9.9d)：

$$P_{ij}=2\mu E_{ij},\qquad P_{ij}<P_{ij}^{(o)},$$
$$P_{ij}=P_{ij}^{(o)}+2\nu\frac{dE_{ij}}{dt},\quad P_{ij}>P_{ij}^{(o)},\tag{9.149}$$

那么这种物体就叫做宾干姆体。我们可以用图 9.9d 所示的模型直观地表示这种物体。

如果 P_{ij} 是一个大于 $P_{ij}^{(o)}$ 的常数，则在对上式的第 2 式求积分后可得：

$$E_{ij}=\frac{P_{ij}-P_{ij}^{(o)}}{2\nu}t+\frac{P_{ij}^{(o)}}{2\mu},\tag{9.150}$$

这说明，在上述情况下，对于宾干姆体来说，应变随时间线性地变化。

6. 粘 弹 性 体

如果一个物体，其应力由两部分组成，一部分和应变成正比，另一部分和应变率成正比，即：

$$P_{ij}=2\mu E_{ij}+2\nu\frac{dE_{ij}}{dt}\tag{9.151}$$

那么这种物体就叫做粘弹性体，也叫做开尔芬（Kelvin，Lord）体或伏葛特（Voigt）体。若仍将 P_{ij} 比作电流，则它就相当于一个并联电路的总电流，因而我们可以直观地用图 9.10a 所示的弹簧和阻尼器并联成的模型表示粘弹性体，弹簧服从虎克定律，而阻尼器服从牛顿粘滞性定律。

若在 $t=0$ 时 $E_{ij}=0$，而 $P_{ij}=P_{ij}^{(o)}=$ 常数，则积分上式后可得：

$$E_{ij}=\frac{P_{ij}^{(o)}}{2\mu}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau'}}\right),\tag{9.152}$$

式中，$\tau'=\nu/\mu$ 是量纲为时间的常数，叫做应变的弛豫时间。上式表明，当作用偏应力时，物体达到完全应变，在时间上有一个指数延迟。

若是在 $t=0$ 时，$E=E_{ij}^{(o)}$，然后应力由 $P_{ij}^{(o)}$ 突然降为零，则

$$E_{ij}=E_{ij}^{(o)}e^{-t/\tau'},\tag{9.153}$$

它表明在取消应力后，物体恢复原状，在时间上也要经历一个指数延迟过程。

如果偏应力是一个时间上的简谐函数 $P_{ij}=P_{ij}^{(o)}e^{i\omega t}$，$\omega$ 表示圆频率，则令 $E_{ij}=E_{ij}^{(o)}e^{i\omega t}$，把 P_{ij} 和 E_{ij} 代入 (9.151) 式后可得：

$$P_{ij}=2(\mu+i\omega\nu)E_{ij}=2\mu^*E_{ij}。\tag{9.154}$$

这意味着粘弹性体相当于具有复弹性系数

$$\mu^*=\mu+i\omega\nu\tag{9.155}$$

的完全弹性体。显然，当力的作用周期 $T=2\pi/\omega$ 比弛豫时间 τ' 小得多时，物体表现出远大于 μ 的有效刚性；反之，(9.151) 式中右边的第二项(粘滞项)的影响就不重要。

7. 弹 滞 性 体

如果一个物体的应变 E_{ij} 包括两部分，一部分是完全弹性应变，另一部分是粘滞性应变，即：

$$2\nu\frac{dE_{ij}}{dt}=P_{ij}+\tau\frac{dP_{ij}}{dt},\tag{9.156}$$

那么具有上式和(9.102)式所描述性质的物体便叫做弹滞性体，也叫做马克斯威尔（A. E. Maxwell）体。

若仍将 P_{ij} 比作电流，则可将弹滞性体的 P_{ij} 比作一个串联电路的电流，这样就可以用图 9.10b 所示的、弹簧和吸收器串联成的模型直观地表示弹滞性体。

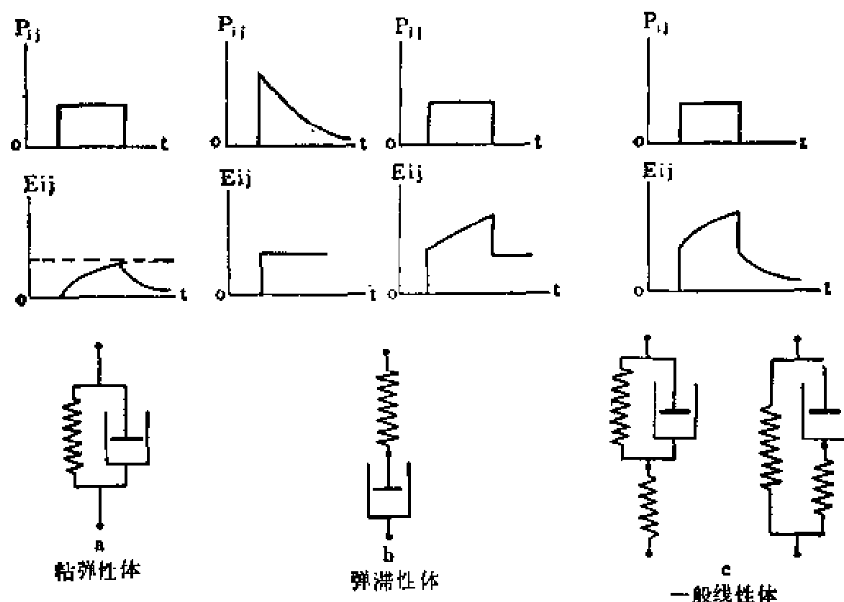


图 9.10　粘弹性体、弹滞性体和一般线性体

若当 $t\geqslant 0$ 时 $E_{ij}=E_{ij}^{(o)}=$ 常数，则对上式求积分后可得：

$$P_{ij}=\frac{2\nu}{\tau}E_{ij}^{(o)}e^{-t/\tau}。\tag{9.157}$$

式中的 τ 称为应力弛豫时间。这个结果表明，对于弹滞性体，当应变保持不变时，应力会按指数规律逐渐松弛。

若在 $t=0$ 时在无应变的弹滞性体上作用一恒定的偏应力 $P_{ij}^{(o)}$，则由(9.156)式可得：

$$E_{ij}=E_{ij}^{(1)}\left(1+\frac{t}{\tau}\right),\tag{9.158}$$

式中，$E_{ij}^{(1)}=\frac{\tau}{2\nu}P_{ij}^{(o)}$。这表明，在 $t=0$ 时刻作用了偏应力 $P_{ij}^{(o)}$ 后，立刻会引起一个大小为$\frac{\tau}{2\nu}P_{ij}^{(o)}$ 的偏应变；然后偏应变以恒定的速率 $P_{ij}^{(o)}/2\nu$ 增加，像粘滞流体一样，它可以变到无穷大。若在 $t=t_1$ 时刻应力突然从 $P_{ij}^{(o)}$ 降为零，这时偏应变立即减少 $\frac{\tau}{2\nu}P_{ij}^{(o)}$，而残存一个大小为 $t_1P_{ij}^{(o)}/2\nu$ 的偏应变。

如果偏应力和偏应变都是时间的简谐函数，那么由(9.157)式可得：

$$P_{ij}=2\mu^*E_{ij}, \tag{9.159}$$

$$\mu^*=\frac{i\omega\nu}{1+i\omega\tau}。 \tag{9.160}$$

这意味着弹滞性体可视为具有上式所示的复弹性系数 μ^* 的完全弹性体。显然，在偏应力随时间变化很缓慢时，(9.156)式右端的第一项占优势。此时的弹滞性体近似为粘滞系数为 ν 的流体；但当应力变化很快时，第二项就占优势，此时弹滞性体的性质接近于刚性系数为 ν/τ 的完全弹性体。

这些结果定性地和观察到的某些塑性物质的性质相符合。像沥青或塑性硫磺等物质在持续的偏应力作用下，会发生塑性流动，其应变可以趋于无穷大；而在应力撤消后，只是部分地恢复原状，即残存一个永久变形。

对于粘弹性体而言，在应变和应力之中任一个保持不变的情况下，只要时间足够长，相应地另一个量也是常数。由此可见，弹性是粘弹性体的主要性质。和粘弹性体不同，只要时间足够长，在应变保持不变的情况下，弹滞性体中的应力会逐渐松驰掉；而在应力不变时，应变将随时间而增大。这说明在时间足够长的情况下，弹滞性体更接近于粘滞流体。粘滞性是弹滞性体的主要性质。

8. 一般的线性体

真实的固体在施加或取消偏应力后，通常立即发生一定数量的应变，接着是长时间的缓慢运动(蠕动)。这种现象叫做弹性后效或弹性滞后。由以上分析我们看到，粘弹性体和弹滞性体都部分地反应了固体的弹性后效性质。所以可以想见，如果引进一般线性体的概念，当能更好地描述这一性质。一般线性体是指偏应力和偏应变遵从下列关系的物体：

$$P_{ij}+\tau\frac{dP_{ij}}{dt}=2\mu E_{ij}+2\nu\frac{dE_{ij}}{dt}。 \tag{9.161}$$

对于一般的线性体，如果在时刻 $t=0$ 不发生应变，而后施加一恒定的偏应力 $P_{ij}^{(o)}$，则由上式可得：

$$\int_0^t P_{ij}^{(o)}dt+\tau P_{ij}^{(o)}=2\mu\int_0^t E_{ij}dt+2\nu E_{ij}。 \tag{9.162}$$

这说明，在 $t=0$ 时刻，发生了大小为 $(\tau/2\nu)P_{ij}^{(o)}$ 的瞬时偏应变。因为在 $t>0$ 时，P_{ij} 保持等于 $P_{ij}^{(o)}$，所以由(9.161)式可以推得：

$$E_{ij}=\frac{\tau P_{ij}^{(o)}}{2\nu}\left[\left(1-\frac{\tau'}{\tau}\right)e^{-t/\tau'}+\frac{\tau'}{\tau}\right], \tag{9.163}$$

这里，$\tau'=\nu/\mu$。上式表明，当 t 趋于无穷时，E_{ij} 趋于 $P_{ij}^{(o)}/2\mu$。如果在 $t=t_1, E_{ij}=E_{ij}^{(1)}$ 时突然将应力移去，则由(9.162)式可见，偏应变将突然减少 $(\tau/2\nu)P_{ij}^{(o)}$，然后以指数形式蠕动到零：

$$E_{ij}=\left(E_{ij}^{(1)}-\frac{\tau}{2\nu}P_{ij}^{(o)}\right)e^{-t/\tau'},\quad t>t_1。 \tag{9.164}$$

把刚性系数为 μ、粘滞系数为 ν 的弹滞性体与刚性系数为 μ_1 的弹性体并联(图9.10c)，

则可得到下列关系：

$$P_{ij}+\frac{\nu}{\mu}\frac{dP_{ij}}{dt}=2\mu_1E_{ij}+2\nu\left(1+\frac{\mu_1}{\mu}\right)\frac{dE_{ij}}{dt}。\qquad(9.165)$$

如果把刚性系数为 μ、粘滞系数为 ν 的粘弹性体与刚性系数为 μ_1 的弹性体串联(图9.10c)，则可得另一个关系：

$$P_{ij}+\frac{\nu}{\mu+\mu_1}\frac{dP_{ij}}{dt}=\frac{2\mu\mu_1}{\mu+\mu_1}E_{ij}+2\nu\frac{\mu_1}{\mu+\mu_1}\frac{dE_{ij}}{dt}。\qquad(9.166)$$

对比以上两式与(9.161)式，我们可以看出，无论是(9.165)式所表示的模型、还是(9.166)式所表示的模型，只要参数选择适当，在力学上都等效于(9.161)式所示的一般线性体。

由(9.163)式可见，只有在 $\tau'>\tau$ 时由该式给出的 E_{ij} 才是 t 的上升函数，这样，该式就能表示弹性后效。因此，对于具有弹性后效的介质来说，应当有 $\tau'>\tau$。τ' 越大，施加了应力后，E_{ij} 趋于终值的速率越慢；取消了应力后，E_{ij} 蠕动到零的速率也越慢。

在应力变化十分缓慢时，(9.161)式中的 τ 项和 ν 项可以忽略，此时物体的性质接近于刚性系数为 μ 的完全弹性体。在变化十分迅速的应力作用下，τ 项和 ν 项占主导地位，此时物体的性质接近于刚性系数为 ν/τ 的完全弹性体。如果应力和应变都是时间的简谐函数，则可得：

$$P_{ij}=2\mu^*E_{ij},\qquad(9.167)$$

$$\mu^*=\mu\left(\frac{1+i\omega\tau'}{1+i\omega\tau}\right),\qquad\tau'=\frac{\nu}{\mu}。\qquad(9.168)$$

这说明可以把一般线性体看作是具有上式所表示的复弹性系数 μ^* 的完全弹性体。

9. 固体的强度

一个固体在从零不断增加的偏应力作用下，它的变形起初是完全弹性的；随后弹性后效渐渐明显，但形变仍可恢复；最后则发生永久形变。永久形变阶段表现为塑性流动或破裂。如果作用的应力足够大，则立刻就发生破裂；不过通常在产生塑性流动和产生直接破裂的最小偏应力之间总有一段有限的间隔。

米赛斯(Mises)认为，可以用开始塑性流动时的偏应力分量的标量函数 P_{ij}^2 表示永久形变阶段的性质。按照(9.142)式，可以将 P_{ij}^2 表示为：

$$P_{ij}^2=\frac{1}{3}\left[(p_{22}-p_{33})^2+(p_{33}-p_{11})^2+(p_{11}-p_{22})^2\right]+2(p_{23}^2+p_{31}^2+p_{12}^2)。\qquad(9.169)$$

通常，以流动开始出现时的 $(3P_{ij}^2)^{1/2}$ 的值作为固体强度的一个指标，叫米赛斯函数 F_M：

$$F_M=(3P_{ij}^2)^{1/2}。\qquad(9.170)$$

实际上，永久形变阶段不但取决于 P_{ij}^2，还与其它因素如 p_{kk} 有关。所以另一种理论认为这个阶段是由最大和最小主应力之差决定的。如果以 p_1、p_2、p_3 分别表示最大，中等和最小主应力；以 P_1,P_2,P_3 表示偏应力的相应的量，则最大和最小主应力差

$$F_S=p_1-p_3=P_1-P_3。\qquad(9.171)$$

在主轴坐标系中，米赛斯函数

$$F_M=(3P_i^2)^2=\left[(p_2-p_3)^2+(p_3-p_1)^2+(p_1-p_2)^2\right]^{1/2}。\qquad(9.172)$$

通过简单的代数运算，可以证明，对于所有的 P_i 值，$(F_M-F_S)/F_M$ 在 0.18 和 0.30 之间。

所以在考虑地球内部物理的强度问题时，相对于所要求的精度而言，不管是用 F_S 还是用 F_M，差异都不大。

有时也称产生直接破裂时的应力为"强度"。为避免混淆，葛里格斯 (D. T. Griggs) 把既无塑性流动又无破裂发生时的最大应力差叫做"基本强度"。按此定义，沥青之类的物质的基本强度就等于零。

"强度"和"刚性"是两种不同的概念。弹滞性体的强度为零，但在某些情况下它的性质犹如具有一定刚性的完全弹性体。

10. 固体和流体

在前面，我们以 μ 值的大小划分完全流体和完全固体。就实际物质而言，这种划分法未免过于简单。实际介质的 μ 是否会精确地等于零这是成问题的；此外，单用 μ 描述刚性是不够的：即使 μ 为零，物质也可以表现出刚性。所以在给定的热力学条件下，想把某一物质划分为固体或流体，只按 μ，ν 的值来分类是不够的，还必须规定其它一些条件。

有人以没有强度作为物质是流体的判据，有人则以没有刚性为判据。如前所述，强度和刚性是两种不同的概念。像常温下的沥青，其基本强度等于零；但在一定条件下它又可以表现出弹性。所以以有无刚性作为固体和流体的判据较好。

若以有无刚性作为固体和流体的判据，那么就引出一个问题：能否测定出物体的刚性？实际固体的刚性与力的作用时间有关，但根据以上分析可知，在迅速变化的应力作用下，最有可能测定刚性。如果介质具有刚性，那么在迅速变化的力的作用下就能传播横波。所以我们可以用是否能够通过横波作为介质是固体还是流体的判据。据此，我们说地球的外核是液体的，因为它不能传播横波。顺便指出，虽然在长时间力的作用下，弹滞性体的性质接近于粘滞流体；但因在短时间力的作用下，其性质更接近于刚性系数为 ν/τ 的完全弹性体，所以根据"刚性"判据，仍应认为弹滞性体是一种固体。

（五）波动方程及其基本解

1. 体膨胀和旋转量所满足的波动方程

在没有体力时，可将运动方程 (9.87) 式写成另一个形式：

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}, \tag{9.173}$$

对上式两边作散度得：

$$\rho\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\Theta; \tag{9.174}$$

作旋度得：

$$\rho\frac{\partial^2(2\boldsymbol{\omega})}{\partial t^2}=\mu\nabla^2(2\boldsymbol{\omega})。 \tag{9.175}$$

其中

$$\Theta=div(\boldsymbol{u})=\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \tag{9.176}$$

$$2\boldsymbol{\omega}=rot(\boldsymbol{u})=\nabla\times\boldsymbol{u}。 \tag{9.177}$$

(9.174) 式和 (9.175) 式表明,在弹性固体中有两种扰动传播,一种是体膨胀,一种是旋转量。前者以较高的速度

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{9.178}$$

传播,通常叫做无旋波、膨缩波、纵波、初至波 (Primary waves) 或 P 波。后者以较低的速度

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{9.179}$$

传播,通常叫做等体积波,旋转波,畸变波,切变波,横波,续至波 (Secondary waves) 或 S 波。

这两种类型的波的性质可以通过考虑平面波的传播得到理解。不失一般性,假定平面波沿 x_1 方向传播,那么位移分量 u_1, u_2, u_3 就只是 x_1 和 t 的函数,因而运动方程 (9.173) 可以写成:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \tag{9.180}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \tag{9.181}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}。 \tag{9.182}$$

波动方程 (9.180) 的一般解为:

$$u_1 = f(x_1 - \alpha t) + F(x_1 + \alpha t), \tag{9.183}$$

这可以通过将上式代入 (9.180) 式而得到验证。上式中的 f 和 F 是任意函数,它们的形式只依赖初始条件和边界条件。函数 f 表示沿传播方向的位移 u_1 (即纵波振动) 以 P 波的速度 α 朝正 x_1 方向传播,函数 F 表示朝负 x_1 方向传播。对于与传播方向垂直的两个彼此垂直的位移 u_2 和 u_3 (即横波振动) 可以作类似分析,不过它们是以 S 波的速度 β 传播罢了。

2. 直角坐标下的波动方程

引进位函数 φ 和 $\boldsymbol{\phi}$:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\phi}。 \tag{9.184}$$

将它代入 (9.173) 式可知,如果 φ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 分别满足波动方程

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi, \tag{9.185}$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{\phi}, \tag{9.186}$$

则如 (9.185) 所示的 $\boldsymbol{u}$ 就满足运动方程 (9.173)。由此可见,由于引进了位函数 φ 和 $\boldsymbol{\phi}$,使得运动方程 (9.173) 的求解问题转化为波动方程 (9.185) 和 (9.186) 的求解问题。为以后应用方便起见,我们将 (9.184) 式以分量形式表示:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \tag{9.187}$$

$$u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}; \tag{9.188}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}。 \tag{9.189}$$

在以后要讨论的平面波问题中，使用上述形式的位函数是方便的，特别是如果 φ，$\boldsymbol{\psi}$ 与 x_2 无关时，

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \tag{9.190}$$

$$u_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \tag{9.191}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}。 \tag{9.192}$$

由上式可见，u_2 可以与 u_1 和 u_3 分开讨论。所以在所讨论的量与 x_2 无关的问题里，只要 φ，ψ 和 u_2 满足波动方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi, \tag{9.193}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \psi, \tag{9.194}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 u_2, \tag{9.195}$$

则由下列公式

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \tag{9.196}$$

$$u_2 = u_2 \tag{9.197}$$

$$u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{9.198}$$

确定的 $\boldsymbol{u}$ 就满足运动方程。

3. 柱坐标下的波动方程

有时需要在柱坐标中讨论问题，这时我们引进标量位函数 φ, ψ, χ：

$$\boldsymbol{u} = \nabla \varphi + \nabla \times [\psi \boldsymbol{e}_z + \nabla \times (\chi \boldsymbol{e}_z)], \tag{9.199}$$

$\boldsymbol{e}_z$ 是 z 方向的单位向量。

将上式代入运动方程，可以发现如果标量位函数 φ, ψ, χ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi, \tag{9.200}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \psi, \tag{9.201}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \beta^2\nabla^2\chi, \tag{9.202}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 就满足运动方程。

在柱坐标中，如果扰动的传播具有轴对称性，则波动方程可以化为较简单的形式。以(9.200)为例，此时它可化为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)。\tag{9.203}$$

设

$$\varphi = R(r)T(t), \tag{9.204}$$

将它代入(9.203)式即可得出：

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR}, \tag{9.205}$$

上式左端与 r 无关，右端与 t 无关；因此上式要成立只能是两端皆为常数，譬如说等于 $-k^2$，因此我们得到：

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T''}{T} = -k^2, \tag{9.206}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{R} = -k^2, \tag{9.207}$$

或

$$T'' + k^2\alpha^2T = 0, \tag{9.208}$$

$$r^2R'' + rR' + k^2r^2R = 0。\tag{9.209}$$

(9.208)式的解为：

$$T = Ce^{ik\alpha t}, \tag{9.210}$$

而(9.209)式是以 kr 为宗量的零阶贝塞尔方程，它的解为：

$$R = AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr), \tag{9.211}$$

$H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 是零阶汉克尔(Hankel)函数。这样，(9.204)式的解为：

$$\varphi = [AH_0^{(1)}(kr) + BH_0^{(2)}(kr)]e^{ik\alpha t}。\tag{9.212}$$

当 $kr \gg 1$ 时，

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i(kr-\frac{\pi}{4})},$$

$$H_0^{(2)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{-i(kr-\frac{\pi}{4})}, \tag{9.213}$$

它们分别表示以速度 α 向极轴会聚和离开极轴的柱面波。柱面波的振幅因子是 $r^{-1/2}$，可以从物理上考虑得到理解：当柱面波向外扩展时，波前面面积与 r 成正比，因此每单位面积的能流按 r^{-1} 减小。因为能流与振幅的平方成正比，所以振幅应与 $r^{-1/2}$ 成正比。

4. 球极坐标下的波动方程

在需要在球极坐标中讨论问题时，可以引进位函数 φ, ψ, χ：

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \nabla\times[\psi\boldsymbol{r} + \nabla\times(\chi\boldsymbol{r})], \tag{9.214}$$

其中，

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r, \tag{9.215}$$

$\boldsymbol{e}_r$ 是 r 方向的基矢量。不难验证，如果 φ, ψ, χ 满足如 (9.201)—(9.203) 式所示的波动方程，则如 (9.214) 式所示的 $\boldsymbol{u}$ 就满足运动方程。

在球坐标下，如果扰动对 O 点具有对称性，则波动方程化为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \tag{9.116}$$

或

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}。 \tag{9.117}$$

它的通解为

$$\varphi = \frac{1}{r}f(\alpha t - r) + \frac{1}{r}F(\alpha t + r)。 \tag{9.118}$$

f 是一个从 O 点发出的球面波，而 F 是一个朝 O 点会聚的球面波。球面波的振幅因子为 r^{-1}。

从物理上考虑，球面波的振幅因子为 r^{-1} 是可以理解的，因为当球面波向外传播时，波前面(球面)面积随 r^2 增大，因此每单位面积的能流就按 r^{-2} 减小。因为能流与振幅的平方成正比，所以球面波的振幅与 r^{-1} 成正比。

（六）地球介质的品质因子

前面已经提到，如果假设应力和应变随时间简谐地变化，则可以把非完全弹性体当作具有复弹性系数 μ^* 的完全弹性体处理。在这种情况下，以上得到的横波的波动方程变为：

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu^*\nabla^2 v, \tag{9.219}$$

$$\mu^* = \mu_r + i\mu_i,$$

这里，v 代表前面已提到过的 Θ、$\boldsymbol{\omega}$ 的某一分量，u_1、u_2、u_3，φ、$\boldsymbol{\psi}$ 的某一分量，ψ 或 χ 等。对于粘弹性体，μ^* 如 (9.155) 式所示；对于弹滞性体，如 (9.160) 式所示；对于一般的线性体，如(9.168) 式所示。

不失一般性，今考虑沿 x 方向传播的平面简谐横波：

$$v = Ae^{i(\omega t - kx)}。 \tag{9.220}$$

将上式代入 (9.219) 式后可得：

$$\omega^2 = \frac{\mu^*}{\rho}k^2。 \tag{9.221}$$

由上式可以求得：

$$k = \kappa + i\sigma, \tag{9.222}$$

其中，

$$\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu_r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1+(\mu_i/\mu_r)^2}}{1+(\mu_i/\mu_r)^2}, \tag{9.223}$$

$$\sigma^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu_r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+(\mu_i/\mu_r)^2}-1}{1+(\mu_i/\mu_r)^2}, \tag{9.224}$$

所以

$$v = Ae^{-\sigma x}e^{i(\omega t-\kappa x)}。 \tag{9.225}$$

如果 v 代表的是位移,那么波的振动能量为

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 e^{-2\sigma x}\sin^2(\omega t-\kappa x)。 \end{aligned} \tag{9.226}$$

今以 Λ 表示波长: $\Lambda = 2\pi/\kappa$, 则由上式可以求得波在前进了一个波长时损耗的振动能量为:

$$\begin{aligned} \Delta E(x,t) &= E(x,t) - E\left(x+\Lambda, t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ &= E(x,t)(1-e^{-2\sigma\Lambda})。 \end{aligned} \tag{9.227}$$

通常以无量纲量 Q 表示振动能量的相对损耗量:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{2\pi}(1-e^{-2\sigma\Lambda}), \tag{9.228}$$

并把 Q 叫做介质的品质因子。可见,Q 越小,振动的衰减越大;因此,Q 表示了介质的非完全弹性、即介质的内摩擦。

当 $\mu_i \ll \mu_r$ 时,

$$\kappa^2 \doteq \frac{\rho\omega^2}{\mu_r}, \tag{9.229}$$

$$\sigma^2 \doteq \frac{\rho\omega^2}{\mu_r}\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{4}\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\right)^2 \ll \kappa^2, \tag{9.230}$$

从而 $\sigma\Lambda \ll 1$,

$$\frac{1}{Q} \doteq \frac{2\sigma\Lambda}{2\pi} = \frac{2\sigma}{\kappa} = \frac{\mu_i}{\mu_r}。 \tag{9.231}$$

对于粘弹性体,由 (9.155) 式可得, $\mu_i = \omega\nu$, 从而 $\mu_i/\mu_r = \omega\tau'$,

$$\frac{1}{Q} = \frac{\omega\nu}{\mu_r} = \omega\tau'; \tag{9.232}$$

而对于弹滞性体,由 (9.166) 式可得, $\mu_i/\mu_r = 1/\omega\tau$, 从而

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{\omega\tau}。 \tag{9.233}$$

实际地球介质究竟更接近于粘弹性体还是更接近于弹滞性体,目前还不清楚。若设地球介质是弹滞性体,则由钱德勒晃动可以估计地球介质的 Q 值。因为 $\omega = 2\pi/430$ 天,若取 $\tau = 5$ 年,则得 $Q = 25$。用地震波振幅的衰减也可以求得地球内部的 Q 值,但求得的 Q 值随地震波的周期不同而有所不同。现在知道,当波的周期为 10—100 秒左右时,地球的

Q值为200—500。同时，沿地球的深度方向，Q值也有变化。在地幔上部，Q在100—200之间;在地幔下部，Q在1000—2000之间。在液态外核，Q大约为6000；在内核，约为500—1000。这表明，地幔上部由于粘滞性引起的振幅衰减比地幔下部的大。

二、地震射线理论

(一) 费 马 原 理

1.费 马 原 理

射线理论的基础是费马原理。费马原理是：在各向同性的连续介质中，扰动沿着一条走时为稳定值的路径传播。若以 t 表示扰动从 A 点沿着一条路径传到 A' 点所用的时间，以 $v(x_1, x_2, x_3)$ 表示扰动的传播速度，以 l 表示该路径的弧长，则费马原理可以表示为(图 9.11)：

$$t = \int_A^{A'} \frac{dl}{v(x_1, x_2, x_3)} = \text{稳定值。} \tag{9.234}$$

设射线由参数方程

$$x_i = x_i(u), \qquad i = 1, 2, 3。 \tag{9.235}$$

给出，其中 u 是参变量。如果以 $\dot{x}_i$ 表示 dx_i/du，则元弧长

$$dl = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, du, \tag{9.236}$$

于是走时可以表示为：

$$t = \int_u^{u'} w(x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) du, \tag{9.237}$$

A'

A

图 9.11 费马原理

其中

$$w(x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{v(x_1, x_2, x_3)} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \tag{9.238}$$

u 和 u' 是 A 点和 A' 点相应的 u 值。由 A 点到 A' 点走时 t 的值依赖于曲线 $x_i(u)$, $i = 1, 2, 3$，因此它是三个变量函数 $x_i(u)$, $i = 1, 2, 3$ 的泛函。

按照费马原理，(9.237) 式所示的积分沿着射线必须是稳定值，就是说它沿着相邻的路径 $x_i + \delta x_i$ 必须有相同的数值，即 t 的变分 δt 为零：

$$\delta t = \delta \int_u^{u'} w du = 0。 \tag{9.239}$$

2.射 线 方 程

将上式中的变分符号与积分符号互换，便得：

$$\delta t = \int_u^{u'} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) du = 0。 \tag{9.240}$$

其中的 $\delta \dot{x}_i$ 可以写成：

$$\delta \dot{x}_i = \delta \left(\frac{dx_i}{du} \right) = \frac{d}{du} \delta x_i, \tag{9.241}$$

因而积分

$$\int_u^{u'} \frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i du = \int_u^{u'} \frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i} d(\delta x_i)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_u^{u'} - \int_u^{u'} \frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i}\right) \delta x_i du, \tag{9.242}$$

A 点和 A' 点都是固定点，所以 $\delta x_i|_u = \delta x_i|_{u'} = 0$，所以上式右边第一项在代入积分上、下限后为零，于是：

$$\delta t = -\int_u^{u'} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right] \delta x_i du = 0。\tag{9.243}$$

上式对于任意的 δx_i 均成立，所以

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3。\tag{9.244}$$

这是射线所满足的方程，叫欧拉方程。

现在以 $\boldsymbol{s}$ 表示和射线相切的单位向量，以 s_i 表示它的分量：

$$s_i = \frac{dx_i}{dl} = \frac{dx_i/du}{dl/du} = \dot{x}_i / \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \tag{9.245}$$

则由 (9.238) 式和上式可得：

$$\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i} = \mu s_i, \tag{9.246}$$

式中，μ 是波的慢度：

$$\mu = \mu(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{v(x_1, x_2, x_3)}。\tag{9.247}$$

将 (9.246)，(9.238) 式代入 (9.244) 式，即得：

$$\frac{d}{du}(\mu s_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\right) = 0。\tag{9.248}$$

利用 (9.236) 式就可以将上式化为以弧长为参量的射线方程：

$$\frac{d}{dl}(\mu s_i) - \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0。\tag{9.249}$$

如果给定了波的慢度，就可以由这个方程和 (9.245) 式求得射线。这个方程也可以用矢量形式表示，这就是：

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dl} = \nabla \mu。\tag{9.250}$$

式中，向量

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \boldsymbol{s} \tag{9.251}$$

叫做波慢度向量。

3. 球对称情形下的地震射线

作为应用，我们来求球对称情形下的地震射线的方程。这里说的球对称情形是指波速只与半径有关，即：$v = v(r)$。从对称性考虑，这种情形下的射线应是一条平面曲线，

因而采用通过球心和射线平面的平面极坐标比较方便。如图 9.12 所示，设扰动由半径为 R 的球面上的 A 点发出，经过曲线 AA' 到达球面上的 A' 点，P 点为射线上极坐标为 (r, θ) 的任一点。今以 $\dot{r}$ 表示 $dr/d\theta$，则元弧长 dl 为：

$$dl = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}d\theta。\tag{9.252}$$

由 A 点到 P 点所用的时间为：

$$t = \int_A^P \frac{dl}{v} = \int_0^\theta \frac{1}{v}\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}d\theta,\tag{9.253}$$

所以欧拉方程中的函数 w 可以表示为：

$$w(r, \dot{r}) = \frac{1}{v}\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}。\tag{9.254}$$

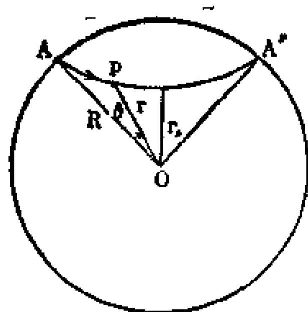


图 9.12　球对称情形下的地震射线

相应的欧拉方程为：

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial w}{\partial r} = 0。\tag{9.255}$$

上式的第一个积分是：

$$\dot{r}\frac{\partial w}{\partial \dot{r}} - w = p,\tag{9.256}$$

式中 p 为积分常数。将 w 的表示式［(9.254) 式］代入上式并化简，即得此情形下的地震射线的微分方程：

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm\frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}。\tag{9.257}$$

对上式从地球半径 R 到 r 积分，就得到射线的参数方程：

$$\theta(r) = \pm\int_R^r \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}dr,\tag{9.258}$$

积分号前的正负号由 $d\theta/dr$ 的正负号决定：$d\theta/dr > 0$ 时取正号；反之，取负号。

当 $dr/d\theta < 0$ 时，射线向下弯曲；反之，向上弯曲。当射线达到最低点时 $dr/d\theta = 0$，此时的半径 r_p 应当满足方程

$$r_p/v(r_p) = p。\tag{9.259}$$

对于连接球心和射线最低点的直线，射线是对称的。若以 Δ 表示震源 A 和射线到达地面上的 A' 点之间的角距离(圆心角)，则从对称性可得：

$$\Delta = 2\int_{r_p}^R \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}dr。\tag{9.260}$$

4. 特征函数和惠更斯原理

设 A 点的坐标为 $x_i(i = 1,2,3)$，A' 点的坐标为 $x_i'(i = 1,2,3)$，那么对于给定的波的慢度 μ，扰动从 A 点传到 A' 点所用的时间

$$t = \int_A^{A'} \mu dl = U(x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3')\tag{9.261}$$

与A点和A'点的位置有关。函数$U(x_1,x_2,x_3;x'_1,x'_2,x'_3)$叫做特征函数。

设BB'是和AA'相距很近的另一条射线（图 9.13）。扰动沿这两条路径传播时所用的时间之差就是t的变分δt。按照(9.252)式，δt可以表示为：

$$\delta t=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_u^{u'}-\int_u^{u'}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial w}{\partial x_i}\right]\delta x_i du。\tag{9.262}$$

按照由费马原理得到的欧拉公式[(9.244)式]，上式右端第二项恒为零。同时，因为$\partial w/\partial \dot{x}_i=\mu s_i=\sigma_i$，所以

$$\delta t=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\delta x_i\Big|_u^{u'}=\sum_{i=1}^{3}(\sigma'_i\delta x'_i-\sigma_i\delta x_i)。\tag{9.263}$$

这就是说，

$$\frac{\partial U}{\partial x'_i}=\sigma'_i,\tag{9.264}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=-\sigma_i。\tag{9.265}$$

式中的σ'_i和σ_i分别是A'点和A点的波慢度向量的分量。

注意到$\sum_{i=1}^{3}\sigma_i'^2=\mu'^2$和$\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^2=\mu^2$，所以

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x'_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x'_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x'_3}\right)^2=\mu'^2,\tag{9.266}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2=\mu^2。\tag{9.267}$$

方程(9.266)[或(9.267)]是特征函数所满足的方程，我们把它叫做特征函数方程。它表明，如果波速的空间分布$v(x_1,x_2,x_3)$已知，则某个扰动的时间场就可以由它确定。

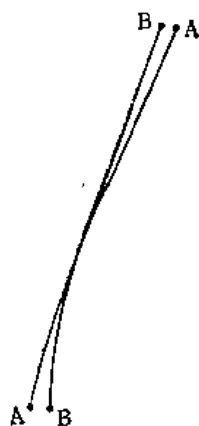


图 9.13 特征函数和惠更斯原理

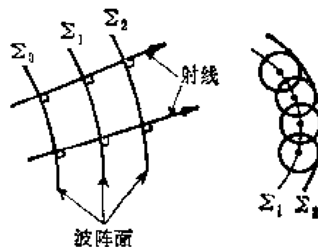


图 9.14 惠更斯原理

如果在各向同性的连续介质中，扰动在t_1时刻的波阵面是Σ_1，那么在$t_1+\Delta t$时刻的波阵面F_2是以F_1上的每点为球心，半径为$v(x_1,x_2,x_3)\Delta t$的元球面的包络面(图 9.14)，$v(x_1,x_2,x_3)$为波阵面上某一点(x_1,x_2,x_3)的扰动传播速度。按照惠更斯原理，波阵面是空间坐标和时间坐标的函数，以隐函数形式表示，即：

$$\Theta(x_1, x_2, x_3; t) = 0 \tag{9.268}$$

如果以显函数形式表示,则为:

$$t = F(x_1, x_2, x_3)。 \tag{9.269}$$

以 $\boldsymbol{n}$ 表示波阵面上任一点的法向量,其分量为:

$$n_i = \frac{dx_i}{dn}。 \tag{9.270}$$

由 (9.269) 式可知,波前的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应满足方程:

$$\frac{dx_1}{\partial F/\partial x_1} = \frac{dx_2}{\partial F/\partial x_2} = \frac{dx_3}{\partial F/\partial x_3}。 \tag{9.271}$$

所以我们可以写出:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \theta \frac{dx_i}{dn}, \tag{9.272}$$

θ 是比例系数。现在,因为

$$\mu = \frac{1}{v} = \frac{dt}{dn} = \frac{dF}{dn}, \tag{9.273}$$

而

$$\frac{dF}{dn} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dn} = \sum_{i=1}^{3} \theta \left(\frac{dx_i}{dn}\right)^2 = \theta, \tag{9.274}$$

所以

$$\theta = \mu。 \tag{9.275}$$

将上式代入 (9.272) 式,然后对 (9.272) 式两边平方求和,就得到函数 $F(x_1, x_2, x_3)$ 所满足的方程:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2 = \mu^2。 \tag{9.276}$$

这个方程叫波前方程,它和特征函数方程 (9.267) 式不仅形式上完全一样,而且 F 和 U 都具有时间的量纲。尽管如此,两者的根据是不同的,波前方程是由惠更斯推导出来的,而特征函数方程则是根据费马原理推导出来的。不过,它们在形式上的相同意味着波前和射线之间有一定的联系。实际上,波阵面的法线和射线是一致的。为了证明这一点,我们将 (9.275) 式代入 (9.272) 式,然后在两边对 n 微商:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn}\left(\mu \frac{dx_i}{dn}\right) &= \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dn}。 \end{aligned} \tag{9.277}$$

对上式左边再运用一次 (9.272) 式,即得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn}\left(\mu \frac{dx_i}{dn}\right) &= \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_j}, \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2。 \end{aligned} \tag{9.278}$$

最后，由 (9.276) 式就可得到：

$$\frac{d}{dn}\left(\mu\frac{dx_i}{dn}\right)=\frac{\partial\mu}{\partial x_i},\tag{9.279}$$

这是波阵面上任一点的法向所满足的方程，它与射线方程 (9.249) 完全一致。所以如果起始点相同，射线与波阵面的法线便完全重合。

5. 波动方程向射线方程的过渡

在各向同性的连续介质中，以位移表示的运动方程的向量形式为[参见 (9.83) 式]：

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\nabla\Theta+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\Theta\nabla\lambda+\nabla\mu\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu+\rho\boldsymbol{X},\tag{9.280}$$

对上式两边分别作散度和旋度运算，则得：

$$\rho\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}+\nabla\rho\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\Theta+\nabla(\lambda+\mu)\cdot\nabla\Theta+\nabla\mu\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}$$

$$+\nabla\cdot(\Theta\nabla\lambda)+\nabla\cdot(\nabla\mu\cdot\nabla\boldsymbol{u})+\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu)+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{X}),\tag{9.281}$$

$$\rho\frac{\partial^2(2\boldsymbol{\omega})}{\partial t^2}+\nabla\rho\times\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\mu\nabla^2(2\boldsymbol{\omega})+\nabla(\lambda+\mu)\times\nabla\Theta+\nabla\mu\times\nabla^2\boldsymbol{u}+\nabla\times(\Theta\nabla\lambda)$$

$$+\nabla\times(\nabla\mu\cdot\nabla\boldsymbol{u})+\nabla\times(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mu)+\nabla\times(\rho\boldsymbol{X})。\tag{9.282}$$

在这种情形下，体膨胀和旋转是耦合的。如果在一个波长 Λ 范围内，λ，μ 和 ρ 的相对变化很小：$\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\Lambda$，$\frac{\nabla\mu}{\mu}\Lambda$ 和 $\frac{\nabla\rho}{\rho}\Lambda\ll 1$；也就是说，如果在与一个波长大小可相比拟的距离内，λ，μ 和 ρ 仍可以近似地看作常数时，那么以上两式就化为通常的波动方程：

$$\rho\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\Theta,\tag{9.283}$$

$$\rho\frac{\partial^2(2\boldsymbol{\omega})}{\partial t^2}=\mu\nabla^2(2\boldsymbol{\omega})。\tag{9.284}$$

并且，膨胀和旋转两种运动可以彼此分开。以上两式表明，Θ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量都满足波动方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=v^2\nabla^2\varphi,\tag{9.285}$$

式中，φ 表示 Θ 或 $\boldsymbol{\omega}$，而 v 表示波速 α 或 β [参见 (9.178) 和 (9.179) 式]，只是波速一般不再是常数，而是位置的函数：

$$v=v(x_1,x_2,x_3)。\tag{9.286}$$

现在，设波动方程 (9.285) 的解为：

$$\varphi=A(x_1,x_2,x_3)e^{i[\omega t-k_0S(x_1,x_2,x_3)]},\tag{9.287}$$

式中，

$$k_0=\omega/v_0,\tag{9.288}$$

v_0 是某一参考速度，$A(x_1,x_2,x_3)$ 为波的振幅函数，$S(x_1,x_2,x_3)$ 为相位函数。不失一般性，假定它们都是实函数。

公式 (9.287) 式表示一个行波，其相位 θ 为：

$$\theta = \omega t - k_0 S(x_1, x_2, x_3)。 \tag{9.289}$$

我们定义相速度 V 为沿等位相面的法向 $\boldsymbol{n}$ 传播的速度。根据这个定义，当等位相面以相速度 V 前进时，位相保持不变，所以

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - k_0 \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \omega - k_0 \frac{dS}{dn} V = \omega - k_0 |\nabla S| V = 0,$$

由此求得相速度

$$V = \frac{\omega}{k_0 |\nabla S|}。 \tag{9.290}$$

由上式得

$$|\nabla S|^2 = \left(\frac{v_0}{V}\right)^2, \tag{9.291}$$

或

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{V}\right)^2。 \tag{9.292}$$

如果我们将 dS 写成 $v_0 dt$：

$$dS = v_0 dt, \tag{9.293}$$

则上式化为

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{V^2}, \tag{9.294}$$

这表明波动方程的解 (9.287) 中的相位函数满足特征方程。上列方程和由费马原理得到的特征函数形式一样，只不过方程右边的速度是相速度 V，而不是扰动传播速度 v。

现在将 (9.287) 式代入 (9.285) 式，则得：

$$\left\{\left[(\nabla S)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 - \frac{\nabla^2 A}{k_0^2 A}\right] + \frac{2i}{k_0}\left(\frac{1}{2}\nabla^2 S + \frac{\nabla A \cdot \nabla S}{A}\right)\right\} \varphi = 0, \tag{9.295}$$

式中，

$$k = \omega / v。 \tag{9.296}$$

既然 (9.287) 式是波动方程的解，那么函数 S 和 A 应满足方程：

$$(\nabla S)^2 - \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 - \frac{\nabla^2 A}{k_0^2 A} = 0 \tag{9.297}$$

和

$$\frac{2}{k_0}\left(\frac{1}{2}\nabla^2 S + \frac{\nabla A \cdot \nabla S}{A}\right) = 0。 \tag{9.298}$$

由 (9.297) 式我们看到，如果

$$(\nabla S)^2 \gg \left|\frac{\nabla^2 A}{k_0^2 A}\right|, \tag{9.299}$$

那么这个方程就转化为：

$$(\nabla S)^2 = \left(\frac{k}{k_0}\right)^2, \tag{9.300}$$

也就是转化为：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2=\left(\frac{v_0}{v}\right)^2。\tag{9.301}$$

或者，运用 (9.293) 式即得：

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial x_3}\right)^2=\frac{1}{v^2}。\tag{9.302}$$

对比上式与特征函数方程，我们立刻得出：如果 (9.299) 式所示的条件成立，那么求解波动方程就转化为求解特征函数方程。对比上式与 (9.294) 式，我们得出，在 (9.299) 式所示的条件下，相速度与传播速度是相等的：

$$V=v_0。$$

如前所述，波前方程、特征函数方程都可以化到射线方程。所以我们可以说，在 (9.299) 式所示条件下，如果我们关心的只是扰动传播的运动学特征，那么射线方程便可作为波动方程的一个很好的近似。

现在我们来考察 (9.299) 式所示的条件。如果以 S' 表示 $\partial S/\partial x_i$，A' 表示 $\partial A/\partial x_i$，那么这个条件可以表示为：

$$(S')^2\gg\frac{A''}{k_0^2A}。\tag{9.303}$$

如果以 α_i 表示等位相面的法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，那么

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=\alpha_i\frac{dS}{dn}=\alpha_i\frac{v_0dt}{V\,dt}=\alpha_i\frac{v_0}{V},\tag{9.304}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2}=-\frac{\alpha_i}{V^2}v_0\frac{\partial V}{\partial x_i},\tag{9.305}$$

所以，

$$S'\sim\frac{v_0}{v},\tag{9.306}$$

$$S''\sim\frac{v_0v'}{v^2},\tag{9.307}$$

这里，v' 表示 $\partial v/\partial x_i$。由(9.298)式我们可得：

$$\frac{A'}{A}\sim\frac{S''}{S'},\tag{9.308}$$

利用 (9.306) 和 (9.307) 两式可得：

$$\frac{A'}{A}\sim\frac{v'}{v}\tag{9.309}$$

或

$$A'\sim\frac{A}{v}v'。\tag{9.310}$$

对上式两边微商可得：

$$A''\sim\frac{A'v'}{v}+\frac{Av''}{v}-\frac{Av'^2}{v^2}。\tag{9.311}$$

由 (9.310) 式可知，上式右边的第一项和第三项互相抵消，因此，

$$\frac{A''}{A} \sim \frac{v''}{v}。 \tag{9.312}$$

将 (9.306) 和上式代入 (9.303) 式，得：

$$1 \gg \frac{v''}{k^2 v}。 \tag{9.313}$$

因为波长 $\Lambda = 2\pi/k$，所以 $v''/k \sim \delta v'$。$\delta v'$ 是 v' 在一个波长范围内的变化。$kv \sim \omega$。这样上式就化为：

$$\delta v' \ll \omega。 \tag{9.314}$$

这说明，只要频率足够高，使得在一个波长范围内速度梯度的变化比频率小得多时，射线方程便是波动方程的一个很好的近似。

6. 斯内尔（Snell）定律

射线经过介质内部的间断面时，其方向要发生突然的变化。假设在间断面两边有二个很接近的点 P 和 Q(图 9.15)。在 P, Q 点的速度各为 v_1 和 v_2。若过 P, Q 的射线为 $\overline{POQ}$，则因为 P, Q 很接近，$\overline{PO}$ 和 $\overline{OQ}$ 都很短，可以认为它们近似地都是直线。扰动沿 $\overline{POQ}$ 从 P 点传到 Q 点所用的时间为：

$$t = \frac{\overline{PO}}{v_1} + \frac{\overline{OQ}}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a - x)^2}}{v_2}, \tag{9.315}$$

式中，h_1, h_2, x, a 的意义如图 9.15 所示。根据费马原理 $\delta t = 0$，可以求得：

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}, \tag{9.316}$$

i_1 和 i_2 分别为射线 $\overline{PO}$ 和 $\overline{OQ}$ 与间断面法线的夹角。

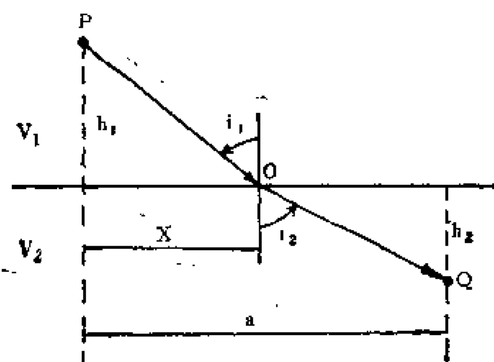


图 9.15 斯内尔定律

这个关系叫做斯内尔定律，它表示了界面附近射线方向的关系，而与介质均匀与否无关。因为如果介质不均匀，可取 P, Q 与界面极接近，上述推导仍成立。此外，P 点和 Q 点也不一定要在界面两边，它们也可以同在一边。所以这个定律可用于折射或反射纵波或横波。

射线只是运动学的概念，它并不涉及扰动的振幅或能量。然而在实际计算中，常常将动力学的概念与射线联合应用。此时，所根据的假定已超出费马原理的范围，形成了一种混合的概念。某些理论上费解的现象与此不无关系。

（二）层状介质中的地震射线

1. 走 时 方 程

在一个小范围内，我们可以忽略地球表面和层的界面的曲率而把它们当作平面。假设有 n 个平行层，每层的介质都是均匀和各向同性，各层的厚度分别为 $h_1, h_2, \cdots h_n$，速度分别为 $v_1, v_2, \cdots v_n$。取直角坐标系，将 x 轴与 y 轴置于自由表面，z 轴垂直向下。由于问题具有轴对称性，所以只需讨论 xoz 平面内的射线。该射线是一条折线。扰动从地面上的 O 点传到第 n 层底面的 A' 点（图 9.16）所用的时间 t 为：

$$t = \sum_{k=1}^{n} h_k / v_k \cos i_k, \tag{9.317}$$

而 A' 点的坐标 x 为：

$$x = \sum_{k=1}^{n} h_k \tan i_k。 \tag{9.318}$$

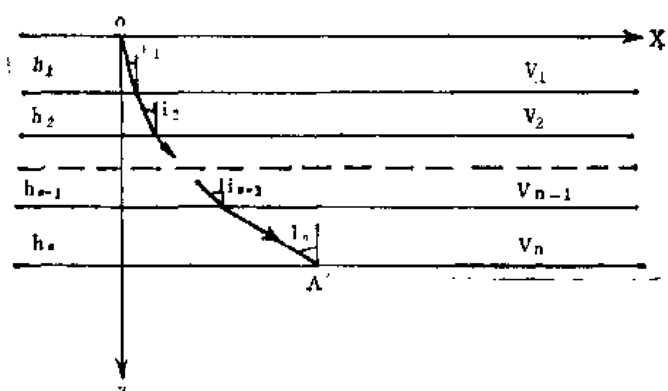


图 9.16 水平层状介质中的地震射线

根据斯内尔定律，我们有：

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} = \cdots = \frac{\sin i_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\sin i_n}{v_n} = p,$$

所以

$$t = \sum_{k=1}^{n} h_k v_k^{-1} (1 - p^2 v_k^2)^{-1/2}, \tag{9.319}$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} p h_k v_k (1 - p^2 v_k^2)^{-1/2}。 \tag{9.320}$$

在上两式中令 $h_k \to 0, n \to \infty$，取极限就得到扰动传播速度随深度 z 连续变化即 $v = v(z)$ 情况下的相应的公式：

$$t = \int_0^h v^{-1} (1 - p^2 v^2)^{-1/2} dz, \tag{9.321}$$

$$x = \int_0^h p v (1 - p^2 v^2)^{-1/2} dz。 \tag{9.322}$$

2. 射线的曲率

根据平面曲线的曲率公式:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2x}{dz^2}\left[1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\right]^{-3/2}, \tag{9.323}$$

可以求得水平层状介质中地震射线的曲率。为此先将(9.323)式所示的积分的上限 h 换成 z,代入上式可得:

$$\frac{dx}{dz}=pv(1-p^2v^2)^{-1/2},$$

$$\frac{d^2x}{dz^2}=p(1-p^2v^2)^{-3/2}\frac{dv}{dz},$$

从而,曲率

$$\frac{1}{\rho}=p\frac{dv}{dz}=\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dz}。 \tag{9.324}$$

若速度随深度线性增加,即

$$v(z)=v_0+az, \tag{9.325}$$

则将上式代入(9.324)式后可得:

$$\frac{1}{\rho}=pa=常数。 \tag{9.326}$$

这个结果表明,在速度随深度线性增加的情形下,射线是半径 $1/pa$ 的圆弧。

若以 i_0 表示 $z=0$ 时的 i 角,则射线最低点的深度 d 及震中距 Δ 分别为:

$$d=\frac{1}{a}[v(d)-v_0]=\frac{v_0}{a}\left(\frac{1-\sin i_0}{\sin i_0}\right), \tag{9.327}$$

$$\Delta=\frac{2d\cos i_0}{1-\sin i_0}。 \tag{9.328}$$

由于对称性,角 i_0 就是射线到达地面时的入射角,它可以从地面的扰动传播速度和视速度的比值来求:

$$\sin i_0=\frac{v_0\delta t}{\bar{v}\delta t}=\frac{v_0}{\bar{v}}。 \tag{9.329}$$

若速度的平方随深度线性增加,不难证明此射线的形状是一条摆线弧。

在实际应用(如地震勘探或地震测深工作)中,除了假设速度随深度线性增加的情形外还曾利用 $v=v(z)$ 的其它函数形式来作计算。但实际问题在计算时已作了很大的近似,采取 $v=v(z)$ 的更复杂的形式并不能使解答增加太多的精确性,反而增添不少计算上的困难。所以在实际应用中,除假设介质是均匀的情况外,通常只作到速度随深度线性增加的情形。

3. 地震波在单个水平层中的走时

设在一速度为 v_2 的半无限介质上覆盖着一厚度为 H,速度为 v_1 的平行层,震源为 F,其深度为 h,接收点 S 在上层介质的表面上(图 9.17)。此时,在 S 点可以接收到沿三条不

同路径到达的波：①直达波(以 $\bar{P}$ 或 P_g 表示)，在上层介质内从 F 点直接到达 S 点的波。②反射波(以 P_{11} 或 P_MP 表示)，在两种介质的分界面上发生反射然后到达 S 点的波。③侧面波(首波，以 P_n 表示)，若 $v_2 > v_1$，在入射波在分界面的入射角满足关系式

$$\sin i_c = v_1/v_2 \tag{9.330}$$

时，在 S 点不但能接收到经过如图 9.17 的折线 $FABS$ 所示路径的波，并且如果 Δ 够大，这个波比直达波到得还早。入射波以角度 i_c 投射到分界面上，然后沿着分界面以速度 v_2 滑行，同时以同样大的角度 i_c 折射到地面上。实际上，如果我们以 i 表示 $\overline{FC}$ 和 $\overline{BR}$ 与垂线的夹角，以 Δ 表示震中距，则侧面波(首波)的走时

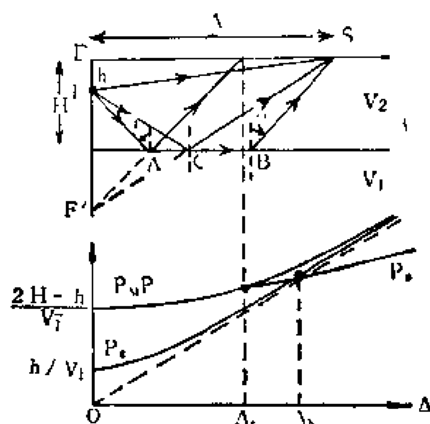


图 9.17 单个水平层中的地震波及其走时

$$t = \frac{(2H-h)}{v_1 \cos i} + \frac{\Delta - (2H-h)\tan i}{v_2}, \tag{9.331}$$

角 i 可以由费马原理求得。按照费马原理，$\delta t/\delta i|_{i=i_c} = 0$，我们得：

$$\left.\frac{\delta t}{\delta i}\right|_{i=i_c} = \left[\frac{(2H-h)\sin i}{v_1\cos^2 i} - \frac{(2H-h)}{v_2\cos^2 i}\right]_{i=i_c} = 0,$$

因此

$$i_c = \sin^{-1}\frac{v_1}{v_2}。$$

不难验证，$\delta^2 t/\delta i^2|_{i=i_c} = 1/v_1\cos i_c > 0$，这表明 $FABS$ 所示的路径是一条走时取最小值的路径。

上述三种波的走时很容易求得。对于直达波，

$$t_{\bar{P}} = \sqrt{\Delta^2 + h^2}/v_1; \tag{9.332}$$

对于反射波，

$$t_{P_{11}} = \sqrt{\Delta^2 + (2H-h)^2}/v_1; \tag{9.333}$$

对于首波，注意到 $i_c = \sin^{-1}\frac{v_1}{v_2}$，则由 (9.331) 式即得：

$$t_{P_n} = \frac{\Delta}{v_2} + \frac{(2H-h)\cos i_c}{v_1}, \quad \Delta > \Delta_c = (2H-h)\tan i_c。 \tag{9.334}$$

直达波的走时曲线是一条双曲线，以直线 $t = \Delta/v_1$ 为其渐近线。反射波的走时曲线也是一条以直线 $t = \Delta/v_1$ 为渐近线的双曲线。首波的走时曲线是一条直线，斜率为 $1/v_2$，它与反射波的走时曲线在 $\Delta = \Delta_c = (2H-h)\tan i_c$ 相切。当 $\Delta < \Delta_c$ 时不存在首波。

利用走时曲线，可以求出水平层的厚度。令 (9.333) 式中的 $\Delta = 0$ 即得 $t_{P_{11}} = t_0 = \frac{2H-h}{v_1}$。已知 t_0，v_1 和 h，即可由 $H = \frac{1}{2}(v_1 t_0 + h)$ 计算层的厚度 H。

如果以 t_0' 表示首波走时曲线在时间轴上的截距，则：

$$t_0' = \frac{(2H-h)\cos i_c}{v_1}。 \tag{9.335}$$

所以已知 t_0', v_1, i_c 和 h，便可由下式求得 H：

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1 t_0'}{\cos i} + h\right)。\tag{9.336}$$

利用首波与反射波走时曲线的切点也可以求厚度。如前所示，这两条走时曲线在临界距离 Δ_c 处相切，所以如果求得它们的切点即可求得 H：

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_c}{\tan i_c} + h\right) = \frac{1}{2}\left[\Delta_c \frac{v_2}{v_1}\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} + h\right]。\tag{9.337}$$

4. 多层介质中地震首波的走时

如果介质分成 n 层，则其首波的走时为(图 9.18)：

$$t = \frac{\Delta}{v_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2h_k \cos i_k}{v_k}。\tag{9.338}$$

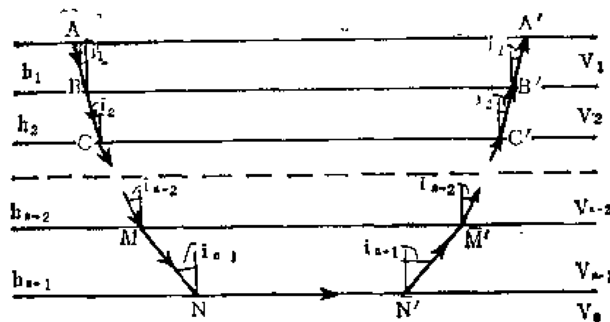


图 9.18　多层介质中地震首波的射线

(三) 地震射线在斜界面的折射和反射

1. 首　波

如果两种均匀介质的分界面是一斜面，其交角是 ω，设震源 S 在地面上，它到斜面的距离为 h，接收点 B 到斜面的距离为 h_1。若在 S 的上坡接收，则

$$h_1 = h - \Delta \sin \omega,\tag{9.339}$$

式中 Δ 为震中距；若在下坡接收，则

$$h_1 = h + \Delta \sin \omega。\tag{9.340}$$

首波的走时为：

$$t = \frac{(h + h_1)\cos i_c}{v_1} + \frac{\Delta \cos \omega}{v_2},\tag{9.341}$$

或者，

$$t = \frac{1}{v_1}\left[\Delta \sin (i_c \mp \omega) + 2h \cos i_c\right],\tag{9.342}$$

ω 前的符号应这样取：当在上坡接收时，取负号；当在下坡接收时，取正号。

因为视速度

$$\bar{v} = d\Delta/dt, \tag{9.343}$$

将(9.342)式代入上式，即得：

$$\bar{v} = v_1/\sin(i_c \mp \omega), \tag{9.344}$$

式中 ω 前的符号取法与(9.342)式相同。上式说明，在倾斜界面情形下，首波视速度与接收点的位置有关。在上坡接收时，特别是当 $i_c = \omega$ 时，$\bar{v} \to \infty$。这是因为波阵面与地表面互相平行，波前同时到达爆炸点上坡的二个相近的点的缘故。

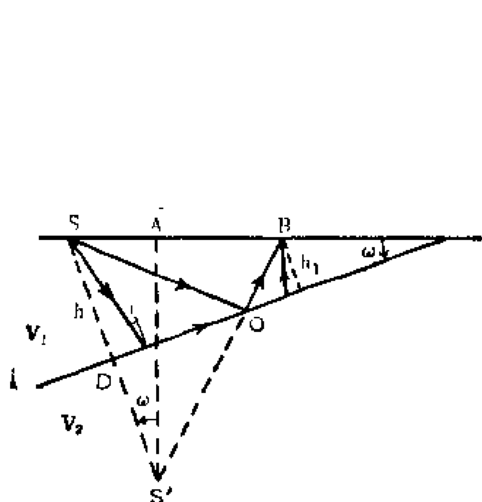


图 9.19 地震射线在斜界面的折射和反射

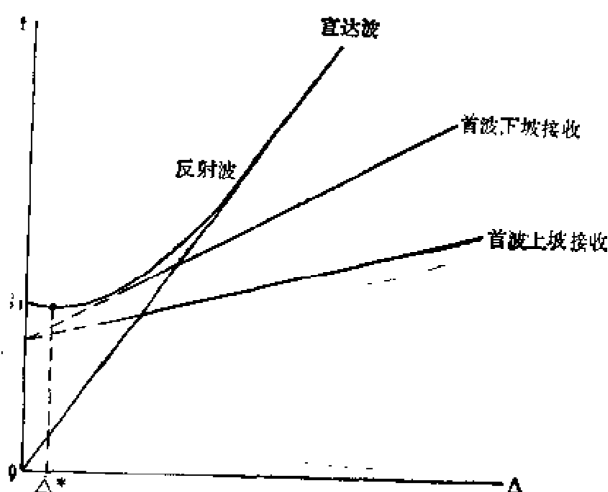


图 9.20 斜界面的首波和反射波的走时曲线

斜界面的首波的走时曲线如图 9.20 所示。由直达波的走时曲线的斜率可以求得 v_1。知道了 v_1 后，由上坡接收和下坡接收的首波以及直达波走时曲线的斜率可以进一步求得 i_c 和 ω。无论是上坡接收还是下坡接收，首波的走时曲线在纵轴的截距都是

$$t_i = \frac{2h\cos i_c}{v_1}, \tag{9.345}$$

式中，只有 h 是未知的，所以便可由 i_c, v_1 和 t_i 求出 h。

2. 反射波

在倾斜界面情形下，反射波的走时是：

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{(2h\cos\omega)^2 + (\Delta \mp 2h\sin\omega)^2}, \tag{9.346}$$

或者写成：

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{\Delta^2 + 4h^2 \mp 4\Delta h\sin\omega}, \tag{9.347}$$

负号对应于上坡接收，正号对应于下坡接收。这种情况下的走时曲线仍然是一条双曲线，但它的对称点的横坐标是(图 9.20)：

$$\Delta^* = 2h\sin\omega。 \tag{9.348}$$

将(9.347)式两边平方再微分即得：

$$2v_1^2 t\,dt = 2\Delta d\Delta \mp 4h\sin\omega d\Delta, \tag{9.349}$$

所以视速度为

$$\bar{v} = \frac{v_1^2 t}{\Delta \mp 2h \sin \omega}。\tag{9.350}$$

若在震源 S 附近接收，此时 $\Delta \doteq 0$，因而 $2h = v_1 t_0$，所以

$$\sin \omega = \mp \left. \frac{v_1}{\bar{v}} \right|_{\Delta \doteq 0}。\tag{9.351}$$

$\bar{v}$ 可以从走时曲线上量出，所以由上式便可求出斜界面的倾角 ω。但是上式只适于用来求大倾角。因为在推导上式时用了 $\Delta \doteq 0$ 的假定，而这只有在 $2h \sin \omega \gg \Delta$ 也就是倾角较大时才成立。对于小倾角情形，必须用其它方法。

（四）球对称介质中的地震射线

地球可以近似地认为是由无数个同心球壳或连续变化的球对称介质组成的。由于对称性，我们只须讨论在任何一个大圆面内的射线。

1. 射线参数

图 9.21 表示由均匀的同心球层组成的介质。在速度为 v_1 的球层中，射线段为 P_0P_1，在速度为 v_2 的球层中，射线段为 P_1P_2。根据斯内尔定律我们有：

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_1'}{v_2}。\tag{9.352}$$

在 ΔOP_1P_2 中，正弦定理给出：

$$\frac{\sin i_1'}{r_2} = \frac{\sin i_2}{r_1},\tag{9.353}$$

所以

$$\frac{r_1 \sin i_1}{v_1} = \frac{r_2 \sin i_2}{v_2}。\tag{9.354}$$

令层的数目无限增加，层的厚度无限减小，就过渡到速度连续变化情形：$v = v(r)$，射线由折线变为一条光滑曲线。在射线上任一点都有：

$$\frac{r \sin i}{v} = \frac{r_0 \sin i_0}{v_0} = p。\tag{9.355}$$

式中，i 是射线与法线（也就是半径 r）的夹角，下角标"0"表示变量取球面上的值，p 是常数，叫射线参数，当半径和地面上的速度给定后，射线参数只与射线对地面的入射角有关。不同的 p 值对应不同的入射角，或者说，对应于不同形状的射线。

若令

$$\eta(r) = \frac{r}{v(r)},\tag{9.356}$$

则可将射线参数 p 表示为

$$p = \eta_0 \sin i_0 \tag{9.357}$$

2. 本多夫（Benndorf）定律

射线参数和走时曲线有一个很重要的关系。设射线 FJ 的入射角是 i_0(图 9.22)，其走时是 t。在同一平面内另一条邻近的射线 FJ' 的走时的增量为 δt。由 J 向 FJ' 作垂线，JN 是波阵面，因而走时差是由 FJ' 引起的。若以 $\bar{v}_0$ 代表射线在地面的视速度，则由 $\triangle JJ'N$ 可得:

$$\sin i_0 = \frac{\overline{J'N}}{\overline{JJ'}} = \frac{v_0 \delta t}{\bar{v}_0 \delta t} = \frac{v_0}{\bar{v}_0}。 \tag{9.358}$$

将上式代入 (9.355) 式即得:

$$p = \frac{r_0}{v_0}\frac{v_0}{\bar{v}_0} = \frac{r_0}{\bar{v}_0} = r_0\frac{dt}{d\Delta} = \frac{dt}{d\theta}。 \tag{9.359}$$

这就是说，射线参数 p 就是走时曲线的斜率 $dt/d\theta$。射线参数和走时曲线的这个关系叫做本多夫定律。

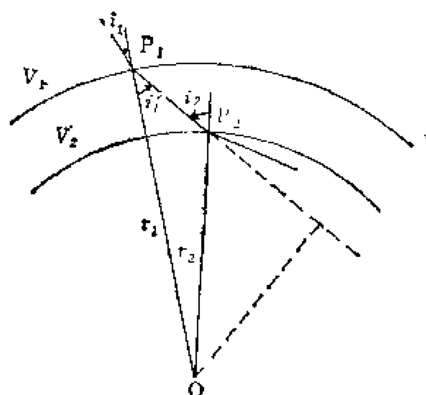


图 9.21 球对称介质中的地震射线

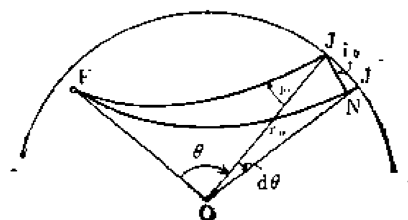


图 9.22 本多夫定律

如果速度 $v(r)$ 不但是连续的，而且随深度而增加 ($dv/dr < 0$)，那么射线是一条光滑的凸向球心的曲线，并有最低点。由 (9.355) 式可知，在最低点时，$i = \pi/2$，所以

$$p = \frac{r_p}{v(r_p)}。 \tag{9.360}$$

r 的下角标“p”表示 r 取射线最低点处的值。由 (9.355)、(9.358) 和上式得:

$$\frac{r_p}{v(r_p)} = \frac{r_0}{\bar{v}_0}。 \tag{9.361}$$

上式表明，如果已知任意一条射线的 r_p 及其在地面上的视速度 $\bar{v}_0$，就可根据上式来求地球内部半径为 r_p 处的速度 $v(r_p)$。

3. 射线的走时

考虑从任意的 r 到 $r+dr$ 的一小段射线。如图 9.23 所示，

$$\tan i = \frac{r d\theta}{|dr|}, \tag{9.362}$$

因此，

$$d\theta = \frac{\tan i}{r}|dr|, \tag{9.363}$$

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{|dr|}{v\cos i}, \tag{9.364}$$

所以射线上任意两点 r_1 和 r_2 之间的走时曲线的参数方程为：

$$\theta = \int_{r_1}^{r_2} d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tan i}{r}|dr|, \tag{9.365}$$

$$t = \int_{r_1}^{r_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{v\cos i}|dr|。 \tag{9.366}$$

用公式 (9.355) 替换以上两式中的 i，可得：

$$\theta = \int_{r_1}^{r_2} pr^{-1}(\eta^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}}|dr|, \tag{9.367}$$

$$t = \int_{r_1}^{r_2} \eta^2 r^{-1}(\eta^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}}|dr|。 \tag{9.368}$$

由 (9.360) 和 (9.356) 式可知：

$$p = \eta(r_p)。 \tag{9.369}$$

由 (9.367) 式可知，$\eta = p$ 时也即 $\eta = \eta(r_p)$ 时 $dr/d\theta = 0$，此时射线达到最低点。

4. 射线的曲率

射线的曲率可以直接由曲率的定义出发来求。设 $\overline{FJ}$ 是一条从震源 F 到地球表面上的一点 J 的地震射线，L 是其最低点(图 9.24)。$\overline{PM}$ 和 $\overline{PN}$ 分别为射线在坐标为 (r, θ) 的 P 点的切线和法线，M 点和 N 点分别是它们和 $\overline{OL}$ 及其沿长线的交点。以 ω 表示$\angle PNL$，ϕ 表示$\angle PML$，i 表示$\angle MPO$，θ 表示$\angle POL$。以 l 表示弧长 $\overset{\frown}{PL}$。以 ρ 表示曲率半径，则曲率

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{dl}。 \tag{9.370}$$

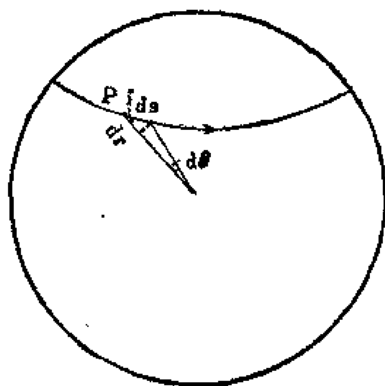


图 9.23　射线的走时

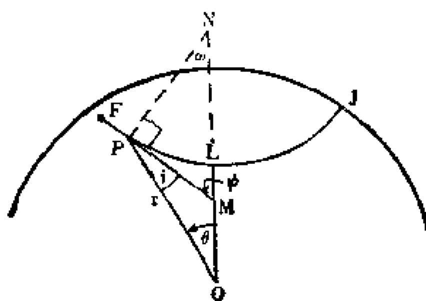


图 9.24　射线的曲率

由图 9.24 可知，$\omega = \frac{\pi}{2} - \phi$，$\phi = i + \theta$，所以 $\omega = \frac{\pi}{2} - i - \theta$，从而

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{di}{dl} - \frac{d\theta}{dl}。 \tag{9.371}$$

因为 $\sin i = \frac{rd\theta}{dl}$, $\cos i = \frac{dr}{dl}$, 所以

$$\frac{1}{\rho} = -\cos i \frac{di}{dr} - \frac{\sin i}{r}。 \tag{9.372}$$

对 (9.355) 两边微商得:

$$\frac{\sin i}{v} + \frac{r\cos i}{v}\frac{di}{dr} - \frac{r\sin i}{v^2}\frac{dv}{dr} = 0。 \tag{9.373}$$

由上式解出 $\frac{di}{dr}$, 然后代入 (9.372) 式即得:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr}。 \tag{9.374}$$

由上式我们看到,$\rho\sin i$ 仅仅是 r 的函数:

$$\rho\sin i = -v\Big/\frac{dv}{dr} = f(r), \tag{9.375}$$

所以如果有若干条射线都通过半径为 r 的点,则在这些点上

$$\rho_1\sin i_1 = \rho_2\sin i_2 = \cdots = 常数。 \tag{9.376}$$

根据公式 (9.374),我们可以对射线的几何性质作一些简单的讨论:

①若 $v(r) = v_0$, v_0 为常数。 则 $\rho \to \infty$, 射线是一条直线。 当震源和接收点都在地面时走时为

$$T = 2\frac{r_0}{v_0}\sin\frac{\Delta}{2}。 \tag{9.377}$$

②若 $v(r)$ 随深度的增加而增加,即 $\frac{dv}{dr} < 0$,则 $\rho > 0$,射线凸向球心并有最低点。

③若 $v(r)$ 随深度的增加而减少,即 $\frac{dv}{dr} > 0$, 则 $\rho < 0$, 射线凹向球心。这时有三种情况。第一种情况是 $0 < \frac{dv}{dr} < \frac{v}{r}$。在这种情况下, $-\frac{1}{\rho} = \frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr} < \frac{\sin i}{r} < \frac{1}{r}$,即曲率半径 $|\rho| > r$。第二种情况是 $\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r}$。在这种情况下, 曲率半径 $-\frac{1}{\rho} = \frac{\sin i}{r}$, $v = Cr$, C 是常数,所以 $p = \frac{\sin i}{C}$,或者说 $\sin i = Cp$, 也就是射线的入射角保持不变。由 (9.367) 式得:

$$-\frac{dr}{d\theta} = p^{-1}r(C^{-2} - p^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{9.378}$$

即

$$dr = -br\,d\theta, \tag{9.379}$$

式中, b 是常数:

$$b = p^{-1}\sqrt{C^{-2} - p^2}, \tag{9.380}$$

解 (9.379) 式得:

$$r = r_0 e^{-b\theta}, \tag{9.381}$$

r_0 是地球半径。这个结果说明,在这种情况下,地震射线成螺旋线卷入地心。第三种情况

是 $\frac{v}{r} < \frac{dv}{dr}$。在这种情况下，$-\frac{1}{\rho} > \frac{\sin i}{r}$，曲率半径总是小于 $\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r}$ 情况下的曲率半径，因此地震射线比上述情况更快地卷入地心。

5. 地球内部的速度异常区对地震射线的影响

一般地说，在地球内部，地震波的速度随深度的增加而增加。但地球内部还存在许多速度异常区及间断面，它们对射线的几何形状及走时曲线都有影响。

如果在地球内部的有些区域速度下降，满足不等式 $0 < \frac{dv}{dr} < \frac{v}{r}$。在这种情形下(图 9.25a)，地面上有一片区域接收不到射线，这片区域叫阴影区，相应地走时曲线出现一段空白。

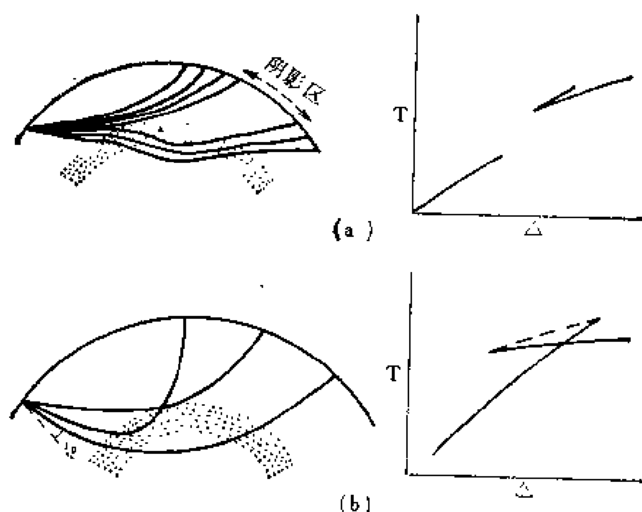


图 9.25　低速层和高速层对地震射线的影响

a 低速层　　b 高速层

如果在有的层里速度随深度迅速增加，那么在这个层里射线弯曲得特别厉害，因而出现在较近的震中距上(图 9.25b 中的虚线)，这使得走时曲线上出现“打结”的现象。如果这一层很薄以至消失，那么在走时曲线上就不出现虚线所示的那段。

6. 震　　相

地球内部最突出的一个间断面是地核和地幔之间的分界面。我们已经知道，地球的惯量矩为 $I = 0.3333Ma^2$，M是地球质量，a 是半径。如果地球的密度是均匀的话，I/Ma^2 应当等于 0.4，而不是 0.3333。这个差异说明靠近地心的那部份地球介质的密度较其余部分的密度高。这是上一世纪早已知道的事实。1906 年，奥尔登姆 (Oldham) 根据穿过地球内部到达对蹠点的 P 波走时比予期的延迟，首先提出了地球内部有一个速度比其外部低的地核的看法，并予言会出现波的阴影区。1912 年古登堡 (B. Gutenberg) 证实，对于 P 波来说，在震中距 $\Delta = 105°$ 和 $\Delta = 143°$ 之间确实有一个阴影区；而在刚超过 143° 的地方有一个由地震波的“焦散”现象引起的相当强的波(图 9.26)。他估计地核界面的深度为 2900 公里，并确定了核内的 P 波速度。接着他预言 P 波和 S 波会在边界发生反射，并且

认为可以观测到这些反射波。但事与愿违，这些反射波多年未被观测到，原因是在许多地震的记录中，这些反射波到达时受到了面波的干扰。1939 年，杰弗瑞斯（H. Jeffreys）用他和布伦（K. E. Bullen）的走时表确定地核界面的深度为（2898±4）公里。古登堡和杰弗瑞斯两者的结果极为一致。迄今这个数据仍为地球物理学界所公认。

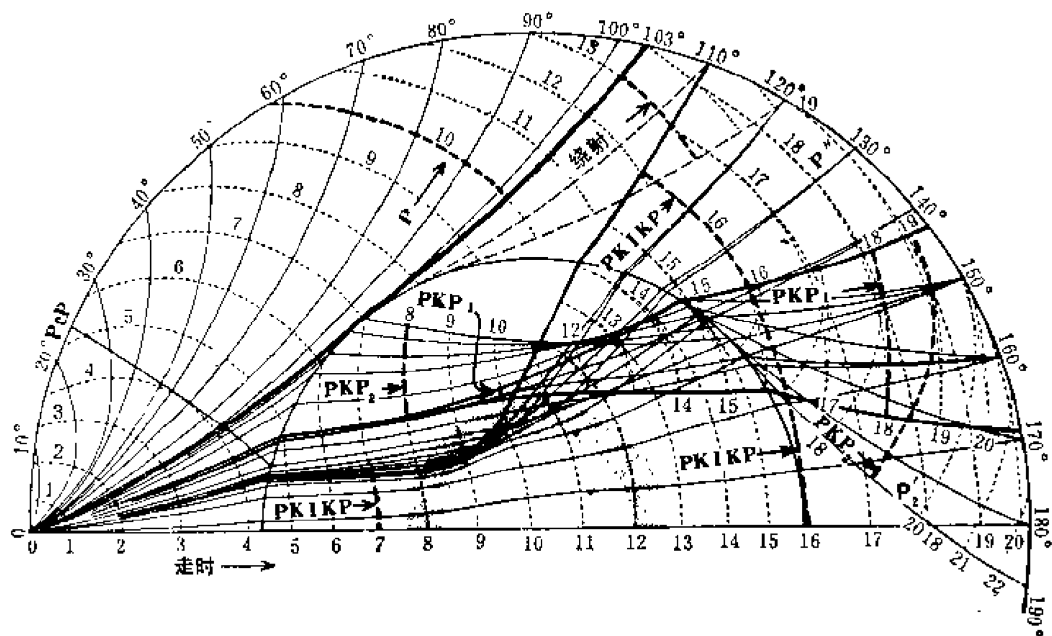


图 9.26 地球中的地震波的波前面和地震射线

地核的阴影区并不完完全全是阴影区，在这个所谓阴影区中仍有振幅很小的 P 波。1935 年莱曼（I. Lehmann）指出，地球有一个内核，其速度较外核的高，使得阴影区内仍有振幅很小的 P 波。内核和外核的界面在深度约为 5120 公里处，通过外核的波可能在这个界面发生反射或折射入内核后出现在阴影区。1939 年，杰弗瑞斯指出，绕射入阴影区的能量很小，解释不了在整个阴影区中观测到的波的振幅。因为这一结果，莱曼的结果日益广泛地为地球物理学界所接受。

通常把在地震图上看到的不同类型或通过地球内部不同途径的波所引起的一组一组的振动叫震相。以大写字母 P 和 S 表示从震源发出、经过地幔到达地面的纵波和横波。在 105° 以内，P 波一直是初至波。在地球表面，P 波和 S 波可能发生一次或多次反射，反射后波型可能变化也可能不变化。相应的震相以 PP, PPP, SS, PS, SPP 等表示。例如，PS 表示以 P 波入射到地球表面然后以 S 波反射出来的波。在地震图上，这些波在 P 波后、面波极大之前出现。

P 波和 S 波在地核界面会发生反射，我们以小写字母 c 表示这种情形，而以 P_cS, P_cP, S_cS 和 S_cP 等表示在地核界面反射后出现的波。例如 P_cS 表示以 P 下行、在地核界面反射后以 S 波传到地面的波（图 9.27）。地球的外核是液态，所以只有通过外核的纵波，而没有通过外核的横波。我们以 K 表示通过外核的纵波。纵波可能在外核界面反射，这种情形以 KK 表示。通常以 P' 表示 PKP，它表示 P 波通过外核后折回地面。类似地有 PKS, SKS 和 SKP。$P'P'$（即 $PKPPKP$），$P'P'P'$，$P'P'P'P'$ 表示 P' 在地球表面反射；而 $PKPP$, $PKKS$, $SKKS$ 表示在核边界内部反射。P_cPP' 是 P_cP 进一步在地球表面反射成 P' 后形成的。这些震相

都观侧到过。P' 出现在大约大于 142° 处，SKS 在 84° 以后出现在 S 之前，所以很容易与 S 混淆。

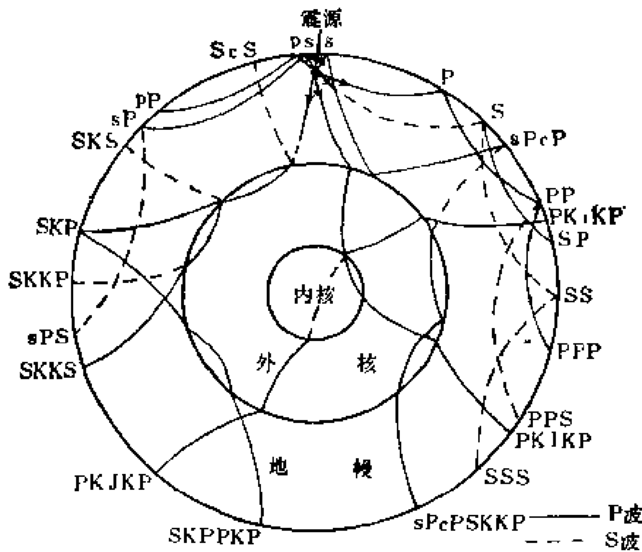


图 9.27 体波的震相

内核可通过 P 和 S 波。通过内核的 P 波以 I 表示，S 波以 J 表示。所以 $PKIKP$ 表示一个贯穿内核但波型不变的纵波。小写字母 i 表示在内核界面的反射。$PKJKP$ 和 $PKiKP$ 只不过是理论上推测有可能存在的震相而已，事实上迄今尚未观测到过。在 110°—142° 处，观测到过 $PKIKP$。

当震源有一定深度时，从震源发出的波可以在地球表面上两个地点发生反射，然后到达同一台站。一般以小写字母 p，s 分别表示反射点比较靠近震源的纵波和横波，如 pP，sP，sS，pPP，$pPKP$ 等，如图 9.27 所示。

7. 走时曲线和震源位置的确定

震中(震源在地面的投影)到观测点的距离叫震中距。地震波从震源到达观测点所用的时间叫走时。如果以横轴表示震中距，以纵轴表示走时，那么用这种方法表示的曲线叫做走时曲线。图 9.28 是地震波的走时曲线。有了走时曲线，就可以由地震台站记录到的 S 波和 P 波的到时差 $S-P$ 确定震源位置。如果地震震源接近于地表，那么利用表面震源的走时曲线，由台站记录到的 $S-P$ 就可确定相应的震中距；由三个以上的台站的震中距就可以在球面上或采用某种投影方法在平面法画出圆弧、交切出震中。

(五) 地球内部的地震波速度分布

由走时资料求地球内部的地震波速度分布的方法有两种。一种古登堡 (B. Gutenberg) 提出的方法，另一种是赫格洛兹-维歇特-贝特曼 (Herglotz-Wiechert-Bateman) 方法。

1. 古登堡 (Gutenberg) 方法

由 (9.355) 式可知，对于每一条从震源深度为 h 处发出的射线，其震源处和出射点的

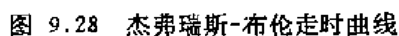


图 9.28 杰弗瑞斯-布伦走时曲线

波速、人射角和半径有如下关系：

$$\frac{(r_0-h)\sin i_h}{v_h}=\frac{r_0\sin i_0}{v_0}, \tag{9.382}$$

式中，地球的半径 r_0、地面上的波速 v_0 都是常数。对于指定的震源，h 和震源所在处的波速 v_h 也是常数。所以在地面上的入射角 i_0 值随 i_h 而变化。显然当 $i_h=\frac{\pi}{2}$ 时，i_0 达极大值：

$$\sin(i_0)_{\max}=\frac{v_0}{v_h}\frac{r_0-h}{r_0}。 \tag{9.383}$$

但是从公式 (9.358) 我们已经知道，射线在地面的入射角和 v_0 及 $\bar{v}$ 有关，所以

$$\sin (i_0)_{\max} = v_0 \left(\frac{dt}{d\Delta} \right)_{\max} 。 \tag{9.384}$$

联合以上两式即得：

$$v_h = \frac{r_0 - h}{r_0} \Big/ \left(\frac{dt}{d\Delta} \right)_{\max} = \frac{r_0 - h}{r_0} (\bar{v}_0)_{\min}。 \tag{9.385}$$

只要知道某个地震的震源深度及其时距曲线，那么由时距曲线的拐点处的视速度 $(\bar{v}_0)_{\min}$ 就可以求得该深度处的速度。

这个方法叫古登堡方法。方法本身比较简单，但需要有较精确的时距曲线，特别是在拐点处。这个方法的缺点是，由它只能求出深至 720 公里处的波速，因为比 720 公里深的地方不发生地震；同时拐点也不易定准；此外，由于这个方法要求对每一个深度的地震都总结出一条时距曲线，因而处理资料的工作量很大；最后，由它只能定出震源所在处的波速，对其它地方这个方法就无能为力了。

2. 赫格洛兹-维歇特-贝特曼方法

这个方法的基本思想是根据震中距 $\leqslant \theta$ 的时距曲线求出震中距为 θ 的射线的最低点半径 r_p，然后由(9.361)式求出 $v(r_p)$。

由 (9.367) 式我们知道，当震源和接收点均在地面上时，

$$\theta = 2 \int_{r_p}^{r_0} p r^{-1} (\eta^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} dr, \tag{9.386}$$

式中 r_0 为地球半径。今以 $\eta = \eta(r)$ 为自变量 [(9.356) 式]，注意到 $\eta(r_p) = p$ [(9.360) 式]，则可以将上式化为：

$$\theta = 2 \int_{p}^{\eta_0} p r^{-1} (\eta^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{d\eta} d\eta。 \tag{9.387}$$

上式中，θ 是以 p 为参变量的量：$\theta = \theta(p)$。现在考虑一组射线，这组射线的参数 p 从半径为 r' 处 $\eta = \eta'$ 变到 r_0 处的 $\eta = \eta_0$。现将上式两边乘以 $(p^2 - \eta'^2)^{-\frac{1}{2}}$，并对 p 从 η' 到 η_0 积分：

$$\int_{\eta'}^{\eta_0} \frac{\theta dp}{(p^2 - \eta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2 \int_{\eta'}^{\eta_0} dp \int_{p}^{\eta_0} \frac{dr}{d\eta} \frac{p d\eta}{r (\eta^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (p^2 - \eta'^2)^{\frac{1}{2}}}。 \tag{9.388}$$

交换上式右边的积分顺序(参见图 9.29)：

$$\int_{\eta'}^{\eta_0} \frac{\theta dp}{(p^2 - \eta'^2)^{\frac{1}{2}}} = 2 \int_{\eta'}^{\eta_0} \frac{dr}{r d\eta} d\eta \int_{\eta'}^{\eta} \frac{p dp}{(\eta^2 - p^2)^{\frac{1}{2}} (p^2 - \eta'^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{9.389}$$

对左边分部积分，即得：

$$\left[\theta \cosh^{-1} \left(\frac{p}{\eta'} \right) \right]_{\eta'}^{\eta_0} - \int_{\eta'}^{\eta_0} \frac{d\theta}{dp} \cosh^{-1} \left(\frac{p}{\eta'} \right) dp, \tag{9.390}$$

上式第一项当代入上限时，因为当 $p = \eta_0$ 时 $\theta = 0$；代入下限时，因为当 $p = \eta'$ 时 $\cosh^{-1} \times \left(\frac{p}{\eta'} \right) = 0$，所以第一项为零。(9.389) 式右边的双重积分可以积出，结果是 $\pi \ln \left(\frac{r_0}{r'} \right)$，因此

$$\int_0^{\theta'} \cosh^{-1}\left(\frac{p}{\eta'}\right) d\theta = \pi \ln\left(\frac{r_0}{r'}\right)。\quad (9.391)$$

由走时曲线 $t = t(\theta)$ 可以求得 $p = p(\theta) = \frac{dt}{d\theta}$。然后选取一个 η' 的值，对上式左边作数值积分，假定这个积分是 $I(\eta')$，则：

$$r' = r_0 \exp[-I(\eta')/\pi], \quad (9.392)$$

这样就求得了 $r' = r'(\eta')$。既然 $\eta' = r'/v'$，所以就求得了 $v' = v'(r')$ 即速度随半径的分布函数。

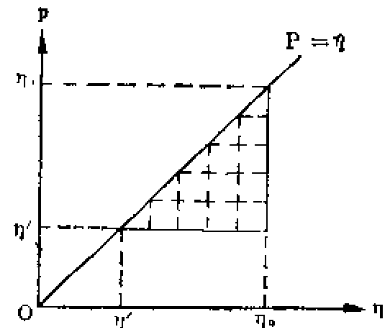


图 9.29 积分顺序的变换

由积分方程理论可知，方程(9.387)是阿贝尔(Abel)型积分方程。(9.391)式所表示的结果本质上阿贝尔早已导出。不过因为赫格洛兹、维歇特和贝特曼等三人在 1907 至 1910 年间最早把阿贝尔的结果应用于地震学，所以现在通常把(9.391)式所表示的由地面上走时的观测资料确定地球内部速度分布的方法叫做赫格洛兹-维歇特-贝特曼方法。

3. 数值结果

历史上，在(9.391)式所示的方法问世后就开始估计地球内部纵波和横波速度。最早从事这方面工作的有古登堡及其在哥丁根(Göttingen)的同事(1907 至 1930 年间)，还有诺特(Knott, 1919)和日本的和达清夫(K. Wadati, 1933—1934 间)。早期的工作大多只根据少量资料，误差较大。到了三十年代，杰弗瑞斯(H. Jeffreys)和古登堡都意识到需要有大量的资料才好。1939 年，杰弗瑞斯根据杰弗瑞斯-布伦(K. E. Bullen)走时表(J-B表)得到了第一个整个地球的纵波速度 α 和整个地幔的横波速度 β 的分布。1939—1958 年间，古登堡也根据大量资料发表了好几种分布。

杰弗瑞斯的 1939 年的结果包括 15 公里厚的"花岗岩层"，其中 $\alpha = 5.57$公里/秒，$\beta = 3.74$ 公里/秒。表 9.1 给出了杰弗瑞斯在 1939 年得到的在一些深度的速度值，表的上半部是地幔，下半部是地核。

表 9.1 纵波和横波的速度

深度(公里)	33	400	1000	2700	2898
α(公里/秒)	7.75	8.93	11.42	13.62	13.65
β(公里/秒)	4.35	4.94	6.36	7.26	7.30
深度(公里)	2898	4500	4980	5120	6371
α(公里/秒)	8.1	9.97	10.44	9.40, 11.16	11.31

三、地震波的反射和折射

(一) 平面波在自由表面的反射

1. 平 面 波

前面讨论的波动方程的解答适用于在三维空间无限延伸的介质内传播的扰动。当扰

动到达边界时，边界要影响扰动的传播，此时必须考虑边界的效应。

我们先来讨论均匀和各向同性半空间中的各种类型的波；先从这类问题中的最简单的情形开始。假定均匀与各向同性介质中的自由界面是一个平面 ($x_3 = 0$)，并且假定一系列平面波在 x_1x_3 平面内的 AO 方向传播，它和边界的内法向成 i 角(图 9.30 和图9.31)，图 9.30 表示的是 P 波入射的情形，而图 9.32 表示的是 SV 波入射的情形。

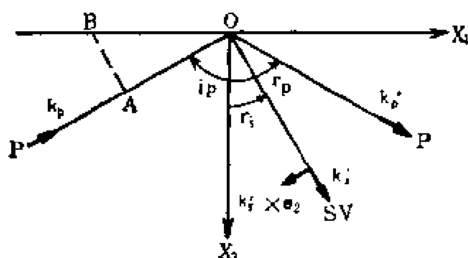


图 9.30 平面波在自由表面的反射，P 波入射情形

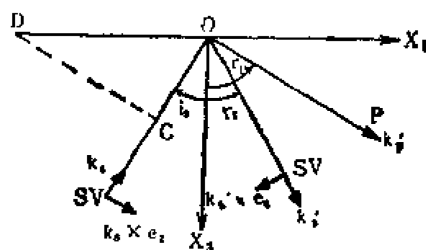


图 9.31 平面波在自由表面的反射，SV 波入射情形

如公式 (9.186) 和 (9.188)—(9.190) 所表示的，位移可以用一个标量位 φ 和一个向量位 $\boldsymbol{\phi}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 表示，φ 和 ϕ_i 分别满足纵波和横波的波动方程。在我们现在讨论的问题中，由于选择了如图 9.30 和图 9.31 所示的坐标系，平面 P 波和平面 SV 与 SH 波都与 x_2 轴无关，所以 (9.188)—(9.190) 式分成独立的两组。P 和 SV 波的位移分别与位函数 φ，ϕ 有关，它们只有 x_1 和 x_3 方向的分量：

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\phi}{\partial x_3}, \\ u_3 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}; \end{cases} \tag{9.393}$$

而对应于 SH 波的位移 u_2 可以单独处理。函数 φ，ϕ 分别满足波动方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\varphi, \tag{9.394}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \beta^2\nabla^2\phi。 \tag{9.395}$$

设上列两个方程的解答是：

$$\varphi = f(x_3)e^{i(\omega t - kx_1)}, \tag{9.396}$$

$$\phi = g(x_3)e^{i(\omega t - kx_1)}。 \tag{9.397}$$

其中，ω 是圆频率，k 是波数。上两式分别是波动方程 (9.394) 和 (9.395) 的解，一般地说，两个式子中的 ω 和 k 是不同的，但以后我们将要证明，为了满足在 $x_3 = 0$ 的边界条件，(9.396) 和 (9.397) 两式中的指数项里的圆频率 ω 和波数 k 必须是一样的。

将 (9.396) 和 (9.397) 式代入 (9.394) 和 (9.395) 两式，并令：

$$c = \omega/k, \tag{9.398}$$

则得：

$$\frac{d^2f}{dx_3^2} + \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1\right)k^2f = 0, \tag{9.399}$$

$$\frac{d^2g}{dx_3^2} + \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1\right)k^2g = 0。 \tag{9.400}$$

这两个方程的积分为

$$f(x_3)=A_1e^{ik\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}\,x_3}+A_2e^{-ik\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}\,x_3},\tag{9.401}$$

$$g(x_3)=B_1e^{ik\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}\,x_3}+B_2e^{-ik\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}\,x_3},\tag{9.402}$$

因此,(9.396) 和 (9.397) 式可以写成:

$$\varphi=A_1e^{ik\left(ct+x_3\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}-x_1\right)}+A_2e^{ik\left(ct-x_3\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}-x_1\right)},\tag{9.403}$$

$$\phi=B_1e^{ik\left(ct+x_3\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}-x_1\right)}+B_2e^{ik\left(ct-x_3\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}-x_1\right)}。\tag{9.404}$$

(9.403) 式右边第一项表示一个平面波,这个平面波沿着自由表面 ($x_3=0$) 的视速度为 c, 沿着 x_3 方向的视速度为 $-c/\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}$。它的波阵面法向在 x_1,x_3 轴的投影是$\left(k,-k\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}\right)$,换句话说,它是沿 $+x_1$, $-x_3$ 方向传播的,我们叫它为入射纵波。今以 i_p 表示波阵面法向与边界的外法向 ($-x_3$ 方向)的夹角,则

$$\cot i_p=\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}。\tag{9.405}$$

用类似步骤,可知 (9.403) 式右边的第二项表示一个沿 $+x_1$, $+x_3$ 方向传播的平面波,我们叫它为反射纵波。如果以 r_p 表示反射纵波波阵面法线与 x_3 轴的夹角,则

$$\cot r_p=\sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2}-1}。\tag{9.406}$$

对于 (9.404) 式可以作类似的分析。这就是该式右边的第一项表示入射横波,第二项表示反射横波。相应地,横波的入射角 i_s 和反射角 r_s 分别为:

$$\cot i_s=\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1},\tag{9.407}$$

$$\cot r_s=\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}。\tag{9.408}$$

2. *P* 波入射到自由表面

按照 (9.405) 至 (9.408) 诸式,我们可以将 (9.403) 和 (9.404) 式写成:

$$\varphi=A_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_p-x_3\cos i_p)}{\alpha}\right]}+A_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_p+x_3\cos r_p)}{\alpha}\right]},\tag{9.409}$$

$$\phi=B_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s-x_3\cos i_s)}{\beta}\right]}+B_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_s+x_3\cos r_s)}{\beta}\right]}。\tag{9.410}$$

假定只有 P 波入射到自由表面,为此,使上式的 $B_1=0$, 然后应用下列边界条件确定其余系数之间的关系:

$$p_{31}|_{x_3=0}=\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)\Bigg|_{x_3=0}=0,\tag{9.411}$$

$$p_{33}|_{x_3=0}=\left[\lambda\nabla^2\varphi+2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_3}\right)\right]\Bigg|_{x_3=0}=0。\tag{9.412}$$

将 (9.409) 和 (9.410) 两式代入上两式,我们得:

$$-2\frac{\sin i_p}{\alpha}\frac{\cos i_p}{\alpha}\varphi_1+2\frac{\sin r_p}{\alpha}\frac{\cos r_p}{\alpha}\varphi_2+\left(\frac{\sin r_s}{\beta}\right)^2\phi_2-\left(\frac{\cos r_s}{\beta}\right)^2\phi_2=0, \tag{9.413}$$

$$\left(\frac{\alpha^2-2\beta^2}{2\beta^2}\right)\frac{1}{\alpha^2}(\varphi_1+\varphi_2)+\left(\frac{\cos i_p}{\alpha}\right)^2\varphi_1+\left(\frac{\cos r_p}{\alpha}\right)^2\varphi_2+\frac{\sin r_s}{\beta}\frac{\cos r_s}{\beta}\phi_2=0。 \tag{9.414}$$

式中，φ_1,φ_2 和 ϕ_2 分别表示人射、反射 P 波和反射 S 。波因为 $x_3=0$ 处的边界条件应当对于所有的 t 和 x_1 都成立，这就要求 φ_1, φ_2 和 ϕ_2 表示式的指数中的圆频率 ω 及 x_1 方向的波数 k 应当相等,这点在前面我们已经提到。ω 及在 x_1 方向的波数 k 应当相等就意味着:

$$\frac{\sin i_p}{\alpha}=\frac{\sin r_p}{\alpha}=\frac{\sin r_s}{\beta}, \tag{9.415}$$

这就是斯内尔定律。特别是,$r_p=i_p$。

(9.413) 和 (9.414) 两式可以化为:

$$(A_1-A_2)\beta^2\sin 2i_p+B_2\alpha^2\cos 2r_s=0, \tag{9.416}$$

$$(A_1+A_2)\cos 2i_s+B_2\sin 2r_s=0, \tag{9.417}$$

因此,

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{\beta^2\sin 2i_p\sin 2r_s-\alpha^2\cos^2 2r_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2r_s+\alpha^2\cos^2 2r_s}, \tag{9.418}$$

$$\frac{B_2}{A_1}=-2\beta^2\frac{\sin 2i_p\cos 2r_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2r_s+\alpha^2\cos^2 2r_s}。 \tag{9.419}$$

$\frac{A_2}{A_1}$ 和 $\frac{B_2}{A_1}$ 分别称为 P 波和 S 波的反射系数。这些反射系数是对位移函数 φ 和 ψ 而言的。

3. 位移的反射系数和位移位的反射系数的关系

(9.418) 和 (9.419) 式表示当 P 波人射时位移位函数的反射系数。有时，我们希望知道位移的反射系数。为此,我们将 (9.393) 式写成向量形式:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_p+\boldsymbol{u}_p'+\boldsymbol{u}_s', \tag{9.420}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_p=\nabla\varphi_1,\\ \boldsymbol{u}_p'=\nabla\varphi_2,\\ \boldsymbol{u}_s'=\nabla\times(\psi\boldsymbol{e}_2)=\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_2\end{cases} \tag{9.421}$$

$\boldsymbol{e}_2$ 表示 x_2 方向的单位向量，$\boldsymbol{u}_p$ 表示人射 P 波的位移向量，$\boldsymbol{u}_p'$ 表示反射 P 波的位移向量，$\boldsymbol{u}_s'$ 表示反射 SV 波的位移向量。

将 (9.409) 和 (9.410) 式代人 (9.421) 式，即得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_p=-i\dfrac{\omega}{\alpha}A_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_p-x_3\cos i_p)}{\alpha}\right]}\boldsymbol{k}_p,\\ \boldsymbol{u}_p'=-i\dfrac{\omega}{\alpha}A_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_p+x_3\cos i_p)}{\alpha}\right]}\boldsymbol{k}_p',\\ \boldsymbol{u}_s'=-i\dfrac{\omega}{\beta}B_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_s+x_3\cos r_s)}{\beta}\right]}\boldsymbol{k}_s'\times\boldsymbol{e}_2。\end{cases} \tag{9.422}$$

其中

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{k}_p = \{\sin i_p,\ 0,\ -\cos i_p\}, \\
\boldsymbol{k}'_p = \{\sin i_p,\ 0,\ \cos i_p\}, \\
\boldsymbol{k}'_s = \{\sin r_s,\ 0,\ \cos r_s\}, \\
\boldsymbol{k}'_s \times \boldsymbol{e}_2 = \{-\cos r_s,\ 0,\ \sin r_s\},
\end{cases}
\tag{9.423}
$$

它们的方向如图 9.30 所示。

现在，将反射 P 波和反射 S 波的位移表示成

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{u}'_p = -i\dfrac{\omega}{\alpha} A_1 R_{pp} e^{i\omega\left[t - \frac{(x_1 \sin i_p + x_3 \cos i_p)}{\alpha}\right]} \boldsymbol{k}'_p, \\
\boldsymbol{u}'_s = -i\dfrac{\omega}{\alpha} A_1 R_{ps} e^{i\omega\left[t - \frac{(x_1 \sin r_s + x_3 \cos r_s)}{\beta}\right]} \boldsymbol{k}'_s \times \boldsymbol{e}_2,
\end{cases}
\tag{9.424}
$$

R_{pp} 和 R_{ps} 叫做位移反射系数。对比 (9.422) 和上式，我们得到：

$$
\begin{cases}
R_{pp} = A_2/A_1, \\
R_{ps} = \alpha B_2/\beta A_1。
\end{cases}
\tag{9.425}
$$

4. 视 出 射 角

为了从地震图上测量入射角，可以用垂直方向和水平方向地动位移的振幅之比。通常规定垂直方向地动位移向上为正，因而 P 波的视出射角 θ 为：

$$
\tan\theta = \left.\frac{u_1}{(-u_3)}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{(u_p)_1 + (u'_p)_1 + (u'_s)_1}{(u_p)_3 + (u'_p)_3 + (u'_s)_3}\right|_{x_3=0}。
\tag{9.426}
$$

将 (9.422) 式代入上式，即得：

$$
\tan\theta = \tan 2r_s,
\tag{9.427}
$$

从而

$$
\theta = 2r_s。
\tag{9.428}
$$

5. SV 波入射到自由表面

现在我们来讨论 SV 波入射到自由表面的情形。为此，让(9.403)式中的 $A_1 = 0$，然后将 (9 403) 和 (9.404) 式代入 (9.411) 和 (9.412) 两式所示的边界条件，重复和 P 波入射情形同样的步骤，就可以求得相应的反射系数：

$$
\frac{A_2}{B_1} = \frac{2\alpha^2 \sin 2r_s \cos 2r_s}{\beta^2 \sin 2i_p \sin 2r_s + \alpha^2 \cos^2 2r_s},
\tag{9.429}
$$

$$
\frac{B_2}{B_1} = \frac{\beta^2 \sin 2i_p \sin 2r_s - \alpha^2 \cos^2 2r_s}{\beta^2 \sin 2i_p \sin 2r_s + \alpha^2 \cos^2 2r_s}。
\tag{9.430}
$$

类似地，我们可以将位移向量 $\boldsymbol{u}$ 表示为：

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}'_p + \boldsymbol{u}'_s
\tag{9.431}
$$

式中，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{u}_s = \nabla \times (\psi_1 \boldsymbol{e}_2) = \nabla\psi_1 \times \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{u}'_p = \nabla\varphi_2, \\
\boldsymbol{u}'_s = \nabla \times (\psi_2 \boldsymbol{e}_2) = \nabla\psi_2 \times \boldsymbol{e}_2。
\end{cases}
\tag{9.432}
$$

$\boldsymbol{u}_s$ 表示入射 S 波位移，ψ_1 表示相应的位移位。将 (9.403) 和 (9.404) 式代入上式即得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_s = -i\dfrac{\omega}{\beta}B_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s - x_3\cos i_s)}{\beta}\right]}\boldsymbol{k}_s\times\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{u}'_p = -i\dfrac{\omega}{\alpha}A_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_p + x_3\cos r_p)}{\alpha}\right]}\boldsymbol{k}'_p,\\ \boldsymbol{u}'_s = -i\dfrac{\omega}{\beta}B_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_s + x_3\cos r_s)}{\beta}\right]}\boldsymbol{k}'_s\times\boldsymbol{e}_2\text{。}\end{cases}\tag{9.433}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_s = \{\sin i_s, 0, -\cos i_s\}, \quad \boldsymbol{k}_s\times\boldsymbol{e}_2 = \{\cos i_s, 0, \sin i_s\},\\ \boldsymbol{k}'_p = \{\sin r_p, 0, \cos r_p\},\\ \boldsymbol{k}'_s = \{\sin r_s, 0, \cos r_s\}, \quad \boldsymbol{k}'_s\times\boldsymbol{e}_2 = \{-\cos r_s, 0, \sin r_s\}\text{。}\end{cases}\tag{9.434}$$

(9.433) 式可以写成:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_s = -i\dfrac{\omega}{\beta}B_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s - x_3\cos i_s)}{\beta}\right]}\boldsymbol{k}_s\times\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{u}'_p = -i\dfrac{\omega}{\beta}B_1R_{sp}e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_p + x_3\cos r_p)}{\alpha}\right]}\boldsymbol{k}'_p,\\ \boldsymbol{u}'_s = -i\dfrac{\omega}{\beta}B_1R_{ss}e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin r_s + x_3\cos r_s)}{\beta}\right]}\boldsymbol{k}'_s\times\boldsymbol{e}_2,\end{cases}\tag{9.435}$$

其中 R_{sp} 和 R_{ss} 表示位移的反射系数

$$\begin{cases}R_{sp} = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{A_2}{B_1},\\ R_{ss} = \dfrac{B_2}{B_1}\text{。}\end{cases}\tag{9.436}$$

对于 SV 波入射到自由表面情形,真入射角是 i_s。由 (9.434) 式可知, $\tan i_s = \dfrac{(u_s)_3}{(u_s)_1}$。仿效这个式子,我们定义这种情形下的视入视角 θ 为:

$$\tan\theta = \frac{u_3}{u_1}\bigg|_{x_3=0} = \frac{(u_s)_3 + (u'_p)_3 + (u'_s)_3}{(u_s)_1 + (u'_p)_1 + (u'_s)_1}\bigg|_{x_3=0}\tag{9.437}$$

将 (9.433) 式代入上式即得:

$$\tan\theta = \frac{2\cot r_p}{\cot^2 i_s - 1}\text{。}\tag{9.438}$$

6. SH 波入射到自由表面

前面已提及 SH 波可以和 P 波与 SV 波分开单独处理。SH 波的位移在 x_2 方向,它满足波动方程 (9.196),它的解可以表示为:

$$u_2 = C_1e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s - x_3\cos i_s)}{\beta}\right]} + C_2e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s + x_3\cos i_s)}{\beta}\right]}\text{。}\tag{9.439}$$

边界条件是,在 $x_3 = 0$ 处,

$$p_{23} = \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0\text{。}\tag{9.440}$$

将 (9.439) 式代入上式即得:

$$C_2 = C_1\text{。}\tag{9.441}$$

这就是说，反射 SH 波的振幅等于入射 SH 波的振幅；在地面上，水平地动振幅是 $2C_1$。

（二）平面波在两种介质分界面上的反射和折射

1. SH 波的反射和折射

我们先来讨论 SH 平面波在两种介质分界面上的反射和折射问题（图 9.32）。设 $x_3=0$ 是两种介质的分界面。今以 C_1 表示入射 SH 波振幅，C_2 表示反射 SH 波振幅，C' 表示折射 SH 波振幅，则在介质 1 中 SH 波的位移 u_2 由 (9.439) 式表示，而在介质 2 中的位移为：

$$u_2' = C' e^{i\omega\left[t-\frac{(x_1 \sin i_s' - x_3 \cos i_s')}{\beta'}\right]}。 \tag{9.442}$$

在边界上，位移和应力都连续。这就是在 $x_3=0$，

$$u_2 = u_2', \tag{9.443}$$

$$\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \mu' \frac{\partial u_2'}{\partial x_3}。 \tag{9.444}$$

将 (9.439) 和 (9.442) 两式代入以上两式，可得：

$$\frac{\sin i_s}{\beta} = \frac{\sin i_s'}{\beta'}, \tag{9.445}$$

$$C_1 + C_2 = C', \tag{9.446}$$

$$\mu(C_1 - C_2)\frac{\cos i_s}{\beta} = \mu' C' \frac{\cos i_s'}{\beta'}。 \tag{9.447}$$

从而可求得反射系数 C_2/C_1 和折射系数 C'/C_1：

$$C_2/C_1 = \frac{\sin 2i_s - \frac{\mu'\beta^2}{\mu\beta'^2} \sin 2i_s'}{\sin 2i_s + \frac{\mu'\beta^2}{\mu\beta'^2} \sin 2i_s'}, \tag{9.448}$$

$$C'/C_1 = \frac{2 \sin 2i_s}{\sin 2i_s + \frac{\mu'\beta^2}{\mu\beta'^2} \sin 2i_s'}。 \tag{9.449}$$

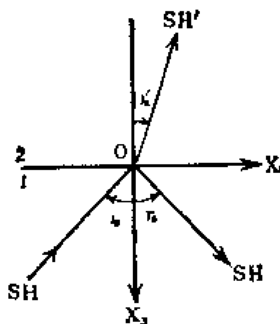


图 9.32 SH 平面波在两种介质分界面上的反射和折射

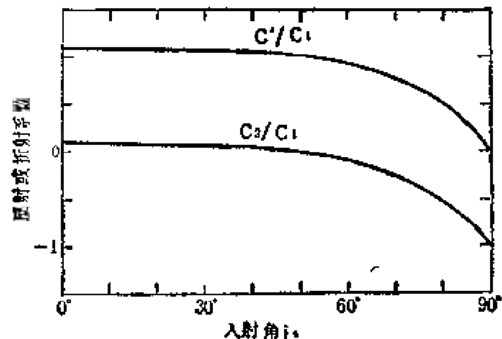


图 9.33 SH 波的反射和折射系数 $\beta'/\beta = 0.8$，$\mu'/\mu = 0.64$。

图 9.33 是 $\beta'/\beta=0.8$，$\mu'/\mu=0.64$ 时 SH 波的反射和折射系数。

如果 $\beta'>\beta$，那么当 i_s 大于临界角 i_c 时便发生全反射，

$$\sin i_c=\frac{\beta}{\beta'}。\tag{9.450}$$

发生全反射时，

$$\cos i_s'=-i\sqrt{\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2\sin^2 i_s-1},\tag{9.451}$$

从而

$$C_2/C_1=e^{2\zeta i},\tag{9.452}$$

$$C'/C_1=\frac{2}{\sqrt{1+\delta^2}}e^{i\zeta},\tag{9.453}$$

其中，

$$\tan\zeta=\frac{\mu'}{\mu}\frac{\sqrt{\sin^2 i_s-(\beta/\beta')^2}}{\cos i_s}=\delta。\tag{9.454}$$

所以反射波为：

$$u_2=C_1e^{i\left\{\omega\left[t-\frac{(x_1\sin i_s+x_3\cos i_s)}{\beta}\right]+2\zeta\right\}},\tag{9.455}$$

折射波为：

$$u_2'=\frac{2C_1e^{\kappa x_3}}{\sqrt{1+\delta^2}}e^{i\left\{\omega\left[t-\frac{x_1\sin i_s'}{\beta'}\right]+\zeta\right\}},\tag{9.456}$$

其中，

$$\kappa=\frac{\omega}{\beta}\sqrt{\sin^2 i_s-(\beta/\beta')^2}。$$

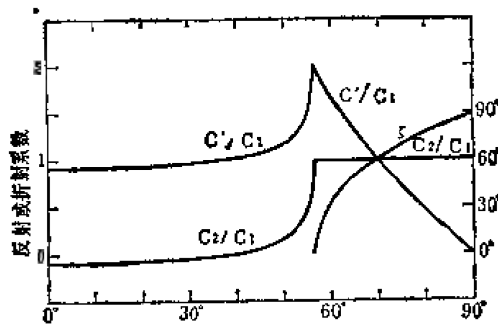


图 9.34 SH 波的反射和折射系数

$\beta'/\beta=1.2$，$\mu'/\mu=1.44$。

图 9.34 是 $\beta'/\beta=1.2$，$\mu'/\mu=1.44$ 时 SH 波的反射和折射系数。图中给出了全反射时反射波的振幅 $|C_2/C_1|$ 和折射波的振幅 $|C'/C_1|$ 以及相位函数 ζ。

2. P 波和 SV 平面波的反射和折射

我们现在来讨论在以平界面相接触的两个半无限弹性介质中 P 和 SV 平面波的反射

和折射问题(图 9.35 和图 9.36)。一般地说,任何入射波在两个弹性固体分界面上都将在两个介质中产生纵波和横波,分界面上的两个位移分量 u_1, u_3 和两个应力分量 p_{31} 和 p_{33} 应当连续。今以 A_1 表示入射 P 波振幅,A_2 表示反射 P 波振幅,A' 表示折射 P 波振幅,以 B_1, B_2, B' 分别表示 SV 波的相应的量。由 (9.403) 和 (9.404) 式可得,在介质 1 中:

$$\varphi = A_1 e^{ik(ct - x_1 + ax_3)} + A_2 e^{ik(ct - x_1 - ax_3)}, \tag{9.457}$$

$$\psi = B_1 e^{ik(ct - x_1 + bx_3)} + B_2 e^{ik(ct - x_1 - bx_3)}, \tag{9.458}$$

在介质 2 中:

$$\varphi' = A' e^{ik(ct - x_1 + a'x_3)}, \tag{9.459}$$

$$\psi' = B' e^{ik(ct - x_1 + b'x_3)}, \tag{9.460}$$

其中,

$$\begin{cases} a = \cot i_p = \left(\dfrac{c^2}{\alpha^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \\ b = \cot r_s = \left(\dfrac{c^2}{\beta^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \\ a' = \cot i'_p = \left(\dfrac{c^2}{\alpha'^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \\ b' = \cot i'_s = \left(\dfrac{c^2}{\beta'^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{9.461}$$

i_p, r_s, i'_p, i_s 的意义见图 9.35 和图 9.36。

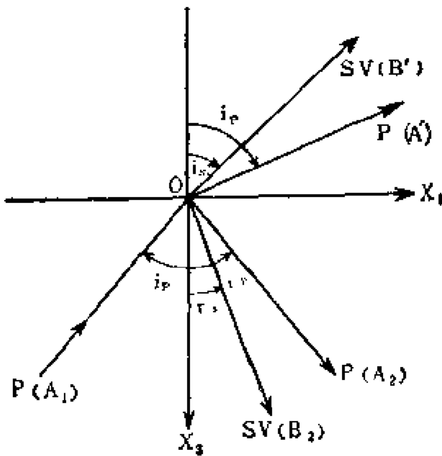


图 9.35 平面波在两种介质分界面上的反射和折射,P 波入射情形

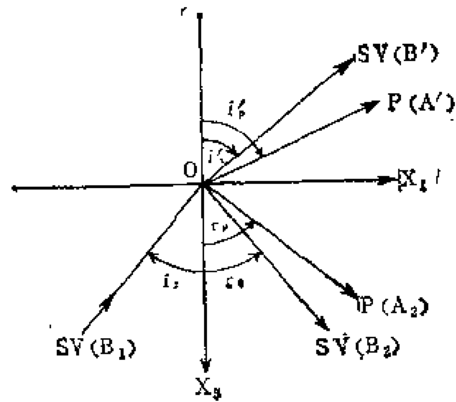


图 9.36 平面波在两种介质分界面上的反射和折射,SV 波入射情形

因为在 $x_3 = 0$, 边界条件与 x_1 和 t 无关,所以在 (9.457)—(9.460) 诸式中的 k 和 c 必须相同,从 (9.461) 式立刻可以得到斯内尔定律:

$$\frac{\sin i_p}{\alpha} = \frac{\sin r_p}{\alpha} = \frac{\sin i_s}{\beta} = \frac{\sin r_s}{\beta} = \frac{\sin i'_p}{\alpha'} = \frac{\sin i'_s}{\beta'} = \frac{1}{c}。 \tag{9.462}$$

这意味着,若 i_p, i_s, i'_p, i'_s 是实数, c 必须大于 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$。在相反的情况下,若 c 不都大于 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, 就将出现复反射系数,此时,不但振幅、而且相位也要发生变化。

位函数 $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ 必须满足边界条件: 在 $x_3 = 0$ 时,

$$
\begin{cases}
u_1 = u_1', \\
u_3 = u_3', \\
p_{31} = p_{31}', \\
p_{33} = p_{33}',
\end{cases}
\tag{9.463}
$$

将 (9.457)—(9.460) 诸式代入 (9.393) 和 (9.411) 与 (9.412) 式，然后代入上式，即得：

$$
\begin{cases}
A_1 + A_2 + b(B_1 - B_2) = A' + b'B', \\
a(A_1 - A_2) - (B_1 + B_2) = a'A' - B', \\
\rho\beta^2[-(b^2 - 1)(A_1 + A_2) + 2b(B_1 - B_2)] = \rho'\beta'^2[-(b'^2 - 1)A' + 2b'B'], \\
\rho\beta^2[2a(A_1 - A_2) + (b^2 - 1)(B_1 + B_2)] = \rho'\beta'^2[2a'A' + (b'^2 - 1)B']。
\end{cases}
\tag{9.464}
$$

当 $B_1 = 0, A_1 \neq 0$，就是 P 波入射情形。$B_1 \neq 0, A_1 = 0$，就是 SV 波入射情形。在这些情形下，共有五个系数，四个振幅系数都可以由入射 P（或 S）波的振幅表示。

3. 能量的分配

我们来分析波的能量分配问题，由 (9.393) 式可知 P 波和 SV 波的位移分别为：

$$
\begin{cases}
u_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\
u_3 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3},
\end{cases}
\tag{9.465}
$$

$$
\begin{cases}
u_1 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x_3}, \\
u_3 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}。
\end{cases}
\tag{9.466}
$$

将 (9.457)—(9.460) 式代入以上两式，可知入射 P 波的质点运动速度为：

$$
\begin{cases}
\dot{u}_1 = \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial t} = k^2c\varphi_1, \\
\dot{u}_3 = \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_3\partial t} = -k^2ca\varphi_1,
\end{cases}
\tag{9.467}
$$

$$
\varphi_1 = A_1e^{ik(ct - x_1 + ax_3)};
\tag{9.468}
$$

入射 SV 波的质点运动速度为：

$$
\begin{cases}
\dot{u}_1 = -\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x_3\partial t} = k^2cb\psi_1, \\
\dot{u}_3 = \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial t} = k^2c\psi_1,
\end{cases}
\tag{9.469}
$$

$$
\psi_1 = B_1e^{ik(ct - x_1 + bx_3)}。
\tag{9.470}
$$

单位体积的动能为 $\dfrac{1}{2}\rho(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2)$，单位体积的总能量 W 为平均动能密度的两倍。所以对于入射 P 波来说，

$$
\begin{aligned}
W &= 2\,\overline{\frac{1}{2}\rho(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2)} \\
&= \overline{\rho(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_3^2)} \\
&= \rho k^4c^2(1 + a^2)A_1^2/2
\end{aligned}
$$

$$= \rho A_1^2 k^4 c^4 / 2\alpha^2。\tag{9.471}$$

注意到波传播方向与垂线的夹角为 i_p，所以单位时间通过单位面积界面的能量为：

$$\varepsilon = W\alpha \Big/ \frac{1}{\cos i_p} = W\alpha \cos i_p = \frac{1}{2}\rho A_1^2 k^4 c^2 \cot i_p。\tag{9.472}$$

对于其它类型的波，也可以得到类似的表达式。这样，我们可以写出在界面上入射 P 波和反射、折射 P 与 SV 波的能量之间的关系：

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2 k^4 c^2 \cot i_p = \frac{1}{2}\rho A_2^2 k^4 c^2 \cot i_p + \frac{1}{2}\rho B_2^2 k^4 c^2 \cot i_s + \frac{1}{2}\rho' A'^2 k^4 c^2 \cot i_p' + \frac{1}{2}\rho' B'^2 k^4 c^2 \cot i_s',$$

或者，

$$1 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2,\tag{9.473}$$

其中，

$$\begin{cases} a^2 = A_2^2 / A_1^2, \\ b^2 = B_2^2 \cot i_s / A_1^2 \cot i_p, \\ a'^2 = A'^2 \rho' \cot i_p' / A_1^2 \rho \cot i_p, \\ b'^2 = B'^2 \rho' \cot i_s' / A_1^2 \rho \cot i_p。\end{cases}\tag{9.474}$$

对于入射 SV 波情形，可以求得：

$$1 = a_1^2 + b_1^2 + a_1'^2 + b_1'^2,\tag{9.475}$$

其中，

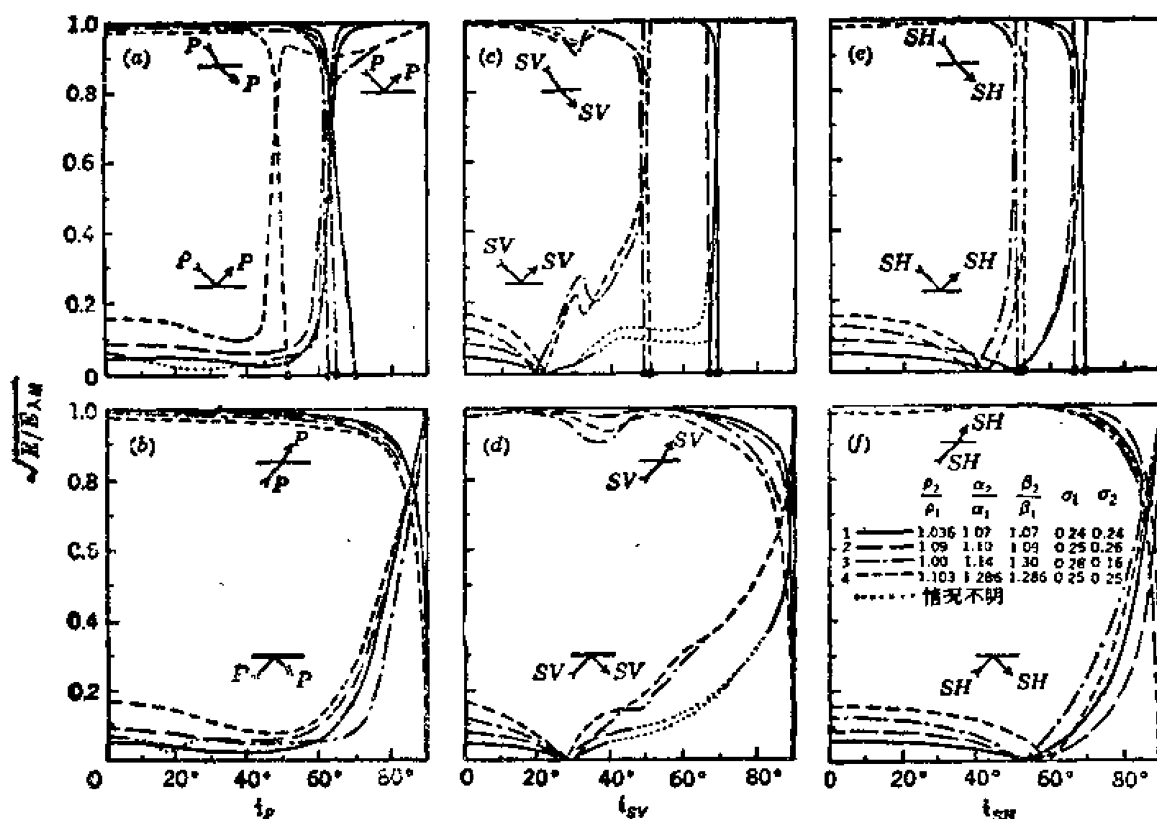


图 9.37 在没有发生波型变化的情况下，反射波能量或透射波能量对入射波能量之比的平方根

下角标：1. 表示上层； 2. 表示下层。

$$
\begin{cases}
a_1^2 = A_2^2 \cot i_p / B_1^2 \cot i_s, \\
b_1^2 = B_2^2 / B_1^2, \\
a_1'^2 = A'^2 \rho' \cot i_p' / B_1^2 \rho \cot i_s, \\
b_1'^2 = B'^2 \rho' \cot i_s' / B_1^2 \rho \cot i_s。
\end{cases}
\tag{9.476}
$$

在上述结果中，a, b, a', b' 诸量分别是反射 P 波与 SV 波、折射 P 波与 SV 波和入射 P 波的能量比的平方根；a_1, b_1, a_1', b_1' 是它们和入射 SV 波的能量比的平方根。在地震学中，既有用位函数的反射、折射系数 $A_2/A_1, B_2/A_1, A'/A_1, B'/A_1$ 表示计算结果的；也有用上述的能量比的平方根 a, b, a', b' 等表示的。图 9.37 和图 9.38 是两个例子，它们表示反射波能量或透射波能量对于入射波能量之比的平方根。图 9.37 表示没有发生波型变化情形，图 9.38 表示入射波和反射波或折射波的波型不同的情形。

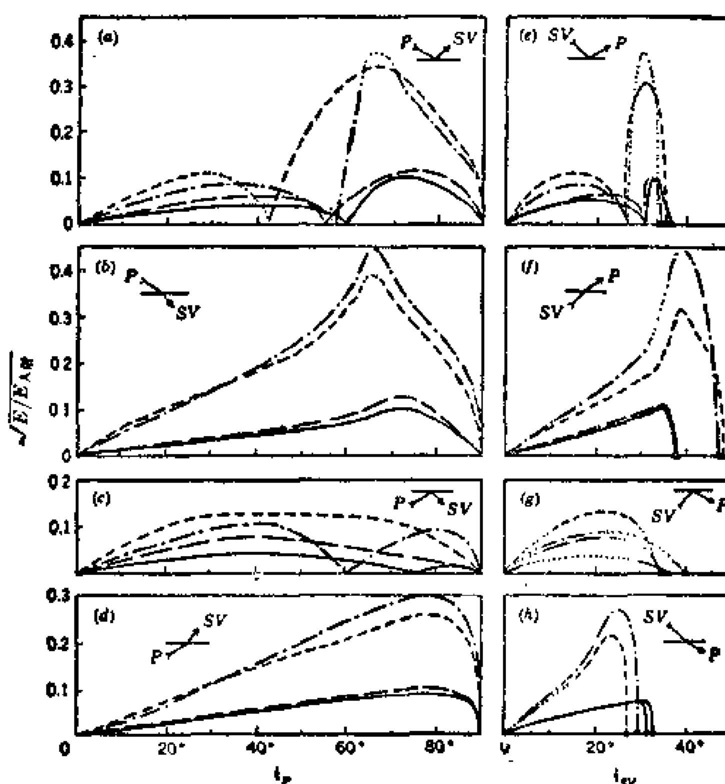


图 9.38 入射波和反射波或透射波的波型不同时，反射波能量或透射波能量对入射波能量之比的平方根

图中数据和说明同图9.37。

四、地震面波

(一) 瑞雷 (Rayleigh) 波

在无限、各向同性的均匀弹性介质中，仅有两种类型的弹性波传播，即纵波和横波。但是在半无限、各向同性的均匀弹性介质中，有可能出现一种弹性波，这种波的特点是：扰动的幅度随着离开自由表面距离的增加而迅速衰减，或者说，扰动只局限于自由表面附

近。所以,通常称这种波为面波。现在,我们来讨论沿半无限弹性固体自由表面上面波的传播问题。假定波的传播与 x_2 轴无关,引进如 (9.393) 所表示的位移位 φ, ψ, 则如果 φ, ψ 分别满足纵波与横波的波动方程 (9.394) 和 (9.395) 式,那么由 (9.393) 式所示的 u_1, u_3 就满足运动方程。参照 (9.403) 和 (9.404) 式,我们可以把波动方程的解表示成:

$$
\begin{cases}
\varphi = A_1 e^{ik(ct-x_1)-x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}}} + A_2 e^{ik(ct-x_1)+x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}}}, \\
\psi = B_1 e^{ik(ct-x_1)-x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}} + B_2 e^{ik(ct-x_1)+x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}}。
\end{cases}
\tag{9.477}
$$

规定上两式中的根号应取正根。当 $x_3 \to \infty$ 时,φ 和 ψ 的表示式的第二项不满足波在无穷远处收敛的条件,所以 $A_2 = B_2 = 0$。于是我们得:

$$
\begin{cases}
\varphi = A_1 e^{ik(ct-x_1)-x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}}}, \\
\psi = B_1 e^{ik(ct-x_1)-x_3 k\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}}。
\end{cases}
\tag{9.478}
$$

把它们代入边界条件 (9.411) 和 (9.412) 式即得:

$$
\begin{cases}
2i\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\alpha^2}}A_1 - \left(2-\dfrac{c^2}{\beta^2}\right) B_1 = 0, \\
\left(2-\dfrac{c^2}{\beta^2}\right) A_1 + 2i\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta^2}}B_1 = 0。
\end{cases}
\tag{9.479}
$$

为了使 A_1, B_1 有不等于零的值,参数 c 必须满足上述式子的系数行列式等于零的条件:

$$
\left(2-\frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 = 4\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}}\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}。
\tag{9.480}
$$

这个方程叫瑞雷方程。在我们现在论及的问题里,这个方程的根中只有使 $\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\alpha^2}}$ 和 $\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta^2}}$ 取正值的正根才有意义。

为求瑞雷方程的根,我们将其两边平方:

$$
\frac{c^2}{\beta^2}\left[\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + c^2\left(\frac{24}{\beta^2}-\frac{16}{\alpha^2}\right) - 16\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right] = 0。
\tag{9.481}
$$

由上式可见,$c=0$ 是瑞雷方程的解。但是这个解是没有意义的,因为当 $c=0$ 时,由 (9.477) 和 (9.478) 式可见,φ 与 ψ 便和时间无关。并且,从 (9.479) 式可得,$B_1 = iA_1$,再由 (9.393) 式可得 $u_1 = u_3 = 0$。从 (9.481) 式我们还可以看到,因为 $\beta < \alpha$,所以当 $c = 0$ 时,该式左边方括号内的因子为负;当 $c = \beta$ 时为正。这就意味着如果 $0 < c < \beta < \alpha$,则瑞雷方程至少有一个根,也就是说,在这个条件下面波可以存在。

一般地说,必须用数值方法求瑞雷方程的根。但是实际地球介质很接近于泊松体($\lambda = \mu$ 的弹性固体)。$\lambda = \mu$ 时 $\alpha = \sqrt{3}\beta$。令 (9.481) 式中的 $\alpha/\beta = \sqrt{3}$,我们容易求得瑞雷方程的根,从而对瑞雷波的特性可以得到一个概念:

$$
\left(\frac{c}{\beta}\right)^6 - 8\left(\frac{c}{\beta}\right)^4 + \frac{56}{3}\left(\frac{c}{\beta}\right)^2 - \frac{32}{3} = 0,
\tag{9.482}
$$

$$
\left[\left(\frac{c}{\beta}\right)^2 - 4\right]\left[\left(\frac{c}{\beta}\right)^2 - \left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]\left[\left(\frac{c}{\beta}\right)^2 - \left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] = 0。
\tag{9.483}
$$

上列方程有三个根，$c^2/\beta^2 = 4, 2+\frac{2}{\sqrt{3}}, 2-\frac{2}{\sqrt{3}}$。因为$\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}}$和$\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}}$必须取正值，所以 c 必须小于 β。这样，头两个根不满足要求，只有最小的根 $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$满足问题的要求，因此，

$$c^2 = \left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\beta^2,$$

或

$$c = 0.9194\beta。\tag{9.484}$$

虽然上述头两个根不满足这里所要求的条件，但它们都是瑞雷方程的根，都对应着波动方程的解。如果我们研究 (9.418)，(9.419) 和 (9.429)，(9.430) 等公式就可发现，它们相应于 $A_2 = B_1 = 0$ 和 $A_1 = B_2 = 0$ 两种情况下的解答。第一种情况表示纵波以某一角度入射到自由表面上，以至只有反射横波产生；第二种情况则表示横波以一个角度入射到自由表面上，以至只有反射纵波产生。

当 $c = 0.9194\beta$ 时，$\sqrt{1-\frac{c^2}{\alpha^2}} = 0.8475$，$\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta^2}} = 0.3933$，将这些数值代入 (9.477) 和 (9.478) 式，运用 (9.479) 式，然后将 φ,ψ 代入 (9.393) 式即得：

$$\begin{cases} u_1 = A_1(e^{-0.8475kx_3} - 0.5773e^{-0.3933kx_3})\sin k(ct-x_1), \\ u_3 = A_1(-0.8475e^{-0.8475kx_3} + 1.4679e^{-0.3933kx_3})\cos k(ct-x_1)。\end{cases}\tag{9.485}$$

特别是在自由表面上，

$$\begin{cases} u_1 = 0.4227A_1\sin k(ct-x_1), \\ u_3 = 0.6204A_1\cos k(ct-x_1)。\end{cases}\tag{9.486}$$

由此可见，在地面上，瑞雷波的质点运动描画出一个逆进椭圆(图 9.39)。椭圆的长轴在垂直方向，短轴在水平方向，其比值约为 3:2。

(二) 勒夫 (Love) 波

世界上第一架长周期地震仪测量的是水平方向的地面运动，所以在大地震引起的波动中有着大幅度的横向分量就成为地震学中最早确认的事实之一。然而，理论上不难证明，在均匀、半无限弹性体中，不存在 SH 型的面波。1911 年，勒夫 (A. E. H. Love)对上述矛盾作了解释。他证明，若在均匀半无限弹性体上覆盖着一个无限的平行层，且平行层中的横波速度小于半无限介质中的横波速度，这时，在表面上就可以观测到 SH 型的面波。现在，我们把这种 SH 型的面波叫做勒夫波。

设平行层(介质 1) 厚度为 H，层内刚性系数为 μ，横波速度为 β，半无限空间(介质 2) 的刚性系数为 μ'，横波速度为 β'，且 $\beta' > \beta$。取直角坐标系 x_1,x_2,x_3，将坐标原点置于平行层与半无限介质的分界面上，x_3 轴垂直于界面，向下为正。假定所有的位移都和坐标 x_2 无关，我们来寻求波动方程的一个解：它的振动方向与 x_1x_3 平面垂直，在平行层内沿 x_1 方向波的振幅呈简谐形式分布，而在半无限空间中；振幅随深度指数减小。

由 (9.196) 可知，在介质 1，2 中，x_2 方向的位移 u_2, u_2' 满足波动方程：

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 u_2, \tag{9.487}$$

$$\frac{\partial^2 u_2'}{\partial t^2} = \beta'^2 \nabla^2 u_2' 。 \tag{9.488}$$

我们可以写出波动方程的类似于(9.477)和(9.476)式的解答:

$$u_2 = e^{ik(ct-x_1)}(Ae^{ik\nu x_3} + Be^{-ik\nu x_3}), \tag{9.489}$$

$$u_2' = e^{ik(ct-x_1)}(Ce^{ik\nu' x_3} + De^{-ik\nu' x_3}), \tag{9.490}$$

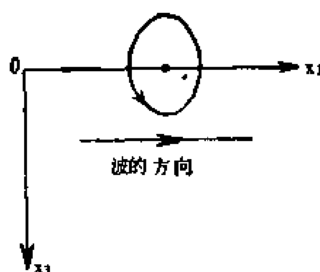


图 9.39 瑞雷波的偏振

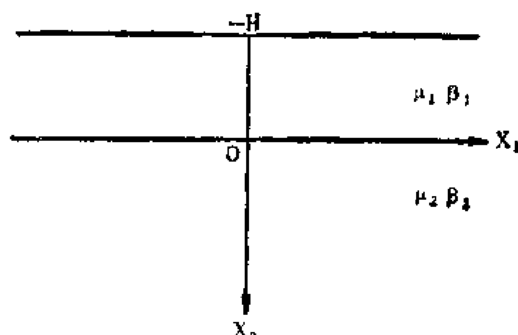


图 9.40 两层半无限弹性介质

其中,

$$\nu = \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1}, \tag{9.491}$$

$$\nu' = \sqrt{\frac{c^2}{\beta'^2} - 1}。 \tag{9.492}$$

规定当 $c/\beta' < 1$ 时, $I_m\nu' > 0$。在这种情况下,为满足波在 $x_3 \to \infty$ 时收敛的条件,系数 D 应当等于零。于是

$$u_2' = Ce^{ik(ct-x_1+\nu' x_3)}。 \tag{9.493}$$

u_2, u_2' 应当满足边界条件,即:在自由表面上,切应力 p_{32} 为零;在分界面上,位移和切应力 p_{32} 都连续:

$$\begin{cases} x_3 = -H, & p_{32} = 0, \\ x_3 = 0, & u_2 = u_2', \\ & p_{32} = p_{32}'。 \end{cases} \tag{9.494}$$

由以上三个式子我们得到:

$$\begin{cases} e^{-ik\nu H}A - e^{ik\nu H} & B = 0, \\ A + & B = C, \\ \mu\nu \quad A - \mu\nu & B = \mu'\nu' C。 \end{cases} \tag{9.495}$$

如果上列方程组的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-ik\nu H} & -e^{ik\nu H} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \mu\nu & -\mu\nu & -\mu'\nu' \end{vmatrix} = 0, \tag{9.496}$$

也就是

$$\tan\left(kH\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}\right)=\frac{\mu'\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta'^2}}}{\mu\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}},\tag{9.497}$$

那么就有可能存在勒夫波。为使上式成立，必须有：$\beta \leqslant c \leqslant \beta'$。如果 $\beta' < \beta$，那么这个方程便没有合适的解答存在。

方程 (9.497) 表示勒夫波的相速度 c 与波数 k 有关，或者说相速度与周期有关。我们把它叫做勒夫波的频散方程，也叫周期方程。当 $c \to \beta'$ 时，$k\nu H \to 0, \pi, 2\pi, \cdots$。并且，对于 $k\nu H \to 0$ 的情形，波长与 H 相比趋于无穷，换句话说，波长很长的勒夫波的相速度 c 趋近于半无限介质中的横波速度。当 $c \to \beta$ 时，波长与 H 相比趋于零，换句话说，波长很短的勒夫波的相速度 c 趋近于层中的横波速度。一般地说，

$$kH\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}=\tan^{-1}\frac{\mu'\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta'^2}}}{\mu\sqrt{\frac{c^2}{\beta^2}-1}}+n\pi,\quad n=0,1,2,\cdots。\tag{9.498}$$

由于反正切函数的多值性，所以相应于一个 c 有无穷多个 k 存在。这样，频散曲线就有无穷多支，相应于 $n=0, 1, 2, \cdots$。每一支相应于一种"振型"。通常称 $n=0$ 的振型为基阶振型，也叫一阶振型；称其它振型为高阶振型，也叫第 $n+1$ 阶振型。

将 (9.495) 式的第一式代入 (9.489) 式，得：

$$u_2=2A\cos[k\nu(x_3+H)]e^{ik(ct-x_1)-ik\nu H}。\tag{9.499}$$

上式表明，当

$$k\nu(x_3+H)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad n=0,1,2,\cdots\tag{9.500}$$

时，$u_2=0$。u_2 等于零的平面叫做节平面。当 $k\nu H<\frac{\pi}{2}$ 时，平行层内无节平面；当 $\pi/2< k\nu H<3\pi/2$ 时有一个节平面；当 $\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi<k\nu H<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时有 n 个节平面。节平面的个数加 1 就等于振型的阶数。

在地震学中，没有节平面的情形最为重要，因为总能量的一大部分通常与波长较长的波、也即 k 值较小的波有关。对于没有节平面的情况，$\lambda > 4\nu H$。

（三）频散方程的相长干涉解释

在许多情况下，面波的频散方程可以解释为在层间全反射的平面波与原平面波发生相长干涉的条件。

在图 9.41 中，$ADEF$ 表示平面 SH 波的一段路径，这个平面波在底面发生全反射后，到了自由表面又发生反射。这个在层间发生全反射后的平面波的波阵面的行程比原平面波的行程长，其行程差等于 BDE 的长度，因此其相位滞后了 $\frac{2\pi}{l}BDE$。这里，l 表示波长，它等于 $2\pi\beta/\omega$。当平面 SH 波在底面发生全反射时，相位超前了 2ζ [(9.455)式]；当它在

自由表面发生反射时，相位不发生变化［(9.441)式］。如果总相位差正好是 2π 的整数倍：

$$\frac{2\pi}{l}BDE-2\zeta=2n\pi,\qquad n=0,1,2,3,\cdots, \tag{9.501}$$

则在层间全反射后的平面波便与原平面波发生相长干涉。

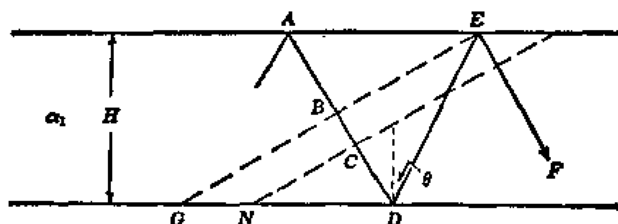


图 9.41　频散方程的相长干涉解释

从图 9.41 可见，$BDE=2H\cos i_s$，所以

$$\frac{\omega}{\beta}H\cos i_s=\tan^{-1}\delta+n\pi,\quad n=0,1,2,3,\cdots。 \tag{9.502}$$

上式与(9.498)式相当。对上式两边取正切，即得勒夫波的频散方程：

$$\tan\left(kH\sqrt{\left(\frac{c}{\beta}\right)^2-1}\right)=\frac{\mu'\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta'^2}}}{\mu\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta^2}-1}}, \tag{9.503}$$

这里，$c=\beta/\sin i_s$。由此可见，面波可以看作是波的一种干涉现象，它的频散方程可以解释为在层间全反射后的平面波与原平面波发生相长干涉的条件。按照这种观点，面波的相速度即是波在水平方向的视速度；高阶振型的面波对应于较高级的干涉。

(四) 面 波 的 频 散

1. 波的频散 · 相速度和群速度

当波传播的相速度 c 与波数 k 有关时，扰动的形状一般将随着时间不断地变化，因为此时扰动所包含的每一种简谐波将以其特有的相速度传播。如果初始扰动局限在空间的一个有限范围内，而介质是无限的，则随着时间的推移，扰动将逐渐扩展为波列。这种现象叫做波的频散。

先考虑波的频散的一种简单情形。设有沿 x 方向传播的、振幅都为 A 的两组正弦波，其圆频率分别为 ω_1 和 ω_2，波数分别为 k_1 和 k_2，那么它们所引起的合振动 u 为：

$$\begin{aligned}u&=A\sin(\omega_1t-k_1x)+A\sin(\omega_2t-k_2x),\\&=2A\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t-\frac{1}{2}(k_1+k_2)x\right]\\&\qquad\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t-\frac{1}{2}(k_1-k_2)x\right]。\end{aligned} \tag{9.504}$$

若它们的圆频率、波数均十分接近：$\omega_1\doteq\omega_2\doteq\omega$，$k_1\doteq k_2\doteq k$，则：

$$u \doteq 2A\cos\left[\frac{(\delta\omega)t-(\delta k)x}{2}\right]\sin(\omega t - kx), \tag{9.505}$$

式中，$\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$，$\delta k = k_2 - k_1$。这表示合振动是一个振幅受到调制的正弦波，其圆频率为 ω，波数为 k，而振幅的最大值以速度

$$U = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{9.506}$$

传播。U 叫做波传播的群速度。在极限情形下，上式变为

$$U = \frac{d\omega}{dk}。 \tag{9.507}$$

对于更复杂的一般情形，也可导出类似结果。

按照傅里叶定理，可以将一个初始扰动 $u(x,o)$ 展开为：

$$u(x,o) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(k)e^{-ikx}dk, \tag{9.508}$$

其中，

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,o)e^{ikx}dx。 \tag{9.509}$$

$u(x,o)$ 是实数，所以 $\hat{u}(-k) = \hat{u}^*(k)$。若初始扰动相对于 $x=0$ 点是对称的，则 $\hat{u}(-k) = \hat{u}(k)$。从而 $\hat{u}(-k) = \hat{u}^*(k) = \hat{u}(k)$，

$$u(x,o) = 2\int_0^{\infty}\hat{u}(k)\cos kx\,dk, \tag{9.510}$$

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}u(x,o)\cos kx\,dx。 \tag{9.511}$$

设初始扰动仅局限于区域 $|x| \leqslant a$，并设初始速度 $u_t(x,o)$ 处处为零。如果波数为 k 的简谐波以相速度 $c = c(k)$ 传播，则 t 时刻在 x 处的扰动为：

$$u(x,t) = 2\int_0^{\infty}\hat{u}(k)\cos(\omega t - kx)dk, \tag{9.512}$$

式中，

$$\omega = kc。 \tag{9.513}$$

因为初始扰动仅局限于 $|x| \leqslant a$，所以

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a}u(x,o)\cos kx\,dx。 \tag{9.514}$$

由此可得：

$$\hat{u}'(k) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{a}xu(x,o)\sin kx\,dx。 \tag{9.515}$$

这说明，除了使 $\hat{u}(k)$ 异常小的 k 值以外，$\hat{u}'(k)$ 与 $a\hat{u}(k)$ 同数量级或小于 $a\hat{u}(k)$ 的数量级。

现在我们来求 t 很大时 $u(x,t)$ 的近似表示式。为此，首先考察 (9.512) 式中 $|k - k_r| \leqslant \delta k_r$ 范围内的简谐波群对 $u(x,t)$ 的贡献 $u_r(x,t)$：

$$u_r(x,t) = 2\int_{-\delta k_r}^{\delta k_r}\hat{u}(k)\cos(\omega t - kx)d\mu, \tag{9.516}$$

式中，$\mu = k - k_r$。将 $\hat{u}(k)$ 在 $k = k_r$ 处作泰勒展开，得：

$$\hat{u}(k) \doteq \hat{u}(k_r)(1+\delta), \tag{9.517}$$

式中，

$$\delta = \frac{\hat{u}'(k_r)}{\hat{u}(k_r)}\mu。 \tag{9.518}$$

可见，如果 $\delta k_r = \varepsilon/a$，$\varepsilon$ 是一个小量，那么 δ 便是一个与 ε 同数量级或比 ε 数量级低的小量。进一步，将 (9.516) 式余弦函数的宗量 $\omega t - kx$ 在 $k = k_r$ 处作泰勒展开，得：

$$\omega t - kx = (\omega_r t - k_r x) + (U_r t - x)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dk}\right)_r \mu^2 t + \frac{1}{6}\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_r \mu^3 t + \cdots, \tag{9.519}$$

上式右边的下角标 r 表示取 $k = k_r$ 时的值。如果 t 足够大，能够满足下列关系：

$$\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_r \mu^3 t = O(1); \tag{9.520}$$

并且，如果

$$\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_r \mu \Big/ \left(\frac{dU}{dk}\right)_r = O(\varepsilon), \tag{9.521}$$

那么在 (9.519) 式右边 μ^3 以上的项便可予以忽略，从而

$$u_r(x,t) \doteq 2\hat{u}(k_r)\int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} \cos\left[(\omega_r t - k_r x) + (U_r t - x)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dk}\right)_r \mu^2 t\right] d\mu。 \tag{9.522}$$

式中，

$$U(k) = \frac{d\omega(k)}{dk}。 \tag{9.507}$$

由 (9.520) 和 (9.521) 式可知，t 应当足够大，使得：

$$t\left(\frac{dU}{dk}\right)_r^3 \left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_r^{-2} = O(\varepsilon^{-3})。 \tag{9.523}$$

由 (9.522) 式可知，在 t 时刻、在坐标为 $x = U_r t$ 的点 (P_r 点)上的扰动应当为：

$$u_r(x,t) \doteq 2\hat{u}(k_r)\int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a} \cos\left[(\omega_r t - k_r x) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dk}\right)_r \mu^2 t\right] d\mu, \tag{9.524}$$

$$\doteq \frac{2\hat{u}(k_r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left|\left(\frac{dU}{dk}\right)_r\right| t}}\int_{-\mu'}^{\mu'} \cos[(\omega_r t - k_r x) \pm \xi^2] d\xi, \tag{9.525}$$

式中的 ± 号分别相应于 $(dU/dk)_r \gtrless 0$ 两种情形，而积分限 μ' 由下式决定：

$$\mu'^2 = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{dU}{dk}\right)_r\right| \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 t。 \tag{9.526}$$

由 (9.520)，(9.521) 两式可知：

$$\mu'^2 = O(\varepsilon^{-1}), \tag{9.527}$$

这说明 (9.525) 式右端的积分上、下限可以用 ±∞代替：

$$u_r(x,t) \doteq \frac{2\hat{u}(k_r)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left|\left(\frac{dU}{dk}\right)_r\right| t}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\omega_r t - k_r x) \pm \xi^2] d\xi。 \tag{9.528}$$

利用著名的菲涅尔（Fresnel）积分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{9.529}$$

便可计算出

$$u_r(x,t) \doteq 2\hat{u}(k_r) \sqrt{\frac{2\pi}{\left|\left(\frac{dU}{dk}\right)_r\right| t}} \cos\left(\omega_r t - k_r x \pm \frac{\pi}{4}\right)。 \tag{9.530}$$

式中，± 号分别相应于 $(dU/dk)_r \gtrless O$ 两种情形。

上式说明，在时刻 t，靠近 P_r 点的扰动有如波长 $2\pi/k_r$ 的简谐波；并且，由 (9.520) 和 (9.521) 式可知，其振幅的数量级为 $\epsilon^{3/2}\hat{u}(k_r)/a$。随着 x 离 P_r 点的距离增加，(9.507) 式中的 μ 项开始重要起来，其数量级为：

$$\mu(U_r t - x) \doteq \frac{\epsilon}{a}(U_r t - x)。 \tag{9.531}$$

但是因为 μ^2 项的数量级为 ϵ^{-1}，所以当 $U_r t - x$ 足够大，使得

$$(U_r t - x) \doteq a\epsilon^{-2} \tag{9.532}$$

时，便可以略去 (9.507) 式中的 μ^2 及以后的项，从而

$$u_r(x,t) \doteq 4\hat{u}(k_r)(U_r t - x)^{-1} \sin\left[(U_r t - x)\frac{\epsilon}{a}\right] \cos(\omega_r t - k_r x)。 \tag{9.533}$$

上式说明，$|k - k_r| \leqslant \delta k_r$ 范围内的简谐波群在时刻 t 对于在 P_r 及其附近的点以外的点上的扰动的贡献也有如波长为 $2\pi/k_r$ 的简谐波，但这个简谐波具有正弦因子 $\sin\left[(U_r t - x)\frac{\epsilon}{a}\right]$，所以扰动发生在一系列宽度为 $a\pi/\epsilon$ 的带中，其振幅随 $|U_r t - x|$ 的增加而不断减小，最大振幅的数量级为 $\hat{u}(k_r)\epsilon/a$，等于靠近 P_r 点的扰动的 $\epsilon^{1/2}$ 倍。这说明，$u_r(x,t)$ 对 t 时刻 P_r 点附近的扰动的贡献比对其它点的贡献大。

前面分析了 $|k - k_r| \leqslant \delta k_r$ 范围内的简谐波群对 P_r 及其附近的点的扰动的贡献，并与它对其余点的贡献作了比较。对于紧挨着这个波群的另一组简谐波群 $|k - (k_r + 2\delta k_r)| \leqslant \delta k_r$，易知它对

$$x + \delta x = U_r(k_r + 2\delta k_r)t$$

点的扰动的贡献最大。这个点与 $x = U_r t$ 点相距

$$\delta x = \left(\frac{dU}{dk}\right)_r 2\delta k_r t = \left(\frac{dU}{dk}\right)_r \frac{2\epsilon t}{a}。$$

由 (9.520) 和 (9.521) 式可知，δx 的数量级为 a/ϵ^2，所以这个简谐波群在 $x = U_r t$ 处的影响的数量级为 $\hat{u}(k_r)/\delta x \doteq \hat{u}(k_r)\epsilon^2/a$，这等于靠近 P_r 点的扰动的振幅的 $\epsilon^{1/2}$ 倍。这说明，在 t 足够大[满足 (9.523) 式所要的条件]时，其它简谐波群在 P_r 点的影响与 k_r 附近的简谐波群相比是比较小的。所以 (9.530) 式便是对于 $u(x, t)$ 在 t 时刻、P_r 点的一个良好的近似。

综上所述，在 x 处，当 t 足够大时，扰动主要来自波长接近于 $2\pi/k_r$ 的简谐波群，它可以用 (9.530) 式表示，而 k_r 是满足

$$\left[\frac{d\omega(k)}{dk}\right]_{k=k_r} = U(k_r) = \frac{x}{t} \tag{9.534}$$

的波数。因此，随着时间的推移，初始扰动连续地将自身分成一系列简谐波组，每一组与一个特殊的波长相联系，并以其特有的群速度 $U(k)$ 向前传播，这里

$$U(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k\,\frac{dc}{dk}。 \tag{9.535}$$

这就是波的频散。一般地说，当有频散时，群速度 $U(k)$ 和相速度 $c(k)$ 是不同的。

2. 爱里 (G. B. Airy) 震相

(9.530) 式既不适用于使 $\hat{u}(k)$ 异常小的 k 值的情形，也不适用于使 dU/dk 异常小的 k 值的情形。后一种情形也就是群速度取稳定值的情形。对于这种情形，在(9.522)式右边的被积函数中，不能忽略掉 μ^3 项，而必须添上它。相应地，ε 不应当按 (9.523) 式选取，而应按下式选取：

$$\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^3\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_s t = O(\varepsilon^{-1})。 \tag{9.536}$$

这里，以下角标 s 表示 k 取使群速度等于稳定值时的 k_s：

$$(dU/dk)_{k=k_s} = 0。$$

于是，波长接近于 $2\pi/k_s$ 的简谐波群对 $u(x,t)$ 的贡献 $u_s(x,t)$ 为：

$$\begin{aligned} u_s(x,t) &\doteq 2\hat{u}(k_s)\int_{-\varepsilon/a}^{\varepsilon/a}\cos\left[(\omega_s t - k_s x) + (U_s t - x)\mu + \frac{t}{6}\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_s\mu^3\right]d\mu, \\ &\doteq 4\hat{u}(k_s)\cos(\omega_s t - k_s x)\int_0^{\varepsilon/a}\cos\left[(U_s t - x)\mu + \frac{t}{6}\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_s\mu^3\right]d\mu。 \end{aligned} \tag{9.537}$$

令

$$s = \left[\frac{t\left|\left(\dfrac{d^2U}{dk^2}\right)_s\right|}{2}\right]^{1/3}\mu, \tag{9.538}$$

$$\zeta = (U_s t - x)\left[\frac{t}{2}\left|\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_s\right|\right]^{-1/3}, \tag{9.539}$$

则

$$\begin{aligned} u_s(x,t) &\doteq 4\hat{u}(k_s)\left[\frac{t}{2}\left|\left(\frac{d^2U}{dk^2}\right)_s\right|\right]^{-1/3}\cos(\omega_s t - k_s x)\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{s^3}{3} \pm s\zeta\right)ds, \\ &\doteq 4\pi\left[\frac{2}{t\left|\left(\dfrac{d^2U}{dk^2}\right)_s\right|}\right]^{1/3}\hat{u}(k_s)\mathrm{Ai}(\pm\zeta)\cos(\omega_s t - k_s x), \end{aligned} \tag{9.540}$$

式中，$\pm$ 号分别与 $(d^2U/dk^2)_s \gtrless 0$ 相对应，而 $\mathrm{Ai}(\zeta)$ 是爱里函数：

$$A_i(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(s\zeta + \frac{s^3}{3}\right)ds, \tag{9.541}$$

它的图形如图 9.42 所示。

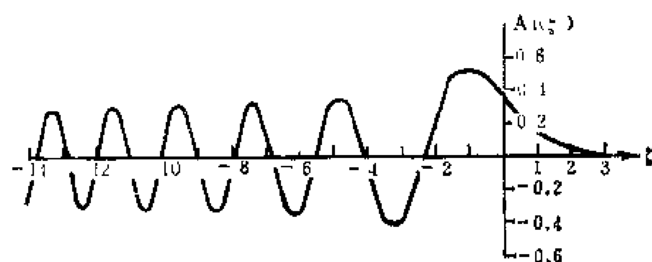


图 9.42 爱里函数 $Ai(\zeta)$

由以上结果可见，与群速度的稳定值相联系的 k_s 附近的简谐波群在 t 时刻、x 处所引起的扰动是波长为 $2\pi/k_s$ 的简谐波，其振幅的包络线由爱里函数表示。对于 $(d^2U/dk^2)_s>0$、即群速度极小值情形，其振幅的包络线如图 9.42 的 $+\zeta$ 方向所示；对于 $(d^2U/dk^2)_s<0$、即群速度极大值情形，其振幅的包络线如图 9.42 的 $-\zeta$ 方向所示。通常把与群速度稳定值相联系的波叫爱里震相。

3. 面波的频散

我们在前面已经看到，勒夫波的相速度 c 与波数 k 有关，也就是说，勒夫波是有频散的。在均匀半无限介质中的瑞雷波没有频散，但在分层半无限介质中的瑞雷波却是有频散的。表示 U(或 c) 和 k(或周期 T)的关系的方程叫频散方程，相应的曲线叫频散曲线。

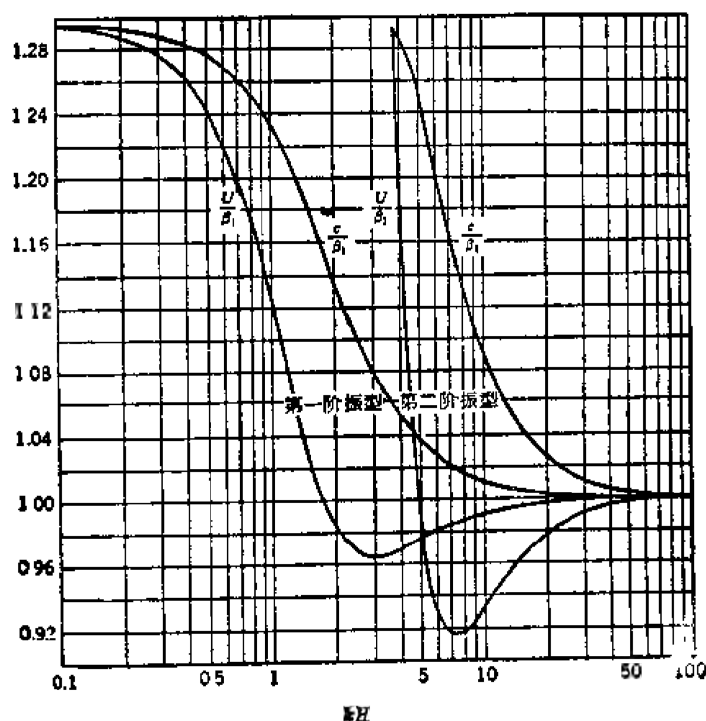


图 9.43 $\beta'/\beta=1.297$ 和 $\mu'/\mu=2.159$ 时的一阶和二阶振型勒夫波的相速度和群速度曲线

图 9.43 是 $\beta'/\beta=1.297$ 和 $\mu'/\mu=2.159$ 时的一阶振型和二阶振型勒夫波的相速度和群速度曲线。为方便起见，以无量纲量 U/β, c/β 和 kH 分别表示群速度与相速度及波

数，并把(9.534)式改写为:

$$U/\beta = c/\beta + kH\frac{d(c/\beta)}{d(kH)}。 \tag{9.542}$$

从地震记录图上可以确定不同周期的面波相速度或群速度。假定 β,β',μ,μ' 已知，通过比较观测得到的和理论计算的相速度或群速度曲线，可以估计出地壳的厚度。

4. 确定相速度和群速度的原理

(1) 群速度

图 9.44 表示由地震记录图确定不同周期的地震面波相速度和群速度的原理。由(9.534)式可知，在 t_1 时刻、x_1 处的扰动是波数满足下式的简谐振动:

$$U(k_r) = \frac{x_1}{t_1}。 \tag{9.543}$$

所以，由震中距为 x_1 的某一台站记录到的面波的周期 T_r 以及该周期面波的走时 t_1，便可按上式求得相应的群速度 $U(k_r)$。

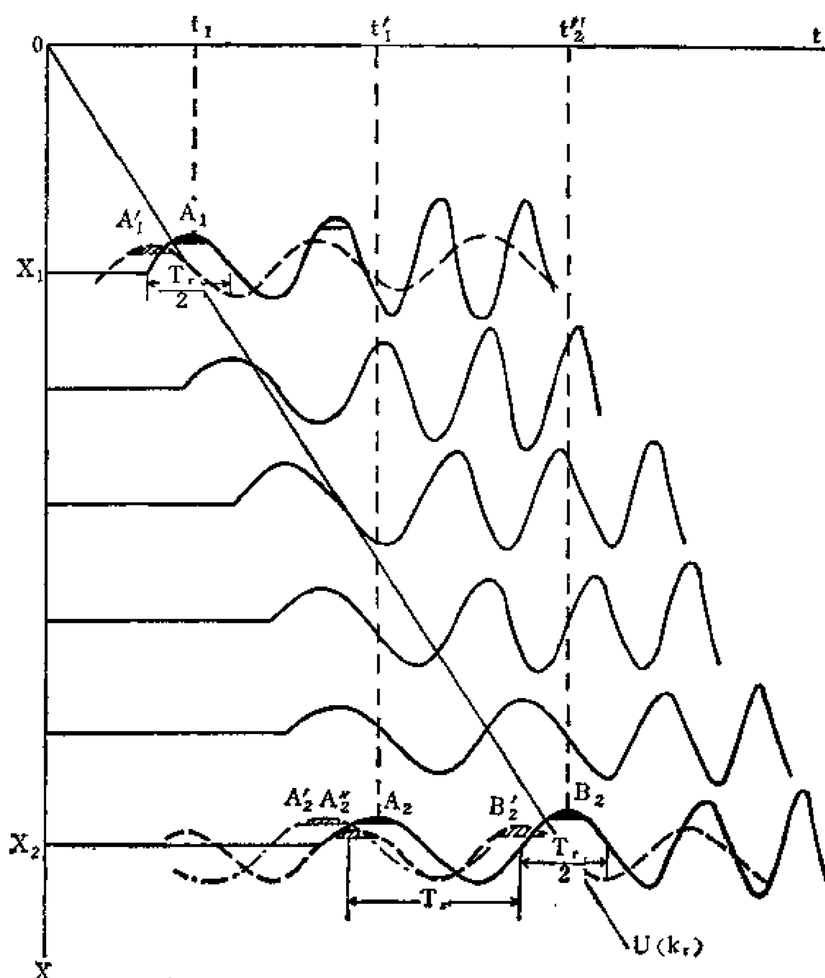


图 9.44 相速度和群速度

如果在 $x_2 = x_1 + \Delta x$ 处在 $t_2 = t_1 + \Delta t$ 时刻又记到了波数为 k_r 的简谐振动，那么

$$U(k_r)=\frac{x_2}{t_2},\tag{9.544}$$

从而

$$U(k_r)=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}。\tag{9.545}$$

按照 (9.534) 式，波数为常数（也即周期相同）的扰动在走时图中的轨迹是一条过原点的直线，其斜率为 $1/U(k_r)$。一般说来，不同地点上周期相同的瞬时扰动其相位是不同的。正如图 9.44 中的直线所表示的：波数为 k 的扰动，其群速度为 $U(k)$；在不同地点上，扰动的瞬时周期都相同，但其相位一般说来是不同的。图 9.44 中只是为了区别相速度和群速度的概念方便起见，才特意标出了不但扰动的周期相同、而且相位也同为波峰的 (x_1,t_1) 和 (x_2,t_2) 的两个瞬时扰动。

（2）相速度

按照 (9.534) 式，t 时刻在 x 处的扰动的波数是 k_r。这个实际出现的扰动(图 9.44 中的 A_1)的相位是：

$$\varphi_1=\omega_r t_1-k_r x_1\pm\frac{\pi}{4},\tag{9.546}$$

它与实际上并未出现在地震记录图上的、波数为 k_r 的简谐波(图 9.44 中的细虚线)的相位差 $\pm\pi/4$ (图中的 A_1')。如果同一波数 k_r 的扰动在 $t_2'=t_1+\Delta t'$ 时刻又出现在 $x_2=x_1+\Delta x$ 处，那么这个扰动(图 9.44 中的 B_2) 的相位是：

$$\varphi_2=\omega_r t_2'-k_r x_2\pm\frac{\pi}{4}。\tag{9.547}$$

自然，这个实际出现的扰动与实际并未出现的、波数为 k_r 的简谐波(图 9.44 中的细虚线)的相位差(图中的 B_2') 也是 $\pm\pi/4$。由此可知，相速度

$$c(k_r)=\frac{\omega_r}{k_r}=\frac{x_2-x_1}{(t_2'-t_1)-\frac{\Delta\varphi}{2\pi}T_r},\tag{9.548}$$

式中，$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$。如果 (x_2,t_2') 的扰动如同图 9.44 所表示的那样不但与 (x_1,t_1) 的扰动周期相同、而且同样是波峰(或波谷，或零点，或其它相位差 2π 的整数倍的相位)，即：

$$\Delta\varphi=2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\tag{9.549}$$

则

$$c(k_r)=\frac{x_2-x_1}{(t_2'-t_1)-nT_r}。\tag{9.550}$$

式中出现了整数 n，意味着根据上述方法，在不同地点只能鉴别出周期相同、但彼此相位差 2π 的整数倍的相位，所以单靠上式不能唯一地确定相速度。为了确定 n 的真值，还需要其它独立的方法。

确定 n 的一种方法是取 n 的某些尝试值，由上式计算出相应的 $c(k_r)$ 曲线。通常，这些曲线彼此分得很开。由这些曲线可以按 (9.535) 式计算出相应的群速度 $U(k_r)$，而只有按真正的 n 值计算出的 $c(k_r)$ 才能导致与由实际资料得到的 $U(k_r)$ 相一致的结果。

另一种方法是，如果震中距之差小于一个波长，那么便可断定与 A_1' 同位相的 A_2'' 必出

现在从 A_1'' 到 B_1' 的时间段上，从而便可确定出 A_2'' 与 B_2' 相差的周期数 n。在图9.44中，A_2'' 与 B_2' 只相差一个周期，即 $n=1$。自然，这个方法容易推广到震中距之差并非小于一个波长的一般情形。

第三种方法是，追踪对比相位相同的扰动以确定相速度。按照前面已得结果，可知 t 时刻在 x 处波长为 k_r 的扰动其相位为 φ_1，如(9.546)所示。它与实际上并未出现在地震记录图上的、波数为 k_r 的简谐波的相位差为 $\pm\pi/4$(图上的 A_1' 点)。如果震中距之差不大，例如小于一个波长，则在 x_2 处与 A_1 同相位的扰动出现在介于 A_1 与 B_1 之间的 $t_1'=t_1+\Delta t_1'$ 时刻(图中的 A_2 点)：

$$\varphi_1=\omega_r' t_1'-k_r' x_2 \pm \frac{\pi}{4}。\tag{9.551}$$

按照(9.534)式，k_r' 满足下式：

$$U(k_r')=\frac{x_2}{t_1'};\tag{9.552}$$

ω_r 表示 $\omega(k_r')$。A_2 点与实际上并未出现在地震记录图上的、波长为 k_r' 的简谐波相位差 $\pm\pi/4$(A_2' 点)。如果同一相位的扰动(即 A_1 和 A_2)的周期变化不大，即 $k_r'\doteq k_r$，$\omega_r'\doteq\omega_r$，则由(9.546)、(9.552)两式可得：

$$c(k_r)\doteq\frac{x_2-x_1}{t_1'-t_1}。\tag{9.553}$$

这个方法同样可以推广到震中距之差不是小于一个波长的一般情形。

对比以上三种方法，可知前面两种方法的要点是设法确定 n；具体地说就是设法找出图9.44中的 A_2''。与前面两种方法不同，后一种方法则是以相位相同(因而 $n=0$)但周期略为不同的 A_2' 近似地代替 A_2''；这也就是相当于

$$t_1'\doteq t_2'-nT_r。\tag{9.554}$$

(3) 三台求相速度

由于大陆海岸线的不规则，或是地壳构造的突然变化，面波的波阵面方向在传播过程中可能发生变化。这样一来，台站相对于震中的方向和波阵面方向就不一致。假定波阵面为一平面，利用三台的方法，可以同时求出波的传播速度和波阵面的方向。图7.45中A,B,C为三个地震台的位置，α 为 AB 与 AC 在 A 点的交角，ϕ 为波阵面与 AB 所成的角度。以 Δt_{AB}，Δt_{BC}，Δt_{AC} 分别表示相应两台间同一相位到达的时差，则相速度为：

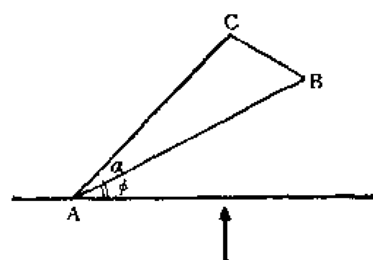


图 9.45 三台求相速度

$$c=\frac{\overline{AB}\sin\phi}{\Delta t_{AB}}=\frac{\overline{AC}\sin(\phi+\alpha)}{\Delta t_{AC}}。\tag{9.555}$$

参 考 书 目

[1] 布伦，K. E.，1965.《地震学引论》，朱传镇、李钦祖译，傅承义校，科学出版社。

[2] 伊文，W.M.，W.S.贾戴茨基和 F. 普瑞斯，1966。《层状介质中的弹性波》，刘光鼎译，王耀文校，科学出版社。

[3] 布列霍夫斯基赫，Л. M.，1960.《分层介质中的波》，杨训仁译，科学出版社。

[4] Garland, G. D., 1971. *Introduction to Geophysics*, W. B. Sauders Company.
[5] Jeffreys, H., 1972. *The Earth,* 5th edition, Cambridge.
[6] Pilant, W. L. 1979. *Elastic Waves in the Earth. Developments in Solid Earth Geophysics,* 11, Elsevier
[7] Stacey, F. D., 1977. *Physics of the Earth,* 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc.

第十章　地球的振荡

一、地球振荡的理论

（一）基本方程

像敲钟可以使钟响起来一样，如果地球上发生一个大地震，也要使整个地球振荡起来。这种情形和体波或面波的传播不同。体波和面波是在地球体内或地球表面上行进着的扰动，在任意给定的时刻，发生运动的只是地球的一部分；当地球振荡时，整个地球同时振动。不过，这并不是本质的差别。从更普遍的观点看，面波是地球整体的自由振荡的某种高阶的（短周期的）振型。

我们来分析地球作为一个整体的自由振荡。设地球是球对称的、半径为 a，将球极坐标系 (r, θ, φ) 的原点置于地球的质心上，以 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ 表示其基矢量，以 (u, v, w) 分别表示在 r, θ, φ 增大方向上相对于未受扰动状态的位移 $\boldsymbol{u}$ 的分量，以 $\lambda(r)$, $\mu(r)$ 表示拉梅系数，$\rho(r)$ 表示密度。下角标"0"表示未受扰动状态。设初始应力状态呈流体静压力平衡状态，其流体静压力为 $p_0(r)$。由运动方程(9.20)得：

$$-\nabla p_0 + \rho_0 \boldsymbol{X}_0 = 0。 \tag{10.1}$$

式中，$\boldsymbol{X}_0$ 是未受扰动状态下的体力。假设在我们现在讨论的问题里重力是唯一的体力，则

$$\boldsymbol{X}_0 = -g_0 \boldsymbol{e}_r, \tag{10.2}$$

式中，

$$g_0 = g_0(r)。 \tag{10.3}$$

是未受扰动状态下的重力加速度。由以上三个公式可得：

$$\frac{dp_0}{dr} = -\rho_0 g_0。 \tag{10.4}$$

按照(9.20)式，在振荡过程中，质点的位移 $\boldsymbol{u}$ 满足运动方程：

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mathrm{div}\,(\mathbf{p}) + \rho \boldsymbol{X}。 \tag{10.5}$$

如果以 ψ' 代表与振荡过程中的密度差 $\rho - \rho_0$ 以及伴随的表面位移相联系的重力位，则体力

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \nabla\psi'。 \tag{10.6}$$

在球极坐标中，

$$\nabla\psi' = \frac{\partial\psi'}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\partial\psi'}{r\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\psi'}{r\sin\theta\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi。 \tag{10.7}$$

由连续方程可知，

$$\rho(\boldsymbol{r}) - \rho_0(\boldsymbol{r}) + \nabla\cdot[_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})] = 0,$$

也就是

$$\rho = \rho_0 - u\frac{d\rho_0}{dr} - \rho_0\Theta。\tag{10.8}$$

因为附加的重力位 ψ' 满足泊松方程:

$$\nabla^2\psi' = -4\pi G(\rho - \rho_0),\tag{10.9}$$

式中,G 是引力常数,所以

$$\nabla^2\psi' = 4\pi G\left(\rho_0\Theta + u\frac{d\rho_0}{dr}\right)。\tag{10.10}$$

在形变状态中,地球内部的应力张量 $\mathbf{p}(\boldsymbol{r})$ 等于未形变状态中 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}$ 点的初始应力[流体静压力 $-p_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u})$] 加上由于位移引起的附加应力 $\mathbf{p}'(\boldsymbol{r})$。对于正应力分量 p_{rr} 来说,准确到一级小量,

$$\begin{aligned}p_{rr}(\boldsymbol{r}) &= -p_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}) + p'_{rr}(\boldsymbol{r}),\\ &\doteq -p_0(\boldsymbol{r}) + \rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}_0 + p'_{rr}(\boldsymbol{r});\end{aligned}\tag{10.11}$$

另两个正应力分量 $p_{\theta\theta}$, $p_{\varphi\varphi}$ 也有类似结果。对于切应力分量 $p_{\theta\varphi}$ 来说,

$$p_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r}) = p'_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r});\tag{10.12}$$

根据以上结果,我们可以将应力-应变关系表示为:

$$\begin{cases}p_{rr} = p_1 + 2\mu e_{rr},\\ p_{\theta\theta} = p_1 + 2\mu e_{\theta\theta},\\ p_{\varphi\varphi} = p_1 + 2\mu e_{\varphi\varphi},\\ p_{\theta\varphi} = 2\mu e_{\theta\varphi},\\ p_{\varphi r} = 2\mu e_{\varphi r},\\ p_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta}。\end{cases}\tag{10.13}$$

其中,

$$p_1 = -(p_0 + \rho_0 g_0 u) + \lambda\Theta。\tag{10.14}$$

以张量形式表示,即

$$\mathbf{p} = -(p_0 + \rho_0 g_0 u)\mathbf{I} + \mathbf{p}'。\tag{10.15}$$

在应力-应变关系中,e_{rr} 等是球极坐标下的应变分量,它们可以表示成:

$$\begin{cases}e_{rr} = \dfrac{\partial u}{\partial r},\\ e_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} + \dfrac{u}{r},\\ e_{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi} + \dfrac{v}{r}\cot\theta + \dfrac{u}{r},\\ 2e_{\theta\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta} - \dfrac{w}{r}\cot\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi},\\ 2e_{\varphi r} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{w}{r},\\ 2e_{r\theta} = \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}。\end{cases}\tag{10.16}$$

而体积膨胀 Θ 可以表示成:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}。 \tag{10.17}$$

将(10.6)和(10.15)式代入(10.5)式可得:

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\mathbf{p}' + \rho_0\nabla(\phi' - g_0u) + \rho_0\Theta g_0\boldsymbol{e}_r, \tag{10.18}$$

或者表示成:

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \mu\nabla\Theta + 2\nabla\mu\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\mu\times\nabla\times\boldsymbol{u}$$
$$+ \nabla(\lambda\Theta) + \rho_0\nabla(\phi' - g_0u) + \rho_0\Theta g_0\boldsymbol{e}_r。 \tag{10.19}$$

以分量形式表示,就是,

$$\begin{cases} \rho_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 g_0\Theta + \rho_0\dfrac{\partial\phi'}{\partial r} - \rho_0\dfrac{\partial(g_0u)}{\partial r} + \dfrac{\partial p'_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p'_{r\theta}}{\partial\theta} \\ \qquad + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial p'_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r}(2p'_{rr} - p'_{\theta\theta} - p'_{\varphi\varphi} + p'_{r\theta}\cot\varphi), \\ \rho_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\rho_0}{r}\dfrac{\partial\phi'}{\partial\theta} - \rho_0\dfrac{\partial(g_0u)}{r\partial\theta} + \dfrac{\partial p'_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p'_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial p'_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} \\ \qquad + \dfrac{1}{r}[(p'_{\theta\theta} - p'_{\varphi\varphi})\cot\theta + 3p'_{r\theta}], \\ \rho_0\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\rho_0}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\phi'}{\partial\varphi} - \rho_0\dfrac{\partial(g_0u)}{r\sin\theta\,\partial\varphi} + \dfrac{\partial p'_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p'_{\theta\varphi}}{\partial\theta} \\ \qquad + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial p'_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r}(3p'_{r\varphi} + 2p'_{\theta\varphi}\cot\theta)。 \end{cases} \tag{10.20}$$

将(10.13)和(10.14)式代入上式,就得到:

$$\begin{cases} \rho_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 g_0\Theta + \rho_0\dfrac{\partial\phi'}{\partial r} - \rho_0\dfrac{\partial}{\partial r}(g_0u) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\Theta + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) \\ \qquad + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial(\mu e_{r\theta})}{\partial\theta} + \dfrac{2}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\mu e_{\varphi r})}{\partial\varphi} + \dfrac{2\mu}{r}(2e_{rr} - e_{\theta\theta} - e_{\varphi\varphi} + \cot\theta\, e_{r\theta}), \\ \rho_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\rho_0}{r}\dfrac{\partial\phi'}{\partial\theta} - \dfrac{\rho_0}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(g_0u) + 2\dfrac{\partial}{\partial r}(\mu e_{r\theta}) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\lambda\Theta + 2\mu e_{\theta\theta}) \\ \qquad + \dfrac{2}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\mu e_{\theta\varphi})}{\partial\varphi} + \dfrac{\mu}{r}\Big[2\cot\theta\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} - \dfrac{v}{r}\cot\theta - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}\right) \\ \qquad + 6e_{r\theta}\Big], \\ \rho_0\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\rho_0}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\phi'}{\partial\varphi} - \rho_0\dfrac{\partial(g_0u)}{r\sin\theta\,\partial\varphi} + 2\dfrac{\partial}{\partial r}(\mu e_{r\varphi}) + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\mu e_{\theta\varphi}) \\ \qquad + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\lambda\Theta + 2\mu e_{\varphi\varphi}) + \dfrac{6\mu}{r}e_{r\varphi} + \dfrac{4\mu}{r}\cot\theta\, e_{\theta\varphi}。 \end{cases}$$

$$\tag{10.21}$$

(10.10)和(10.19)式[或其分量形式(10.20)或(10.21)式]是 u, v, w 和 ϕ' 的一组复杂的二阶偏微分方程。给定 $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\rho(r)$ 等 r 的函数和边界条件后,原则上可以解出这些方程。

(二) 边 界 条 件

在我们现在讨论的问题里，边界条件是：①解在原点正则；②在形变了的地球表面上，应力应当为零；③在形变了的地球表面上，内重力位和外重力位及其梯度应当连续。如果所采用的地球模式作为 r 的函数的 $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\rho(r)$ 不连续时，那么还应当添上：④在形变了的边界面上，位移和应力连续。如果这个边界面是固体-液体的分界面（例如地幔-地核分界面），那么上述的切应力连续的条件应改为：⑤在形变了的固体-液体分界面的固体这一边，切应力为零。

现在我们讨论的自重力地球自由振荡问题的边界条件是比较复杂的。设某一球面 $r=r_0$ 是地球未扰动时的一个分界面。形变后，这个分界面位移到

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0)。\tag{10.22}$$

在这个形变了的分界面上，上面提及的边界条件都应当满足。对于位移来说，我们很容易得到：准确到一级小量，如果在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处 $\boldsymbol{u}$ 连续，则位移连续的条件就能满足。对于应力来说，同样是准确到一级小量，我们可得：

$$\begin{aligned}p_{rr}(\boldsymbol{r})&=p_{rr}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}),\\&=-p_0(\boldsymbol{r}_0)+p'_{rr}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}),\\&\doteq-p_0(\boldsymbol{r}_0)+p'_{rr}(\boldsymbol{r}_0)。\end{aligned}\tag{10.23}$$

$$\begin{aligned}p_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r})&=p_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}),\\&=p'_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}),\\&\doteq p'_{\theta\varphi}(\boldsymbol{r}_0)。\end{aligned}\tag{10.24}$$

这两个公式说明，只要在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处附加应力连续或等于零，就能保证应力连续或等于零的条件成立。

对于重力位，准确到一级小量，我们有：

$$\begin{aligned}\phi_0(\boldsymbol{r})+\phi'(\boldsymbol{r})&=\phi_0(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u})+\phi'(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}),\\&\doteq\phi_0(\boldsymbol{r}_0)+u\frac{\partial\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0}+\phi'(\boldsymbol{r}_0)。\end{aligned}\tag{10.25}$$

ϕ_0 和 $\nabla\phi_0=\boldsymbol{g}_0$ 是处处连续的。所以只要 $\phi'(\boldsymbol{r})$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 处连续，重力位就连续。

对于重力位梯度，也是准确到一级小量，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_0(\boldsymbol{r})}{\partial r}+\frac{\partial\phi'(\boldsymbol{r})}{\partial r}&=\frac{\partial\phi_0(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u})}{\partial r}+\frac{\partial\phi'(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u})}{\partial r},\\&\doteq\frac{\partial\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0}+u\frac{\partial^2\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0^2}+\frac{\partial\phi'(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0},\\&=\frac{\partial\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r}+u\left[\frac{\partial^2\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0^2}+4\pi G\rho_0\right],\\&\quad+\left[\frac{\partial\phi'(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0}-4\pi G\rho_0 u\right]。\end{aligned}\tag{10.26}$$

上式右边第一项是重力的 r 分量，它本身就是连续的，第二项的方括号内的 $\dfrac{\partial^2\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0^2}$ 不一定连续，但由于 $\phi_0(\boldsymbol{r}_0)$ 满足泊松方程

$$\nabla^2\phi_0 = -4\pi G\rho_0, \tag{10.27}$$

所以即使 $\rho_0(\boldsymbol{r}_0)$ 不连续时，$\dfrac{\partial^2\phi_0(\boldsymbol{r}_0)}{\partial r_0^2} + 4\pi G\rho_0$ 也是连续的。于是，如果量

$$\frac{\partial\phi'(\boldsymbol{r})}{\partial r} - 4\pi G\rho_0 u, \tag{10.28}$$

在 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ 处连续，就能保证重力位梯度在 $\boldsymbol{r}$ 处连续。

（三）运动方程的解

略去时间因子 $e^{i\omega t}$，运动方程(10.18)式的基本解可以表示成：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^s + \boldsymbol{u}^t, \tag{10.29}$$

式中，

$$\boldsymbol{u}^s = \left\{U(r)Y_l^m,\ V(r)\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta},\ \frac{V(r)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\right\}, \tag{10.30}$$

$$\boldsymbol{u}^t = \left\{0,\ \frac{W(r)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi},\ -W(r)\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right\}。 \tag{10.31}$$

式中，Y_l^m 是 l 次 m 阶球谐函数：

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{10.32}$$

$P_l^m(x)$ 是第一类连带勒让德函数：

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),$$
$$|m| \leqslant l, x = \cos\theta。 \tag{10.33}$$

$P_l(x)$ 是勒让德函数。将(10.29)代入(10.10)和(10.18)式，并将附加重力位 ϕ' 按球谐函数展开：

$$\phi' = P(r)Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{10.34}$$

便可求得 U, V, W, P 满足的方程组：

$$\begin{cases}\rho_0\omega^2U + \rho_0\dfrac{dP}{dr} + \rho_0g_0X - \rho_0\dfrac{d}{dr}(g_0U) + \dfrac{d}{dr}\left(\lambda X + 2\mu\dfrac{dU}{dr}\right) \\ \qquad + \dfrac{\mu}{r^2}\left[4r\dfrac{dU}{dr} - 4U + l(l+1)\left(-U - r\dfrac{dV}{dr} + 3V\right)\right] = 0, \\ \rho_0\omega^2Vr + \rho_0P - \rho_0g_0U + \lambda X + r\dfrac{d}{dr}\left[\mu\left(\dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r} + \dfrac{U}{r}\right)\right] \\ \qquad + \dfrac{\mu}{r}\left[5U + 3r\dfrac{dV}{dr} - V - 2l(l+1)V\right] = 0, \\ \dfrac{d^2W}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dW}{dr} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dr}\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r}\right) + \left[\dfrac{\rho_0\omega^2}{\mu} - \dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]W = 0, \\ \dfrac{d^2P}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dP}{dr} - \dfrac{l(l+1)}{r^2}P = 4\pi G\left(\dfrac{d\rho_0}{dr}U + \rho_0X\right)。\end{cases} \tag{10.35}$$

式中，X 是体膨胀的径向因子：

$$X = \frac{dU}{dr} + 2\frac{U}{r} - \frac{l(l+1)}{r}V。 \tag{10.36}$$

在 (10.35) 式中，位函数 W 与 U, V, P 是不耦合的，说明 $\boldsymbol{u}^t$ 可以和 $\boldsymbol{u}^s$ 分开单独讨论。现在将(10.31)式代入 (10.16) 式，然后代入 (10.13) 式，即得和 $\boldsymbol{u}^t$ 相应的附加应力分量：

$$
\begin{cases}
p'_{rr} = 0, \\
p'_{\theta\theta} = \dfrac{2\mu y_1^t}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\theta\partial\varphi} - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\right), \\
p'_{\varphi\varphi} = -p'_{\theta\theta}, \\
p'_{\theta\varphi} = \dfrac{\mu y_1^t}{r}\left(-\dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\theta^2} + \cot\theta\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\varphi^2}\right), \\
p'_{\varphi r} = -y_2^t\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}, \\
p'_{r\theta} = y_2^t\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}。
\end{cases}
\tag{10.37}
$$

式中，

$$
\begin{cases}
y_1^t(r) = W(r), \\
y_2^t(r) = \mu\left(\dfrac{dW}{dr} - \dfrac{W}{r}\right)。
\end{cases}
\tag{10.38}
$$

$y_1^t(r)$ 是与 $\boldsymbol{u}^t$ 相应的位移的径向因子，$y_2^t(r)$ 是与 $\boldsymbol{u}^t$ 相应的切应力 $p'_{\varphi r}$ 和 $p'_{r\theta}$ 的径向因子。将上式代入(10.34)的第三式，我们就可得到：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1^t}{dr} = \dfrac{1}{r}y_1^t + \dfrac{1}{\mu}y_2^t, \\
\dfrac{dy_2^t}{dr} = \left[\dfrac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho_0\omega^2\right]y_1^t - \dfrac{3}{r}y_2^t。
\end{cases}
\tag{10.39}
$$

这个方程组可以从某一初值开始求积，例如在地核-地幔边界 $r = b$ 处，

$$
\begin{cases}
y_1^t(b) = 1, \\
y_2^t(b) = 0。
\end{cases}
\tag{10.40}
$$

从上式表示的初值开始求积，运用在不同层的分界面 $r = r_0$ 处位移 $y_1^t(r)$ 和应力 $y_2^t(r)$ 连续的条件，便可求得 $y_1^t(a;\omega, l)$。最后，由 $p'_{\varphi r}$ 和 $p'_{r\theta}$ 在 $r = a$ 处等于零的边界条件可以求得特征方程：

$$
\Delta_t(\omega, l) = y_2^t(a;\omega, l) = 0。
\tag{10.41}
$$

$\boldsymbol{u}^s$ 的情况比 $\boldsymbol{u}^t$ 的复杂一些，但按照与处理 $\boldsymbol{u}^t$ 类似的步骤也可以求得相应的结果。将(10.30)式代入(10.16)式，然后代入(10.13)式，就得到和 $\boldsymbol{u}^s$ 相应的附加应力分量：

$$
\begin{cases}
p'_{rr} = y_2 Y_l^m, \\
p'_{\theta\theta} = \left[\lambda\dfrac{dy_1}{dr} + 2(\lambda+\mu)\dfrac{y_1}{r} - (\lambda+2\mu)l(l+1)\dfrac{y_3}{r}\right]Y_l^m \\
\qquad - \dfrac{2\mu}{r}y_3\left(\cot\theta\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\varphi^2}\right), \\
p'_{\varphi\varphi} = \left[\lambda\dfrac{dy_1}{dr} + 2(\lambda+\mu)\dfrac{y_1}{r} - (\lambda+2\mu)l(l+1)\dfrac{y_3}{r}\right]Y_l^m \\
\qquad - \dfrac{2\mu y_3}{r}\dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\theta^2},
\end{cases}
\tag{10.42}
$$

$$
\begin{cases}
p'_{\theta\varphi} = \dfrac{2\mu}{r} y_3 \left(\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\theta\partial\varphi} - \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi} \right), \\
p'_{\varphi r} = \dfrac{y_4}{\sin\theta} \dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}, \\
p'_{r\theta} = y_4 \dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}。
\end{cases}
$$

式中，

$$
\begin{cases}
y_1(r) = U(r), \\
y_2(r) = \lambda X + 2\mu \dfrac{dU}{dr}, \\
y_3(r) = V(r), \\
y_4(r) = \mu\left(\dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r} + \dfrac{U}{r} \right)。
\end{cases} \tag{10.43}
$$

由以上两式可见，$y_1(r)$ 是径向位移 u 的径向因子，$y_3(r)$ 是 θ 方向位移 v 的径向因子，$y_2(r)$ 是附加正应力 p'_{rr} 的径向因子，$y_4(r)$ 是附加切应力 $p'_{\varphi r}$ 和 $p'_{r\theta}$ 的径向因子。引进如下式定义的 $y_5(r)$ 和 $y_6(r)$：

$$
\begin{cases}
y_5(V) = P(r), \\
y_6(r) = \dfrac{dy_5}{dr} - 4\pi G\rho_0 y_1 + \dfrac{l+1}{r} y_5,
\end{cases} \tag{10.44}
$$

$y_5(r)$ 是附加重力位的径向因子，$\dfrac{dy_5}{dr} - 4\pi G\rho_0 y_1$ 是(10.28)式所表示的、使重力位梯度连续的量的径向因子。将以上两式代入(10.34)的第一、二、四式，就得到：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dr} = -\dfrac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)} \dfrac{y_1}{r} + \dfrac{1}{\lambda+2\mu} y_2 + \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu} \dfrac{l(l+1)}{r} y_3, \\
\dfrac{dy_2}{dr} = \left[-\rho_0\omega^2 r^2 - 4\rho_0 r g_0 + 4\mu \dfrac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] \dfrac{y_1}{r^2} - \dfrac{4\mu}{\lambda+2\mu} \dfrac{y_2}{r} \\
\qquad - \dfrac{l(l+1)}{r^2} \left[-\rho_0 g_0 r + 2\mu \dfrac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] y_3 \\
\qquad + \dfrac{l(l+1)}{r} y_4 + \rho_0 \dfrac{(l+1)}{r} y_5 - \rho_0 y_6, \\
\dfrac{dy_3}{dr} = -\dfrac{y_1}{r} + \dfrac{y_3}{r} + \dfrac{y_4}{\mu}, \\
\dfrac{dy_4}{dr} = \left[\rho_0 r g_0 - 2\mu \dfrac{(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \right] \dfrac{y_1}{r^2} - \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu} \dfrac{y_2}{r} \\
\qquad + \left[-\rho_0\omega^2 r^2 + \dfrac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - 2\mu \right] \dfrac{y_3}{r^2} - 3\dfrac{y_4}{r} - \rho_0 \dfrac{y_5}{r}, \\
\dfrac{dy_5}{dr} = 4\pi G\rho_0 y_1 + y_6 - \dfrac{l+1}{r} y_5, \\
\dfrac{dy_6}{dr} = \dfrac{l-1}{r} (y_6 + 4\pi G\rho_0 y_1) + \dfrac{4\pi G\rho_0}{r} [2y_1 - l(l+1)y_3]。
\end{cases} \tag{10.45}
$$

为了积出上式中的六个未知函数，我们假定在 $r < r_1$ 时地球是均匀的，将 $r < r_1$ 时的 $y_i(i = 1, 2, \cdots 6)$ 展开成 r 的幂级数，解上列的常微分方程组，这样便求得了 $r < r_1$

时的 y_i。然后以 $y_i(r_1)$ 为初值，从 $r=r_1$ 开始向外做数值积分，在不同层的分界面 $r=r_0$ 上，运用位移 $y_1(r)$，$y_3(r)$ 和应力 $y_2(r)$，$y_4(r)$ 连续的条件以及重力位 $y_5(r)$，重力位的梯度 $y_6(r)-\frac{l+1}{r}y_5(r)$ 连续的条件便可求得 $y_i(a;\omega,l)$。最后，在 $r=a$ 处，解答应当满足应力等于零的条件：

$$y_2(a)=y_4(a)=0, \tag{10.46}$$

以及重力位的梯度连续的条件。在 $r=a$ 处重力位的梯度连续的条件可以通过以下考虑求得。设因扰动引起的附加外重力位为 ψ_e，因为 ψ_e 满足拉普拉斯方程，所以可以将它表示为：

$$\psi_e(r,\theta,\varphi)=D\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}Y_l^m(\theta,\varphi)。 \tag{10.47}$$

按照(10.28)式和上式，在 $r=a$ 处重力位梯度连续条件也就是在 $r=a$ 处，

$$\frac{\partial\psi'}{\partial r}-4\pi G\rho_0 u=\frac{\partial\psi_e}{\partial r}。 \tag{10.48}$$

因为在 $r=a$ 处重力位连续，所以

$$\psi'(a)=\psi_e(a), \tag{10.49}$$

将(10.34)和(10.47)式代入上式就可定出系数

$$D=P(a)=y_5(a)。 \tag{10.50}$$

将(10.34)，(10.47)式代入(10.48)式并利用(10.44)式的第二式就得到在 $r=a$ 处重力位梯度连续的条件：

$$y_6(a)=0。 \tag{10.51}$$

方程组(10.45)有6组独立的解，其中3组满足在原点正则的条件。若以 y_{i1}，y_{i2}，y_{i3} $(i=1,2,3,4,5,6)$ 分别表示这三组解，则任何满足在原点正则条件的解都可以表示为它们的线性组合：

$$y_i(r)=Q_1y_{i1}(r)+Q_2y_{i2}(r)+Q_3y_{i3}(r),\quad i=1,2,\cdots 6。 \tag{10.52}$$

式中，Q_1，Q_2，Q_3 是任意的积分常数，它们取决于边界条件。由在 $r=a$ 处应力等于零的条件[(10.46)式]和重力位梯度连续的条件[(10.51)式]可得：

$$\begin{cases}Q_1y_{21}(a)+Q_2y_{22}(a)+Q_3y_{23}(a)=0,\\ Q_1y_{41}(a)+Q_2y_{42}(a)+Q_3y_{43}(a)=0,\\ Q_1y_{61}(a)+Q_2y_{62}(a)+Q_3y_{63}(a)=0。\end{cases} \tag{10.53}$$

这是一个关于 Q_1，Q_2，Q_3 的齐次方程组，只有当其系数行列式

$$\Delta_s(\omega,l)=\begin{vmatrix}y_{21}(a) & y_{22}(a) & y_{23}(a)\\ y_{41}(a) & y_{42}(a) & y_{43}(a)\\ y_{61}(a) & y_{62}(a) & y_{63}(a)\end{vmatrix}=0。 \tag{10.54}$$

时才有非零解存在。上式就是与 $\boldsymbol{u}^s$ 相应的特征方程。

(四) 环型振荡和球型振荡

我们来分析上述问题的解答的意义。$\boldsymbol{u}^t$ 表示一种驻波，它只在和 $\boldsymbol{e}_r$ 垂直的平面内振荡。容易直接验证，与 $\boldsymbol{u}^t$ 相联系的体积膨胀 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}^t$ 为零。这种类型的振荡叫环型振荡

(toroidal oscillations)，因为作这种振荡时质点都在和地心同心的球面上运动。这种振荡又叫做扭转型振荡（torsional oscillations），因为作这种振荡时只发生剪切形变。

既然 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}^t = 0$，所以环型振荡不能引起密度变化，也就是重力场不受其干扰。在实际应用中，这一性质很重要，因为记录重力变化的仪器记录不到这类振荡，它只能用应变仪和长周期地震仪记录下来。

$\boldsymbol{u}^s$ 也表示一种驻波，它既有径向分量，又有与径向分量和 $\boldsymbol{u}^t$ 都正交的分量。容易直接验证，与 $\boldsymbol{u}^s$ 相联系的旋转量 $\nabla \times \boldsymbol{u}^s$ 的径向分量为零。这种类型的振荡叫球型振荡(spheroidal oscillations)。

在解特征方程（10.41）式［或（10.54）式］时，对于每一个给定的 l，通常都有一个相应于径向函数 $W(r)$［或 $U(r)$ 和 $V(r)$］没有节点的频率以及相应于 $W(r)$［或 $U(r)$ 和 $V(r)$］有 $1, 2, \cdots n$ 个节点的频率。我们把节点数 $n = 0$ 时的频率叫做基频；$n > 0$ 时的频率叫做谐频。在不存在 $n = 0$ 时的频率时，把 $n = 1$ 时的频率叫做基频；$n > 1$ 时的频率叫做谐频。通常以 ${}_nT_l^m$ 表示环型振荡，${}_nS_l^m$ 表示球型振荡。$n = 0$ 表示基频振型；$n > 0$ 表示谐频振型。在不存在 $n = 0$ 的振型时，以 $n = 1$ 表示基频振型，$n > 1$ 表示谐频振型。由连带勒让德函数的性质可知，$Y_l^m(\theta, \varphi)$ 是田谐函数，$l - |m|$ 表示了在纬度方向的节点数，$2m$ 表示了在经度方向的节点数（参见图 10.1）。当

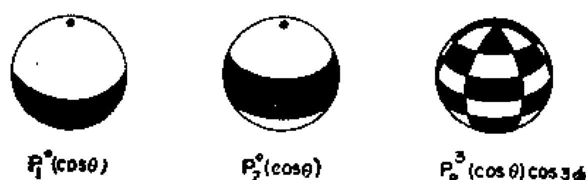


图 10.1 球谐函数示意图

$m = 0$ 时，它退化为带谐函数；当 $m = l$ 时，它变成瓣谐函数。由特征方程（10.41）或(10.54)式可以看出，特征频率只和 l 有关，而和 m 无关。换句话说，田谐项、带谐项和瓣谐项的频率都一样，从自由振荡周期无法将它们区分开。我们把这种情况叫做周期对于指标 m 简并（degenerate），并且略去指标 m，以 ${}_nT_l$ 和 ${}_nS_l$ 分别表示这两类振荡。显然，每一个 ${}_nT_l$ 和 ${}_nS_l$ 振型实际上都是由 $2l + 1$ 个振型简并而成的。

有些振型从物理意义上来看是不可能的。例如，${}_nT_0^0$ 是不存在的。因为当 $l = m = 0$ 时，$\boldsymbol{u}^t = 0$。地震是一种内力，它不会激发起 ${}_0S_1^m$ 和 ${}_0T_1^0$，因为 ${}_0S_1^m$ 表示的是整个同心球层像刚体一样平动，这和假定地球没有受到除自身的重力（内力）以外的力(外力)作用是相矛盾的。${}_0T_1^0$ 表示的是整个同心球层像刚体一样绕极轴旋转，这意味着整个地球的自转速率要发生变化，和角动量守恒的假设也是相矛盾的。既然靠内力激发不起 ${}_0S_1^m$ 和 ${}_0T_1^0$，所以对于 S_1^m 振型和 T_1^0 振型来说，${}_1S_1^m$ 和 ${}_1T_1^0$ 振型分别是其基频振型。

我们把 $l = 0$ 时的球型振荡叫做径向振荡，因为在这种情况下 $\boldsymbol{u}^s$ 只有径向分量［参见(10.30)式］，注意 $Y_0^0 = 1$］。图 10.2a 是一个例子 ${}_0S_0^0$，它表示这时质点的运动不但是纯径向，而且整个地球像圆气球做呼吸一样地交替地涨缩。$l = 2$ 时的球型振荡特别叫做“足球型”振荡。图 10.2b 是“足球型”振荡 ${}_0S_2^0$。因为当 $l = 2$ 时，$Y_2^0 = P_2(\cos\theta) =$

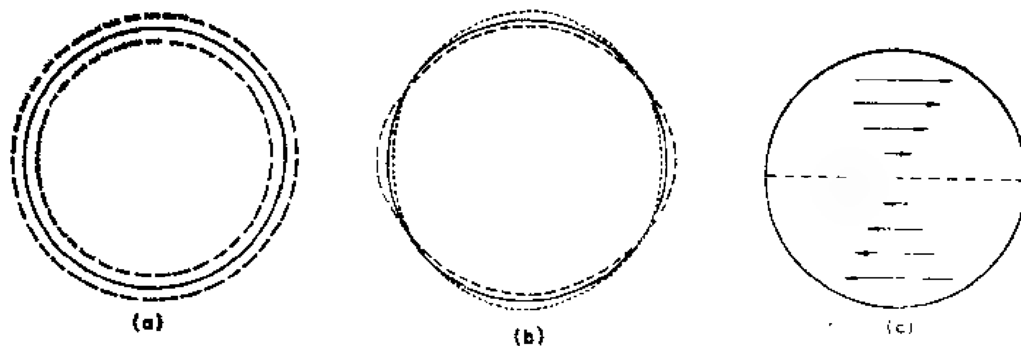


图 10.2　地球自由振荡的几种最简单的振型

a. ${}_0S_0^0$;　b. ${}_0S_2^0$;　c. ${}_0T_2^0$

$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$，在纬度方向有两个节点，径向位移使得地球交替地呈现长椭球和扁椭球。图 10.2c 是另一个例子 ${}_0T_2^0$，它表示同心球层以赤道面为节面而扭转振荡，因为此时 $\boldsymbol{u}^t=-W(r)\frac{\partial Y_2^0}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{3}{2}W(r)\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\varphi$。

（五）地球的振荡和地震面波

在讨论地球的振荡时，我们把它当作一个整体来处理，用驻波法分析地球上每一点的振动情况；在讨论地震面波的传播时，我们则用行波法分析行进着的扰动在地球表面上的传播。驻波法和行波法两者都是用来描述地球的运动的，它们在本质上是一致的。我们现在要通过具体的分析说明，这两种理论的差别的确是表面的。为此我们来看运动方程的基本解 $\boldsymbol{u}^t$ 和 $\boldsymbol{u}^s$ [(10.30)和(10.31)式]。

由 $\boldsymbol{u}^t$ 和 $\boldsymbol{u}^s$ 的表示式可以看到，在球极坐标系中它们都可以用球谐函数或其微商表示。由(10.31)式可知，Y_l^m 表示的是球面上的一种驻波，它可以表示为：

$$Y_l^m(\theta,\ \varphi)=\frac{1}{2}\left[W_{l,m}^{(1)}(\cos\theta)+W_{l,m}^{(2)}(\cos\theta)\right]e^{im\varphi},\tag{10.55}$$

其中，

$$\begin{cases}W_{l,m}^{(1)}=P_l^m(\cos\theta)-i\dfrac{2}{\pi}Q_l^m(\cos\theta),\\[2ex] W_{l,m}^{(2)}=P_l^m(\cos\theta)+i\dfrac{2}{\pi}Q_l^m(\cos\theta)。\end{cases}\tag{10.56}$$

$Q_l^m(\cos\theta)$ 是第二类的连带勒让德函数。当次数 l 很大时，$W_{l,m}^{(1)}$ 和 $W_{l,m}^{(2)}$ 有如下渐近展开式：

$$\begin{cases}W_{l,m}^{(1)}\sim l^m\sqrt{\dfrac{2}{l\pi\sin\theta}}\,e^{i\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right]},\\[2ex] W_{l,m}^{(2)}\sim l^m\sqrt{\dfrac{2}{l\pi\sin\theta}}\,e^{-i\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right]}。\end{cases}\tag{10.57}$$

恢复时间因子 $e^{i\omega t}$，我们便可看出，运动方程的解答(10.30)和(10.31)式表示的是向极点

汇聚和离开极点向外发散的行波的叠加。这些行波沿地球表面传播的相速度是

$$c=\frac{\omega a}{l+\frac{1}{2}}。\tag{10.58}$$

换句话说，波长 λ 和次数 l 有如下简单的关系：

$$2\pi a=\left(l+\frac{1}{2}\right)\lambda。\tag{10.59}$$

布龙（J. N. Brune）、纳菲（J. E. Nafe）和埃尔索普（Alsop）曾经用 $l>20$ 的观测资料证实了上式。布龙、尤温（M. Ewing）和郭宗汾通过计算证实了用驻波法分析面波地震图和用行波法分析所得的结果是一致的。

根据前面提到的环型振荡和球型振荡的性质，很容易看出：当 l 很大时，环型振荡和SH 型面波(勒夫波)是一回事；球型振荡和 P-SV 型面波(瑞雷波)是一回事。当 l 相当小时，例如 $l<10$ 时，地球的自由振荡周期大于 10 分钟，自由振荡主要取决于地球整体的性质。当 $10<l<100$ 时，周期大约在 10 分和 100 秒之间，振荡显著地依赖于地幔的结构。通常把这个周期范围内的自由振荡叫做"地幔勒夫波"和"地幔瑞雷波"，以区别于半空间中的勒夫波和瑞雷波。当周期小于 100 秒左右时，振荡主要取决于地球最外面 50 公里的结构。

二、地球的自由振荡的观测

地球的振荡是一种低频振荡。因为传统的地震仪比较注重高频、短波，所以长期以来人们一直没有记录到地球的振荡。尽管如此，也没有能阻止理论的发展。

1829 年法国的泊松（S. D. Poisson）首先考虑了完全弹性固体球的振动；随后，开尔芬(Lord Kelvin）和达尔文（G. H. Darwin，进化论创始人达尔文之子）发展了弹性球体应变的理论，并应用于固体潮问题。

1882 年兰姆（H. Lamb）详细地讨论了均匀球体的较简单的振型，并证明有可能存在两种不同类型的振动，这就是现在对于较复杂的地球模式仍然适用的球型振荡和环型振荡。

1911 年勒夫（A. E. H. Love）探讨了重力作用下可压缩球体的静态形变和小振动问题。在本世纪初以前，人们对地球内部知道得甚少，加上没有近代的电子计算机，所以只得假设一个平均的、均匀地球模式进行计算。勒夫当时得到的、现在叫做球型振荡的最长的振荡周期为 60 分钟。

虽然从上一世纪以来地球的自由振荡就是一个重要的理论问题，并且有了许多发展，但只有在出现了超灵敏的、稳定的重力仪和应变地震仪以及电子计算机后的近二十多年来才成为一个具有实际意义的问题。

1952 年 11 月 4 日勘察加地震后，贝尼奥夫（H. Benioff）在他的应变地震仪上发现了大约 57 分钟和 100 分钟的两个长周期波，他认为这两个长周期波是勘察加地震激发的地球的自由振荡，因而他鼓励别人去进行有关的理论计算。

以后七年中，再没有人报道过类似的结果，有的地震学家甚而把贝尼奥夫的结果归之

于仪器的毛病。但仍有人坚持不懈地进行理论研究。到了五十年代，传统地震学在古登堡（B. Gutenberg）、里克特（C. F. Richter）、杰弗瑞斯（H. Jeffreys）、布伦（K. E. Bullen）等人的努力下有了很大的发展，人们对地球内部结构的认识比较上世纪末、本世纪初清楚得多。其时，电子计算机也已问世。这些使得奥尔特曼（Z. Alterman）、派克里斯（C. L. Pekeris）和雅罗什（H. Jarosch）（1959）等人有可能把前人的理论工作推广到非均匀地球模型，从而有可能把理论计算和观测结果进行比较。

1954 年以后，日本的松本利治（T. Matumoto）和佐藤泰夫（R. Satô）（1954）、法国的若伯特（N. Jobert）（1956）、日本的竹内均（H. Takeuchi）（1959）、美国的贝库司（G. Backus）和基尔伯特（F. Gilbert）（1961）以及麦克唐纳（G. J. F. Mac Donald）等（1961）也都曾对实际地球模式的振荡周期进行了其它重要的计算。

1960 年 8 月，普雷斯（F. Press）在国际地震学和地球内部物理学协会（IASPEI）的赫尔辛基会议上宣布，贝尼奥夫从 1960 年 5 月 22 日智利 8.9 级大地震中又一次观测到长周期波。接着，史立克特（L. B. Slichter）宣布，他的研究集体也从拉柯斯特-龙伯格（La Coste-Romberg）重力仪上观测到类似的长周期波。两者当场比较，结果是，许多周期、特别是 54，35.5，25.8，20，13.5，11.8 和 8.4 分钟的周期十分吻合；但贝尼奥夫记到的某些周期在史立克特的结果中看不到。派克里斯当时也在场，他将史立克特结果中所缺失的周期研究了一番，接着宣布：这些周期相当于他计算的环型振荡，而史立克特所用的重力仪是记录不到环型振荡的。两套独立的观测结果与理论惊人地符合，证据强而有力，从此驱散了对地球长周期自由振荡的真实性的一切疑团。

在赫尔辛基会议结束前宣布：波格特（B. P. Bogert）用贝尔电话实验室的拉蒙特（Lamont）长周期地震仪、尤温（M. Ewing）的研究集体用应变地震仪和摆式地震仪、普雷斯用拉蒙特地震仪也都记录到了长周期自由振荡。

1960 年以后，对地球自由振荡的观测结果越来越多，作为举例，图 10.3 是史立克特用重力仪记录到的智利地震和阿拉斯加地震激起的球型振荡的功率谱。从观测资料中辨认

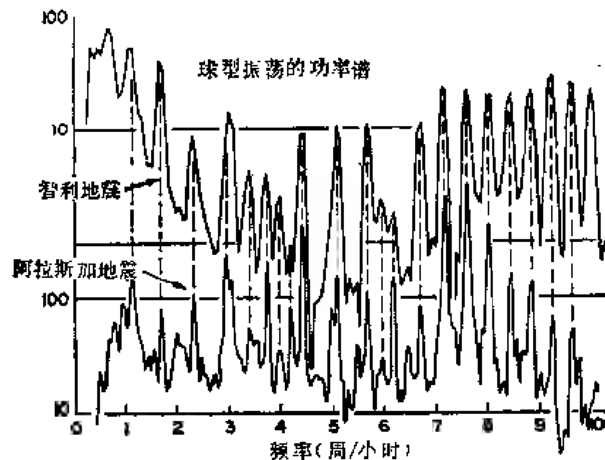


图 10.3　重力仪记录的智利地震和阿拉斯加地震激起的球型振荡的功率谱

到了许多振荡周期，数目已达 1 千多个，其中球型约占 2/3，环型约占 1/3。表 10.1 列出了 l 较小时基频自由振荡的观测到的周期（O）及其和理论计算得到的周期的残差（$O-C$）。理论计算的周期是按海登（R. A. W. Haddon）和布伦（K. E. Bullen）提出

表 10.1 地球自由振荡的基频振型的周期的观测值 (O) 及其与 HB_1 模式的计算值的残差 (O − C). (单位: 秒)

l	球型振荡			环型振荡	
	O	O − C	活动范围	O	O − C
0	1227.7±0.1	−1.1	6370 公里		
2	3233.1±7.3	+6.2	5850	2642.5±24.4	+13.2
3	2139.2±4.3	+3.6	5500	1704.7±4.9	±2.7
4	1546.0±2.1	−1.2	5270	1305.1±1.8	+1.4
5	1188.4±1.5	−3.0	5090	1075.5±1.2	−0.2
6	962.3±0.9	−2.0	4630	926.5±1.4	+0.7
7	809.1±1.0	−3.4	4630	818.2±1.3	−0.1
8	707.7±0.4	−0.2	4630	735.0±1.3	−1.7
9	634.0±0.3	+0.1	4630	669.8±1.5	−2.2
10	579.3±0.8	−0.1	3940	618.9±0.5	−0.3
11	536.8±0.5	−0.3	3590	575.2±0.4	+0.1
12	502.3±0.2	−0.3	3590	536.6±0.8	−1.0
13	473.2±0.2	−0.3	3250	505.3±0.7	+0.1
14	448.4±0.3	0.0	3250	476.8±0.4	0.0
15	426.3±0.2	−0.1	3250	453.2±0.9	+1.5
16	406.8±0.3	−0.2	3250	430.1±0.3	+0.7
17	389.3±0.2	−0.4	2800	408.3±0.4	−1.0
18	373.5±0.2	−0.3	2800	390.7±0.6	−0.4
19	361.5±0.8	+1.4	2600	374.8±0.4	+0.2
20	347.3±0.3	−0.1	2600	359.7±0.8	+0.3
21	335.8±0.2	0.0	2600	346.1±0.4	+0.6
22	324.8±0.3	−0.4	2400	332.9±0.6	+0.2
23	315.5±0.1	+0.2	2400	321.4±0.7	+0.6
24	306.3±0.2	+0.1	2400	310.7±0.6	+0.9
25	297.6±0.1	−0.1	2200	298.3±1.2	−1.2
26	289.9±0.2	+0.2	2200	289.8±0.3	−0.1
27	281.6±0.2	−0.5	1800	281.4±1.0	+0.6
28	275.2±0.2	0.0	1800	272.7±1.4	+0.3
29	268.4±0.1	−0.1	1800	264.4±1.5	0.0
30	262.1±0.1	−0.1	1800	256.5±0.8	−0.4
31	256.2±0.2	0.0	1800	249.6±0.7	−0.2
32	250.3±0.2	−0.2	1800	243.4±1.1	+0.3
33	245.0±0.1	0.0	1800	235.5±1.8	−1.2
34	239.8±0.2	0.0	1800	233.2±2.0	+2.5
35	234.9±0.2	+0.1	1400	224.9±1.3	−0.1
36	229.9±0.3	−0.1	1400	219.4±0.9	−0.1
37	224.9±0.5	−0.5	1400	213.3±1.0	−1.0
38	219.8±0.3	−1.1	1400	209.3±0.8	−0.1
39	216.4±0.5	−0.2	1400	203.2±1.5	−1.4
40	212.3±0.4	−0.2	1400	200.0±1.3	−0.1
41	208.3±0.4	−0.2	1400	196.3±1.5	+0.5
42	204.7±0.2	0.0	1400	190.7±2.0	−0.9
43	200.8±0.3	−0.1	1400	186.2±2.0	−1.4
44	197.6±0.1	+0.3	1400	182.6±2.0	−1.2
45	194.0±0.2	+0.1	1400		
46	191.2±0.1	+0.7	1400		
47	187.4±0.6	+0.2	1400		
48	184.3±0.5	+0.2	1400		

的地球模式 HB_1 模式计算的。

实际上在辨认各种振型时，因为 l 愈大时，不同振型的间隔愈小，再加上振幅变化无常，就愈难辨认。为了把不同的周期分开，运用了讯息论的功率谱分析法，特别是采用了布莱克曼（R. Blackman）和图基（J. Tukey）的方法。这时，只能记录重力扰动的仪器对于确认振型就很有用，可以用它来识别环型和球型振荡。同时，因为没有环型振荡的干扰，可以用它来研究球型振荡的精细结构。

三、地球自转和扁率对地球振荡的影响

（一）地球自转的效应

前面的讨论没有涉及到地球的自转。所得到的结果说明，对于球对称、不考虑自转的地球模式，自由振荡周期对于 m 是简并的。但是，如果采取的地球模式是以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕对称轴转动的话，自由振荡周期就不再对 m 简并了。这种情况很类似于磁场中原子谱线的分裂（"塞曼效应"）。事实上，当 1960 年地球的自由振荡的观测结果第一次得到公认时就已经注意到，在地球自由振荡的频谱中，最低频率的振型常常是许多挨得很近的谱线。图 10.4 是 $_0S_2$ 振型的谱线，它是贝尼奥夫、普雷斯和司密斯（S. W. Smith）对加利福尼亚州的伊沙贝拉（Isabella）台的应变仪记录的 1960 年 5 月 22 日智利大地震的地震图作傅利叶分析得出的。可以看出，谱线强度曲线有两个尖峰，它们都超过噪音水平，周期分别为 54.7 分和 53.1 分。图 10.5 是 $_0S_3$ 振型的观测谱线，可以看出它也有两个明显的尖峰，其

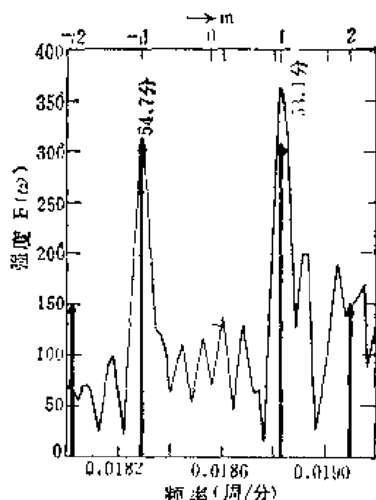


图 10.4　$_0S_2$ 振型谱线的分裂

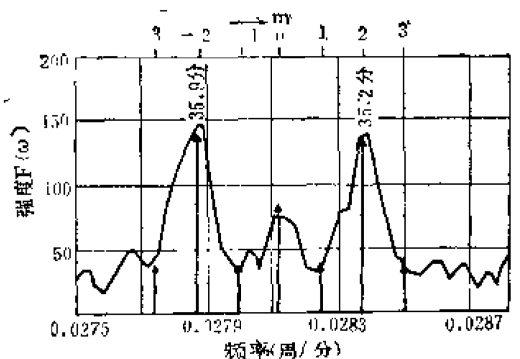


图 10.5　$_0S_3$ 振型谱线的分裂

周期分别为 35.9 分和 35.2 分。为了解释谱线分裂现象，1961 年，贝库司（G. Backus）和基尔伯特（F. Gilbert）、麦克唐纳（G. J. F. Mac Donald）和内斯（N. F. Ness）以及派克里斯、奥尔特曼（Z. Alterman）和雅罗什（H. Jarosch）都独立地按照兰姆（H. Lamb）很早以前做过的经典的处理方法解释了这种现象。

设地球自转角速度 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_3$ 是恒定的。考虑到地球自转的效应，应当在运动方程（10.18）式的右边加上离心力项和科里奥利力项：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{p}' + \rho_0 \nabla(\phi' - g_0 u) + \rho_0 \Theta g_0 \boldsymbol{e}_r - 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho_0 \nabla U。 \tag{10.60}$$

式中，$U(\boldsymbol{r})$ 是离心力位：

$$U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}[\Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2]。 \tag{10.61}$$

略去时间因子 $e^{i\omega t}$，(10.60) 式可化为：

$$-\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \mathbf{p}' + \rho_0 \nabla(\phi' - g_0 u) + \rho_0 \Theta g_0 \boldsymbol{e}_r - i2\rho_0 \omega \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} + \rho_0 \nabla U。 \tag{10.62}$$

以 α 表示地球自转角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 和不考虑自转效应时的振荡角频率 ${}_n\omega_l$ 之比：

$$\alpha = \Omega / {}_n\omega_l, \tag{10.63}$$

则因 $\Omega = 1/(24 \times 60)$ 分$^{-1}$，而 ${}_n\omega_l$ 最低者为 1/3233.1 秒$^{-1} \doteq 1/54$ 分$^{-1}$（表 10.1），所以 α 最大也不过是 $54/(24 \times 60) \doteq 1/27$。在(10.62)式中，离心力项是与 α^2 成正比的二级小量，在只考虑一级近似的情况下，可以将它略去，因此：

$$\rho_0 \omega^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = i2\rho_0 \omega \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}。 \tag{10.64}$$

式中，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \nabla \cdot \mathbf{p}' + \rho_0 \nabla(\phi' - g_0 u) + \rho_0 \Theta g_0 \boldsymbol{e}_r, \tag{10.65}$$

$$\nabla^2 \phi' = 4\pi G \left(\rho_0 \Theta + u \frac{d\rho_0}{dr} \right) = 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{u})。 \tag{10.66}$$

在自转很缓慢（$\alpha \doteq 1/27$）的情况下，可以用微扰方法计算由缓慢自转引起的地球振荡频率的变化。为此，令

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha\omega_1 + \cdots, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \alpha \boldsymbol{u}_1 + \cdots, \\ \phi' = \phi_0' + \alpha\phi_1' + \cdots。 \end{cases} \tag{10.67}$$

将它们代入(10.64)式，则由 α 的零次项可以得到下列方程：

$$\rho_0 \omega_0^2 \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_0) = 0, \tag{10.68}$$

$$\nabla^2 \phi_0' = 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{u}_0), \tag{10.69}$$

式中的 ω_0 也就是不考虑自转效应时的振荡频率 ${}_n\omega_l$。由 α 的一次项可以得到下列方程：

$$\rho_0 \omega_0^2 \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_1) = -2\rho_0 \omega_0 \omega_1 \boldsymbol{u}_0 - 2i\rho_0 \omega_0^2 \boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{e}_3, \tag{10.70}$$

$$\nabla^2 \phi_1' = 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{u}_1)。 \tag{10.71}$$

以 $\boldsymbol{u}_0^*$ 点乘(10.70)式，以 $\boldsymbol{u}_1$ 点乘(10.68)式的共轭式，然后相减，并对整个地球体积 V 求积，便得：

$$\iiint_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{u}_0^* dV - \iiint_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_0^*) \cdot \boldsymbol{u}_1 dV$$
$$= -2\omega_0\omega_1 \iiint_V \rho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0^* dV - 2i\omega_0^2 \iiint_V \rho_0 \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{u}_0^* \times \boldsymbol{u}_0) dV。 \tag{10.72}$$

可以证明，

$$\iiint_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{u}_0^* dV = \iiint_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_0^*) \cdot \boldsymbol{u}_1 dV, \tag{10.73}$$

所以

$$\omega_1 \iiint_V \rho_0 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0^* dV + i\omega_0 \iiint_V \rho_0 \boldsymbol{e}_3 \cdot (\boldsymbol{u}_0^* \times \boldsymbol{u}_0) dV = 0。 \tag{10.74}$$

由(10.30)、(10.31)式可知，

$$\boldsymbol{u}^s = {}_nU_l(r)\boldsymbol{R}_l^m + {}_nV_l(r)\boldsymbol{S}_l^m, \tag{10.75}$$

$$\boldsymbol{u}^t = {}_nW_l(r)\boldsymbol{T}_l^m, \tag{10.76}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_l^m = \{Y_l^m, 0, 0\}, \\ \boldsymbol{S}_l^m = \left\{0, \dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}, \dfrac{\partial Y_l^m}{\sin\theta\partial\varphi}\right\}, \\ \boldsymbol{T}_l^m = \left\{0, \dfrac{\partial Y_l^m}{\sin\theta\partial\varphi}, -\dfrac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right\}。\end{cases} \tag{10.77}$$

将(10.76)、(10.75)式先后代入(10.74)式，计算后得：

$$\omega_1 = m_n\omega_{l\,n}\beta_l, \tag{10.78}$$

式中的 ${}_n\beta_l$ 对于环型振荡来说为：

$${}_n\beta_l^t = \frac{1}{l(l+1)}; \tag{10.79}$$

对于球型振荡来说为：

$${}_n\beta_l^s = \frac{\int_0^a \rho_0[2{}_nU_{l\,n}V_l + {}_nV_l^2]r^2dr}{\int_0^a \rho_0[{}_nU_l^2 + l(l+1){}_nV_l^2]r^2dr}。\tag{10.80}$$

这说明，地球自转使得振荡频率由 ${}_n\omega_l$ 变成：

$${}_n\omega_l^m = {}_n\omega_l + \frac{m}{l(l+1)}\Omega \quad (\text{环型振荡}), \tag{10.81}$$

$${}_n\omega_l^m = {}_n\omega_l + m_n\beta_l^s\Omega \quad (\text{球型振荡}), \tag{10.82}$$

$|m| \leqslant l$. 此时，振荡频率对 m 不再简并，每条谱线分裂成 $2l+1$ 条，这些谱线以 $m=0$ 的谱线为中心，等间距、对称地分布于其两边；对于环型振荡来说，裂开的两相邻谱线的间距只与 Ω 和 l 有关，而对于球型振荡来说，还与地球模式有关。

图 10.4 和图 10.5 中的箭头表示分裂开的多重谱线的间隔和幅度的理论值。从图 10.4 可以看出，${}_0S_2$ 振型谱线上的两个尖峰与理论预期的 ${}_0S_2$ 的五重谱线（$m=-2, -1, 0, 1, 2$）中最强的两个极为符合，没有观测到的其它谱线可能是幅度低于噪音水平的缘故。从图 10.5 也可以看到类似情况。${}_0S_3$ 七重谱线（$m=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$）的中心谱线 $m=0$ 很清楚，其观测值与理论值很接近；$m=\pm2$ 的谱线也很清楚；$m=\pm1$ 和 ±3 的谱线则接近于其各自邻域的一般噪音水平。

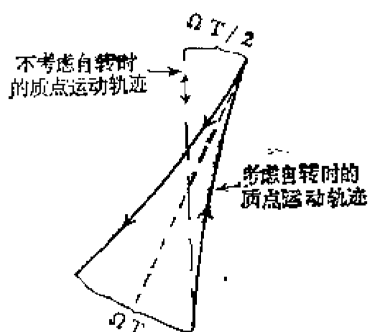


图 10.6 在以角速度 Ω 转动的平面上振动的质点的运动轨迹

地球自转不但使得振荡频率发生分裂，还能改变质点的振荡方向。这种情形和付科（Foucault）摆类似：在无自转情形下沿直线振荡的质点，在以角速度 Ω 自转的平面上将沿着图 10.6 的实线所示的轨迹运动。这个效应导致球型振荡与环型振荡发生耦合，使本来只有水平位移的环型振荡也会具有垂直方向的分量。在这种情况下，垂直向地震仪也能记录到环型振荡。

地球自转的另一个效应是使由西向东传播的行波的振荡频率低于朝相反方向的行波的振荡频率。

根据前面得到的结果(10.30)和(10.31)式,我们知道无论是环型还是球型振荡,其分量均可表示为下列形式:

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm l。 \tag{10.83}$$

恢复时间因子 $e^{i\omega t}$,我们有:

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{i\omega\left(t+\frac{m}{\omega}\varphi\right)},\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ \pm l, \tag{10.84}$$

式中的 ω 是 ${}_n\omega_l^m$ 的简写。上式中,与 m 相应的每一项都代表着一个行波,其波前面是子午面,以角速度 ω/m 绕地球自转轴转动。对于每一个给定的 l 和 n,都有 $(2l+1)$ 个行波,相应于一个 $m=0$ 的波,m 个由西向东传播的行波 $(m=-1,\ -2,\ \cdots,\ -l)$ 和 m 个由东向西传播的行波($m=1,\ 2,\ \cdots,l$)。在不考虑自转效应时,${}_n\omega_l^m={}_n\omega_l$,与 m 无关,两个反方向的行波叠加成振荡频率与 m 无关的驻波:

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{i\omega t}2\cos m\varphi。 \tag{10.85}$$

由于地球自转的影响,使向东传播的行波频率 $({}_n\omega_l^m,\ m=-1,\ -2,\ \cdots,\ -l)$ 比向西的 $({}_n\omega_l^m,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 低,如果分别以 $\omega-\Delta\omega^m$ 和 $\omega+\Delta\omega^m$ 表示它们,则这两套行波分别为:

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{i[(\omega-\Delta\omega^m)t-m\varphi]},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l \tag{10.86}$$

和

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{i[(\omega+\Delta\omega^m)t+m\varphi]},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l。 \tag{10.87}$$

两者叠加的结果是:

$$ {}_nR_l^m(r)F_l^m(\cos\theta)e^{i\omega t}2\cos(\Delta\omega^m t+m\varphi)。 \tag{10.88}$$

这相当于没有考虑地球自转影响时的驻波的节面以角速度 $\Delta\omega^m/m$ 西移。由(10.81)和(10.82)式可知,对于环型振荡来说,

$$ \frac{\Delta\omega^m}{m}=\frac{\Omega}{l(l+1)}。 \tag{10.89}$$

对于球型振荡来说,

$$ \frac{\Delta\omega^m}{m}={}_n\beta_l^r\Omega。 \tag{10.90}$$

式中的 ${}_n\beta_l^r$ 如(10.80)式所示。对于基频振型来说,${}_0\beta_2^r=0.4$,${}_0\beta_3^r=0.2$,${}_0\beta_4^r=0.1$,等等。

(二)地球扁率的效应

真实地球不是圆球形。地球自转的结果,使得地球的等密度面接近于旋转椭球面,其扁率 $e_a=1/298.3$。如此数量级的扁率将会使得本征频率进一步发生数量级与此相当、也即 0.3% 的变化。e_a 的数量级与地球自转的二级小量相当。如果考虑地球自转的效应,准确到二级小量;考虑地球扁率的效应,准确到一级小量,则可求得:

$$ {}_n\omega_l^m/{}_n\omega_l=1+{}_n\alpha_l+m({}_n\beta_l)+m^2({}_n\gamma_l)。 \tag{10.91}$$

式中,

$$\begin{cases}{}_n\alpha_l={}_n\alpha_l^r(\Omega/{}_n\omega_l)^2+{}_n\alpha_l^e e_a,\\ {}_n\beta_l={}_n\beta_l^r(\Omega/{}_n\omega_l),\\ {}_n\gamma_l={}_n\gamma_l^r(\Omega/{}_n\omega_l)^2+{}_n\gamma_l^e e_a。\end{cases} \tag{10.92}$$

${}_n\alpha_l^r$ 和 ${}_n\alpha_l^e$ 分别表示自转的二级效应和扁率的一级效应的因子，这两种效应使谱线的中心频率发生了移动，其效应以 ${}_n\alpha_l$ 表示。${}_n\beta_l$ 前面已提到，是自转的一级效应，它使谱线分裂成 $2l+1$ 条中心对称的谱线。${}_n\gamma_l^r$ 和 ${}_n\gamma_l^e$ 分别表示自转的二级效应和扁率的一级效应进一步使谱线发生移动，我们从因子 $m^2(|m|\leqslant l)$ 可以看到，在不考虑自转只考虑扁率效应的情况下，扁率的一级效应将使原谱线分裂成 $l+1$ 条谱线。

对于低频振型来说，自转效应比扁率效应大得多；对于高频振型来说，因为 ${}_n\omega_l$ 变大了，自转效应的因子 $\alpha=\Omega/{}_n\omega_l$ 相对于 ε_a 来说就变小了，结果扁率效应将占优势，从而分裂开的谱线的不对称性将更显著。在实际观测结果中，因为噪音的干扰，迄今只测量到 ${}_n\beta_l$，而没有测量到不对称因子 ${}_n\gamma_l$。

四、地球自由振荡的应用

(一) 地 球 模 式

对比由各种地球模式计算得到的地球自由振荡的频率与实际观测到的频率，可以检验和改善地球模式，增进对地球内部的认识。前面已经述及如何由地震体波走时的观测反演地球内部的速度分布。在这个基础上，可以进一步求得密度 $\rho(r)$、弹性系数 $\lambda(r)$、$\mu(r)$ 随深度的变化。地球的自由振荡则提供了另一种确定地球内部的 $\rho(r)$、$\lambda(r)$ 和 $\mu(r)$ 的、独立的方法，它与地震体波方法互为补充。

为反演地球内部结构，先要假定一些地球模式，进行理论计算，将计算结果与资料对比；然后改变模式，重复上述过程，直至两者在观测误差之内相符为止。可以用许多方法改变模式使之更适合观测资料，但不管是哪种方法都会遇到解答不唯一的问题。改变、调整模式的方法一般有两种，一种是最小二乘法，另一种是蒙特·卡罗 (Monte Carlo) 法即随机尝试法。

哈登 (R. A. W. Haddon) 和布伦 (K. E. Bullen, 1969) 详尽地研究了 $\rho(r)$、$\lambda(r)$ 和 $\mu(r)$ 等参数对地球振荡周期的影响问题。他们利用了智利地震和阿拉斯加地震的地球自由振荡资料(包括 $0\leqslant l\leqslant 48$ 的基频球型振荡周期和 $2\leqslant l\leqslant 44$ 的基频环型振荡周期以及一些谐频振荡周期)，得到了一个地球模式，现在叫做哈登-布伦模式 I (HB_1 模式)(图 10.7)。根据这个模式计算出的地球自由振荡的周期与已观测到的自由振荡的周期在观测精度范围内非常符合(表 10.1)。这个地球模式与由体波资料得出的地球模式的最突出的差异是地核的半径比体波资料得出的大 20 公里。鉴于用体波 PcP 走时确定地核半径可准确到几公里，所以有些人对由自由振荡得出的这个结论是否靠得住持怀疑态度。

普雷斯 (F. Press, 1968, 1970) 用蒙特·卡罗法试验了 500 万种随机选择的地球模式。在他的试验中，既用了地球的 97 个自由振荡周期，也用了以前从体波资料得到的 P, S 波走时，并加进了地球的总质量、惯量矩、地球半径等限制条件。结果是，所有符合观测资料的 27 个模式，在海洋下的地幔内都有一个横波速度的低速层，其中心深度在 150 至 250 公里之间；并且，地核半径都比先前别人得到的大 5 至 20 公里，而后者是与 HB_1 模式一致的结论。地球自由振荡是一种全球性现象，虽然它无法像体波方法那样提供地球

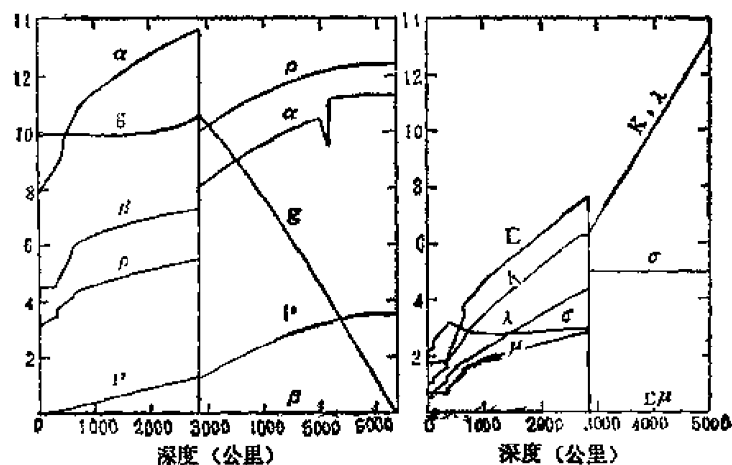
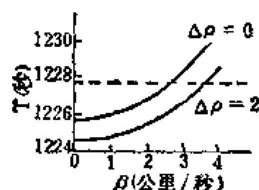


图 10.7 哈登-布伦地球模式 I（HB_1 模式）

α 和 β 分别是地球内部的纵波和横波速度，单位：公里/秒；ρ 是密度，单位：克/厘米^3；P 是压强，单位：10^{12} 达因/厘米^2；g 是重力，单位：10^2 厘米/秒^2；E 是杨氏模量，κ 是不可压缩系数，λ、μ 是拉梅系数，单位都是 10^{12} 达因/厘米^2；σ 是泊松比，单位：0.1。

（a）



（b）

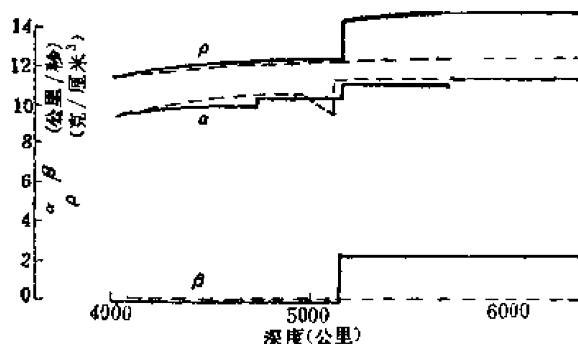


图 10.8 a $_0S_0$ 的周期随内核的速度 β 和内、外核界面上密度跃变 $\Delta\rho$ 的变化。水平虚线表示观测值

b HB_1 模式（虚线）和德尔模式（实线）内核性质之比较。

内部结构的某些细节，但是却可以比体波方法更好地获得地球内部的某些参数的平均值，因为体波方法所用的震源和地震台站的分布并非是随机的。

早期的地球振荡的研究只是把地核当作一个整体来研究，以估计整个地核的刚性系数，如派克里斯等人（1962）、竹内均等人（1963）的工作就是如此。1963 年，埃尔索普（L. E. Alsop）研究了内核是否是固体的问题。1969 年德尔（J. S. Derr）指出，如果内核不是液体，而是横波速度为 3 公里/秒的固体的话，则径向振荡 $_0S_0$，$_1S_0$ 和 $_2S_0$ 的周期要增加好几秒（图 10.8）。他的计算还表明，如果内核和外核边界上的密度发生跃变 $\Delta\rho$，这

些径向振荡的周期也要发生变化，不过不是使之增加，而是使之减小罢了（对比图 10.8 中的 $\Delta\rho = 0$ 和 $\Delta\rho = 2$ 的两条曲线）。因此，德尔提出了另一个地球模式（图 10.8 中的实线）。德尔模式、HB_1 模式都认为在近边界处地核的密度为 10.0 克/厘米^{3}左右，但德尔模式与 HB_1 模式不同，它认为在内核 $\beta = 2.18$ 公里/秒，而在内、外核分界面上，密度发生 2.0 克/厘米^{3}的跃变。当然关于内核是固态的见解还需要有更多、更好的资料、特别是基频和谐频径向振荡的资料加以证实。

有些观测到的振荡频率是现有的地球模式所没有包括在内的。例如，在智利地震和阿拉斯加地震中都观测到过大于 $_0S_2$ 的周期。有人认为这可能是由于振型的耦合引起的，而这只有在地球介质是非线性时才能出现。如果发生这种耦合作用，就可能观测到由相互耦合的两个周期的和与差得出的周期。例如，$_0T_4$ 和 $_0S_4$ 的周期分别为 1305.1 和 1546.0 秒，其频率差为 $1/1305.1-1/1546.0=0.00012$ 赫兹。如果两者发生耦合作用的话，应当能观测到一个周期大约为 140 分钟的振动。这个数值与观测到的 143 分处的谱线很接近。不过，液态核的振荡，或液态核内的固态内核的振荡，都可能产生这些长周期的谱峰，所以用振荡的耦合解释上述现象仍未能得到普遍接受。

（二）地球的非完全弹性

大地震激起的地球的自由振荡常持续好几天，例如 1960 年 5 月 22 日智利地震激起的地球自由振荡至少就持续了五天。但是自由振荡终究都要衰减殆尽，因为地球介质并非完全弹性。既然地球自由振荡与地球内部的非完全弹性有关，所以它成为研究地球内部的非完全弹性的一种重要手段。

地球介质的非完全弹性可以用介质的品质因数 Q 表示。Q 的定义为

$$1/Q = \Delta E/2\pi E。\qquad (10.93)$$

式中，ΔE 是在一个应力循环中系统所损耗的能量，E 是系统的应变达到极大时所具有的弹性能量。由第九章第一节可知，在非弹性介质中传播的行波，其能量随距离 x 按指数规律衰减：

$$E = E_0 e^{-\frac{2\pi}{Q}\frac{x}{\Lambda}}。\qquad (10.94)$$

式中，Λ 是波长。利用上式，便可由体波或面波观测确定 Q 值。不过，用地震体波不容易测准 Q 值，原因是震源的性质、传播路径的差异、仪器的特性及台基等局部条件的影响都很难扣除。用地震面波则好一些，特别是如果运用绕地球转圈相差一圈的 G 波（如 $G_1 - G_3$）或 R 波（如 $R_2 - R_4$）便可消除仪器、频散和几何扩散等效应。

用地球自由振荡资料确定地球介质的 Q 值便没有上述缺点。可以证明，在非弹性介质中振荡的驻波，其能量随时间按指数规律衰减：

$$E = E_0 e^{-\frac{2\pi}{Q}\frac{t}{T}},\qquad (10.95)$$

式中，T 是周期。测定两个或相继的许多个时间间隔（通常是间隔）的自由振荡频谱谱峰的平均能量，就可按上列公式计算出 Q 值。

用这个方法也不易测准 Q 值，因为振型之间有耦合作用。振型之间的耦合会从所测定的振型的谱峰中带走一部份数量未知的能量，使得能量不易测准。

另一种测定 Q 值的方法是测量谱峰的宽度 $2\Delta\omega$，然后由公式

$$1/Q = 2\Delta\omega/\omega \tag{10.96}$$

计算 Q 值。这种方法当然只适用于记录长度（时间窗）足够长以至 $\Delta\omega$ 大于分辨本领时。

这种方法也有它的缺点，因为自转等因素引起谱线分裂以及噪音的干扰都能使谱线展宽，致使谱峰的宽度不易测准。此外，对于基频振型来说，当球型振荡的 $l \leqslant 6$、环型振荡的 $l \leqslant 5$ 时，谱线的分裂使原谱线展宽 $0.005f$，所以当 $Q^{-1} < 0.005f$、也就是 $Q > 200$ 时就不能用这种方法测定 Q 值。实验室里测得岩石样品在剪切应变下的 Q 值在 200—1000 间。这说明很难用这种方法测准谱线宽度。有鉴于此，多数人倾向于用前一种方法测定 Q 值。即便如此，测量精度也是不高的，误差通常大于 10—20%。

测量结果表明，Q 值随着振型的次数 l 而发生系统的变化：低 l 的振型 Q 值一般较高。在实验室里测定岩石样品的 Q 值在很宽的频率范围内一般与频率没有什么关系，为什么长周期（低 l）振型的 Q 值会比短周期（高 l）振型的 Q 值系统地偏高呢？这是因为地球内部的非弹性随深度而变、较长周期的振型穿透了 Q 值较高的较深处介质之故。

对于球型振荡来说，从地面直到约 500 公里处，Q 值都很低，约 80 至 100。在地幔，在 700 公里以下的深度有一个 Q 值较高（1000 至 2000）的区域。

${}_nT_l^m$ 的 Q 值最小，在 100 至 300 间。${}_0S_{12}^0$，${}_0S_7^0$ 较高，在 200—500 之间。径向振型 ${}_0S_0^0$ 的 Q 极高，至少 12,000。由此可见，地球的自由振荡的能量主要是从 ${}_nT_l^m$ 衰减掉的，相形之下，径向振型 ${}_0S_0^0$ 几乎没有衰减。

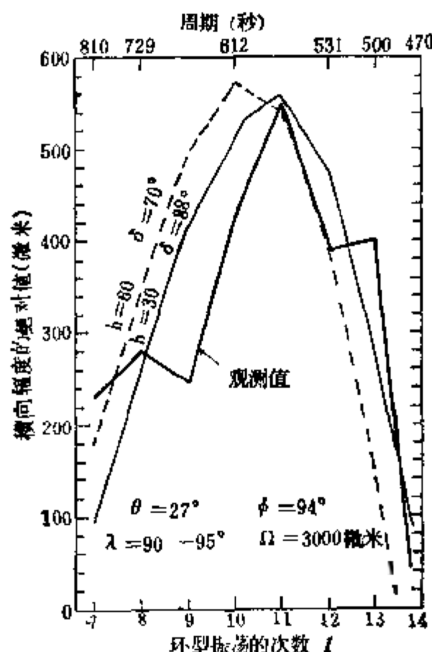


图 10.9 奥罗维尔台记到的 1964 年 3 月 28 日阿拉斯加地震激发的环型振荡的观测值（实线）和理论计算值（虚线和细实线）的比较

图中 θ 是该台的余纬，φ 是经度；λ 是滑动角，$\Omega = U_0 dS/4\pi a^2$，U_0 是错距，dS 是断层面面积，a 是地球半径，h 是震源深度，δ 是断层面倾角。

（三）地震的震源机制

通过对比地球自由振荡的振幅和相位的计算值和观测值，可以得到有关震源的讯息。

给定某一地球模式，给定基本的震源参数（断层的走向、倾向、倾角、震源深度、断层面面积、错距等），就可以计算自由振荡的振幅和相位，然后与相应的观测值对比，从而确定出震源参数。图 10.9 是 1964 年 3 月 28 日阿拉斯加地震在美国奥罗维尔（Oroville）观测到的环型振荡的振幅的观测值（粗实线）和计算值（虚线和细实线）的比较图。可以看到图中虚线和细实线所示的两组解与观测结果相当符合。

参　考　书　目

[1] Alterman, Z., H. Jarosch, and C. L. Pekeris, 1959. Oscillations of the Earth, *Proc. Roy. Soc., A*, 252, 80—95.

[2] Alterman, Z., Y. Eyal, and A. M. Merzer, 1974. On free oscillations of the Earth, *Geophys. Surveys*, 1, 409—428.

[3] Bullen, K. E., 1963. *An Introduction to the Theory of Seismology*, 3nd edition, Cambridge Univ. Press.

[4] Bullen, K. E., 1976. *The Earth's Density*, London, Chapman and Hall.

[5] MacDonald, G. J. F., 1961. The Earth's free oscillations, *Science*, 1341, 1663—1668.

[6] Pekeris, C. L., Z. Alterman, and H. Jarosch, 1961. Terrestria spectroscopy, *Nature (London)*, 190, 498—500.

[7] Slichter, L. B., 1967. Free oscillations of the Earth, *International Dictionary of Geophysics*, 331—343, Pergamon, London.

[8] Smith, S. W., 1967. Free vibrations of the Earth, *International Dictionary*, 344—346, Pergamon, London.

第十一章　地震位错和震源物理

一、地震断层和震源区的应力状态

（一）地震的直接成因·弹性回跳理论

大多数地震发生在地壳中。地壳变形时，能量以弹性应变能的形式储存在岩石中，直到在某一点累积的形变超过了极限，岩石就发生破裂，或者说产生了断层。断层互相对着的两盘回跳到平衡位置，储存在岩石中的应变能便释放出来。一部分应变能转化为热，一部分用于使岩石破碎，还有一部分转化为使大地震动的弹性波能量。这是雷德（H. F. Reid）在1910年提出的关于地震直接成因的弹性回跳理论。这个理论是雷德在1906年旧金山地震后分析了震前和震后观测到的中加利福尼亚跨圣·安德烈斯断层两侧的三角测量网的变化后提出的。三角测量结果表明，断层附近的剪切应变在断裂前随时间缓慢地积累着，图11.1a、b、c。地震时，应变的变化符号和震前积累的应变符号相反，但在空间分布上相似，图11.1d。

既然地震是由断层引起的，那么破裂或者说断层的取向和其它性质应当或多或少地和引起这个破裂的、作用于地球内的应力有关。所以通过分析记录到的地震波动，就有可能确定产生地震的断层的取向和其它有关性质，进而就有可能了解使地球介质变形、引起地震、造山、使岛弧和海沟形成的力的性质。

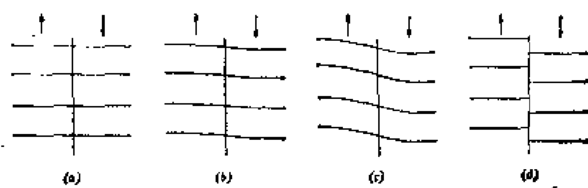


图11.1　弹性回跳理论示意图

（二）断层面解

图11.2在平面上表示一个垂直断层 FF 上的纯粹水平运动。箭头表示断层两盘彼此相对运动。直观地想像，地震波到达时，箭头前方的点最初应当是受到推动，或者说受到了压缩；而箭头后方的点应当是受到拉伸，或者说朝震源发生了膨胀。这时，在垂直方向的运动则分别表现为向上和向下，而在水平方向的运动则分别是离源和向源。通常以 C 或＋表示初动是推、压缩、向上或离源，而以 D 或－表示初动是拉、膨胀、向下或向源。在这种情况下，震源附近的区域被断层面 FF 和与之正交的辅助面 AA 分成四个象限。在

这些象限里，P 波的初动方向交替地是压缩（图 11.2 中以圆圈表示）或膨胀（以三角形表示）。FF 和 AA 都是节平面，在这些面上，P 波的初动为零。

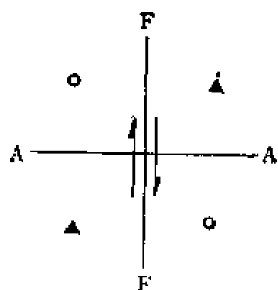


图 11.2 由一个垂直断层 FF 的纯水平运动产生的压缩和膨胀的分布

由于地球不均匀，地震射线发生弯曲。射线弯曲导致离开断层面一边的地震射线可能到达断层面的另一边(图 11.3)。于是，在假定地球是均匀时预期接收到压缩初动的地方可能会记到膨胀。在这种情况下就不再能用两个互相垂直的平面将压缩和膨胀隔开。射线弯曲所引起的上述困难可以用下述方法克服。图 11.4 中的 H 表示一个有一定深度 h 的震源，O 是台站，N 是北极，ϕ 是台站相对于震中 E 的方位角，ψ 是震中相对于台站的方位角。由图可见，

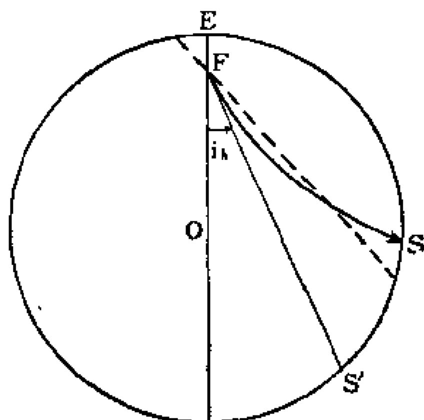


图 11.3 任意震源深度时的台站延伸位置

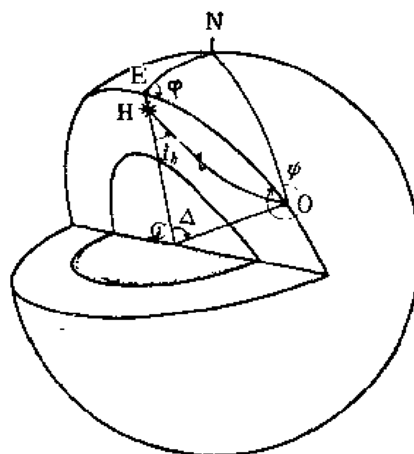


图 11.4 离源角

如果把 O 的观测结果逆着射线归算到以 H 为球心，以充分小的长度为半径的小球的球面上，就可以克服由于地球不均匀性引起的困难，从而可以在小球球面上把理论分析和观察结果加以对比。这个理想化的小球叫做震源球（图 11.5）。在震源球球面上，和台站 O 相应的点 P 的位置可以用射线离开震源时和地球半径的夹角 i_h 和台站相对于震中 E 的方位角 ϕ 表示。i_h 叫离源角。

由(9.355)式可知：

$$\frac{r_h \sin i_h}{v_h} = \frac{r_0 \sin i_0}{v_0}, \tag{11.1}$$

式中，下角标"h"表示震源所在处的量，"0"表示地面处的量。因为 $r_h = r_0 - h$，$\sin i_0 = v_0 \dfrac{dt}{d\Delta}$，所以

$$\sin i_h = \frac{r_0}{r_0 - h} v_h \frac{dt}{d\Delta}。 \tag{11.2}$$

对于远震来说，射线离开震源朝下到达地震台，此时与 O 相应的 P 点在震源球下半球的球面上。我们可以按乌尔夫（Wulff）网的投影原理把它投影到水平面上。图 11.6 表示了乌尔夫网的投影原理。图中，MN 代表过 H 的水平面(赤道面)，VW 是极轴，V 和

W是极点。连接PV交MN于P'点，P'便叫做下半球球面上的P点在MN面上的投影。

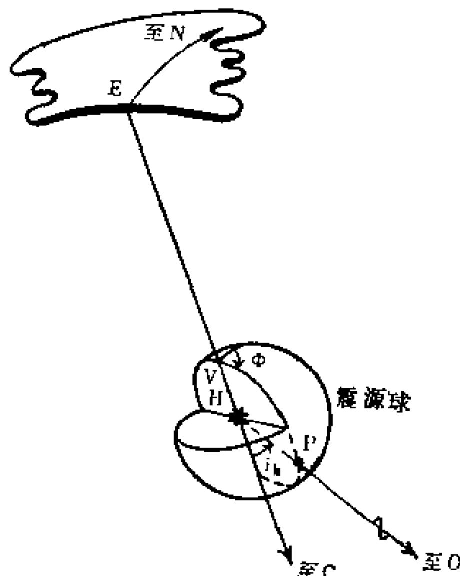


图 11.5 震源球

对于近震或地方震来说，射线离开震源朝上到达地震台。此时与S相应的P点在震源球上半球球面上[图 11.6b]。设PW与MN交于P'，P'便叫做上半球球面上的P点在MN面上的投影。

在乌尔夫网上，P点的投影P'的位置由台站方位角Φ和$\overline{HP'}$的长度决定。设震源球半径为1，则$\overline{HP'}=\tan\frac{i_h}{2}$。把地震波初动符号分开的节平面在投影图里是两段圆弧。既然FF和AA是彼此正交的两个平面，所以在投影图上，$\widehat{FF}$的极Y在$\widehat{AA}$上，$\widehat{AA}$的极X在$\widehat{FF}$上(图 11.7)。这种情况叫正交条件。

（三）震源区的应力状态

在围压下，破裂面的取向和引起破裂的应力状态有关。如果以p_1，p_2，p_3代表脆性物质在破裂前一刻的主应力，设$p_1>p_2>p_3$。按

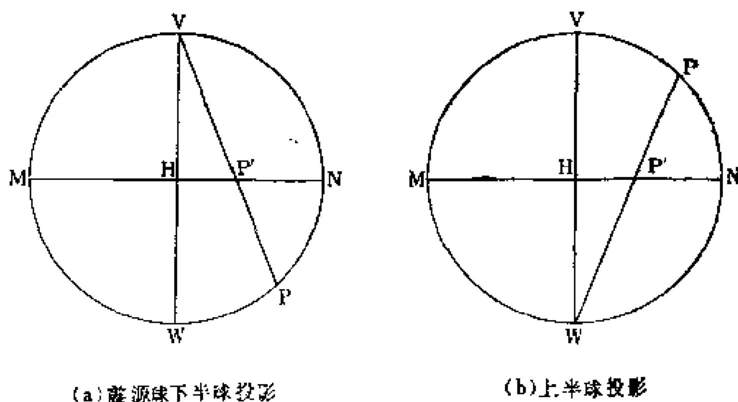


图 11.6 乌尔夫网的投影原理

通常的习惯，以张应力为正。根据库仑-摩尔破裂准则，当某一点的剪切应力τ超过剪切应力强度和摩擦阻抗两者之和时，也就是：

$$\tau \geqslant \tau_0 + \mu|p_n| \tag{11.3}$$

时就发生破裂。这里τ_0表示剪切应力强度，p_n表示破裂面上的正应力，μ是摩擦系数。令θ代表破裂面法向和最大主应力轴（最小主压应力轴）p_1轴的夹角，可以证明当$\mu=0$时$\theta=\pi/4$；而当$\mu=1$时$\theta=\pi/8$；$\mu=\infty$时$\theta=0$。通常把θ叫做破裂角或断层角。

在真正的三轴应力($p_1>p_2>p_3$)下，实验结果表明(图 11.8)，断层面与中等主压应力轴平行，随着μ的增大剪切破裂面的法向趋向最大主应力轴，破裂面趋向最小主应力(最大主压应力)轴。

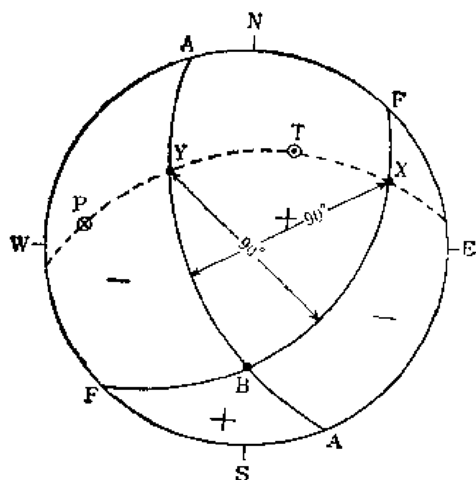


图 11.7　正交条件

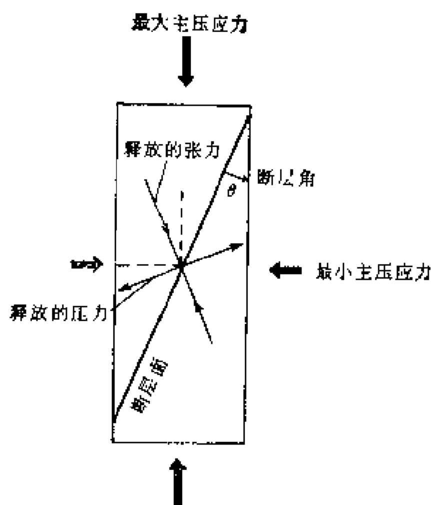


图 11.8　岩石破裂三轴应力实验示意图

由破裂面的取向和断层角的大小，有可能推断破裂前一刻震源区的主应力 p_1，p_2，p_3 的方向。地震时，沿断层面释放了一定大小的剪切应力，这相当于在与断层面成 $\pi/4$ 和 $3\pi/4$ 的方向上释放了一定的压应力(以 P 表示)和与 P 等值的张应力（以 T 表示)。P 与 p_3 成 $\frac{\pi}{4}-\theta$ 角，T 也与 p_1 成同样角度。

由断层面解容易求得 P 轴和 T 轴，它们应当位于 XY 平面并且分别与 X 轴和 Y 轴成 $\pi/4$（图 11.7)。P 轴位于初动是膨胀的象限，T 轴位于初动是压缩的象限。由岩石破裂三轴应力实验结果可知，P 轴和 T 轴反映了地震前后震源区应力状态的变化，而不是震源区构造应力方向本身，它们和构造应力的最小主应力轴 p_3 的方向以及最大主应力轴 p_1 的方向都分别成 $\pi/4-\theta$ 的角度。

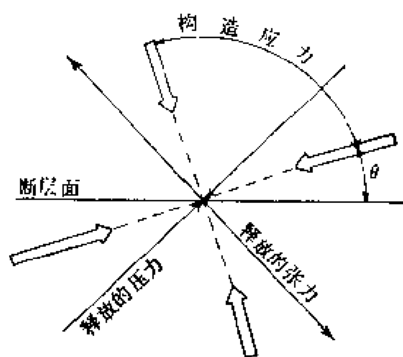


图 11.9　地震发生时释放的应力与震源区构造应力之间的关系

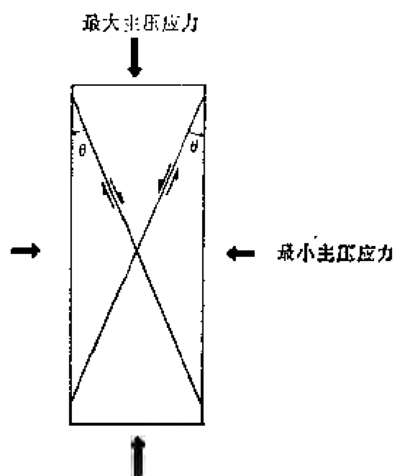


图 11.10　两个同样可能的、共轭的断层面

尽管 P 与 p_3，T 与 p_1 都偏离了 $\pi/4-\theta$ 角，但是如图 11.10 所示，因为有两个可能的、共轭的断层面，它们都与 p_3 成同样角度，在一般情况下，在每一个共轭面上发生破裂的概率是相同的，所以如果对一个地区的 P 轴方向作统计平均就有可能获得该地区构造

应力方向的图象。

以上分析只适用于新断层产生的情形，在已经存在断层的情形下，因为在断层附近，介质的强度可能比其它地方的强度低，因此可能沿着已有的断层发生滑动。这些情况说明，无论是在完整的岩石中发生了新断裂，还是沿着已有的断层发生了滑动，我们都可以由地震波初动求得 P 轴和 T 轴，但是都不能简单地把 P 轴与 p_3 轴、T 轴与 p_1 轴等同起来。

二、地 震 位 错

（一） 位　　错

由 P 波初动符号的分布可以求得两个互相垂直的节平面，但是单用这个方法，无法知道哪一个节平面是真正的断层面。为判断哪一个节平面是断层面并对震源得到更多的了解，就需要借助理论。

地震是由地下岩石的突然错断引起的，所以可以用地球内部一个位移间断面 Σ 来表示地震的震源。这个位移间断面叫位错面。如果以 $Q(\boldsymbol{r}_0)$ 表示位移间断面上的一个变点，以 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_0)$ 和 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0)$ 分别表示 Q 点的法向量和位移的间断（位错）向量，那么这两个向量的分布就完全表示了位错源的情况。

（二）弹性动力学位错理论

1. 集中力引起的位移

在运动方程（9.20）式中 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\rho\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},t)$ 是作用于介质中单位体积内的质点上的体力的合力。如果 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ 在包含坐标原点的小体积 V 内不为零而在 V 外为零，并且当 V 的线性尺度趋于零时 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ 趋于无穷而使积分

$$\lim_{V\to 0}\iiint_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)dV=\boldsymbol{g}(t) \tag{11.4}$$

保持有限，那么由此得到的函数 $\boldsymbol{g}(t)$ 就叫做作用于坐标原点的集中力。用狄拉克（Dirac）δ-函数，可以把上式表示为：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{g}(t)\delta(\boldsymbol{r})。 \tag{11.5}$$

式中，$\delta(\boldsymbol{r})$ 是狄拉克 δ-函数：

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)。 \tag{11.6}$$

这个集中力在 $P(\boldsymbol{r})$ 点引起的位移是：

$$4\pi\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\nabla\frac{1}{r}\cdot\left[\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\boldsymbol{g}(t-\tau)\tau d\tau+\frac{1}{r}(\nabla r)(\nabla r)\cdot\left[\frac{1}{\alpha^2}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\right]+\frac{1}{\beta^2 r}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)。\right. \tag{11.7}$$

如果集中力不是作用于坐标原点，而是作用于 $Q(\boldsymbol{r}')$ 点，那么，它在 $P(\boldsymbol{r})$ 点引起的位移就是：

$$4\pi\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\nabla\frac{1}{R}\cdot\left[\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\boldsymbol{g}(t-\tau)\tau d\tau\right]$$
$$+\frac{1}{R}(\nabla R)(\nabla R)\cdot\left[\frac{1}{\alpha^2}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\beta^2R}\boldsymbol{g}\left(t-\frac{R}{\beta}\right),\tag{11.8}$$

式中，$R=|\boldsymbol{R}|$，$\boldsymbol{R}$ 是力的作用点 $Q(\boldsymbol{r}')$ 至观测点 $P(\boldsymbol{r})$ 的矢径：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'。\tag{11.9}$$

(11.8) 式的分量形式是：

$$4\pi\rho u_i=\frac{1}{R^3}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}g_j(t-\tau)\tau d\tau$$
$$+\frac{1}{R}\gamma_i\gamma_j\left[\frac{1}{\alpha^2}g_j\left(t-\frac{R}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}g_j\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\right]$$
$$+\frac{\delta_{ij}}{\beta^2R}g_j\left(t-\frac{R}{\beta}\right)。\tag{11.10}$$

2. 位移表示定理

设闭合曲面 S 所包围的体积 V 内的曲面 Σ 上的位移及其导数不连续（图 11.11），令 $\boldsymbol{\nu}$ 表示 Σ 上的外法向，以 $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)]$ 和 $[\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)]$ 分别代表位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 和位移梯度 $\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 沿着 $\boldsymbol{\nu}$ 方向通过 Σ 时的间断。可以证明，V 内的 $P(\boldsymbol{r})$ 点的位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ 为：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_V\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{F}dV'-\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma\mathbf{G}\cdot[\mathbf{T}(\boldsymbol{u})]\cdot\boldsymbol{\nu}d\Sigma'$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma\boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{u}]\cdot\mathbf{T}(\mathbf{G}^T)d\Sigma'。\tag{11.11}$$

上式叫位移表示定理。式中的$\mathbf{G}$叫做索米扬那张量，它的分量 $G_{ij}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 表示 t' 时刻在 $\boldsymbol{r}'$ 处沿 x_j 方向作用的脉冲集中力引起的 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处沿 x_i 方向的位移。T 表示转置上式右边第一项表示体力引起的位移场；第二项表示曲面 Σ 上的应力间断(应力差)引起的位移场；第三项表示 Σ 上的位移间断(位错)引起的位移场。

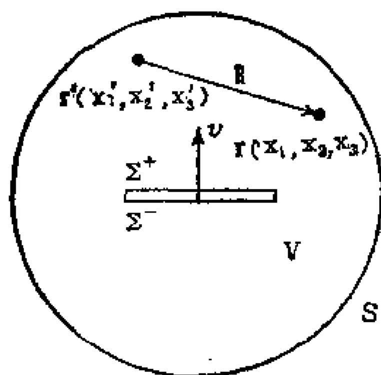


图 11.11 位移表示定理

3. 索米扬那 (Somigliana) 位错和伏尔特拉 (Volterra) 位错

一般情况下的位错 $[\boldsymbol{u}]$ 也叫做索米扬那位错。如果位错可以表示为：

$$[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r},\tag{11.12}$$

$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{\Omega}$ 均为常量，那么就把它叫做伏尔特拉位错。显然，伏尔特拉位错表示位错面两侧的相对错动有如刚体的运动(平动 $\boldsymbol{u}_0$ 加转动 $\boldsymbol{\Omega}$)。

4. 均匀、各向同性和完全弹性的无限介质中的位移表示式

在均匀、各向同性和完全弹性的无限介质中，可将位移表示定理写为：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_V \mathbf{G}\cdot\boldsymbol{F}dV'-\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma \mathbf{G}\cdot[\mathbf{T}(\boldsymbol{u})]\cdot\boldsymbol{\nu}d\Sigma'$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma \boldsymbol{\nu}\cdot[\boldsymbol{u}]\cdot\mathbf{T}(\mathbf{G})d\Sigma'。\tag{11.13}$$

式中的索米扬那张量很容易由集中力引起的位移表示式求得:

$$4\pi\rho\mathbf{G}(\boldsymbol{r},\ t;\ \boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{R^3}(3\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R-\mathbf{I})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\delta(t-t'-\tau)\tau d\tau$$
$$+\frac{1}{R}\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R\left[\frac{1}{\alpha^2}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\beta}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\beta^2R}\mathbf{I}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\beta}\right),\tag{11.14}$$

它的分量形式是:

$$4\pi\rho G_{ij}(r,\ t;\ r',\ t')=\frac{1}{R^3}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\int_{R/\alpha}^{R/\beta}\delta(t-t'-\tau)\tau d\tau$$
$$+\frac{1}{R}\gamma_i\gamma_j\left[\frac{1}{\alpha^2}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\alpha}\right)-\frac{1}{\beta^2}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\beta}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\beta^2R}\delta_{ij}\delta\left(t-t'-\frac{R}{\beta}\right)。\tag{11.15}$$

由上式不难看出索米扬那张量是对称张量:

$$G_{ji}(\boldsymbol{r},\ t;\ \boldsymbol{r}',\ t')=G_{ij}(\boldsymbol{r},\ t;\ \boldsymbol{r}',\ t'),\tag{11.16}$$

或

$$\mathbf{G}^T(\boldsymbol{r},\ t;\ \boldsymbol{r}',\ t')=\mathbf{G}(r,\ t;\ \boldsymbol{r}',\ t')。\tag{11.17}$$

在由(11.11)式导出(11.13)式时正是用了上述性质。

(11.13)式的分量形式是:

$$u_i(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_V G_{ij}F_jdV'-\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma G_{ij}[\tau_{jk}]\nu_kd\Sigma'$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma [u_j]T^i_{jk}\nu_kd\Sigma',\tag{11.18}$$

式中，τ_{jk} 是二阶张量 $\mathbf{T}(\boldsymbol{u})$ 的分量，T^i_{jk} 是三阶张量 $\mathbf{T}(\mathbf{G})$ 的分量:

$$\tau_{jk}=\lambda\delta_{jk}\frac{\partial u_m}{\partial x'_m}+\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x'_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x'_j}\right),\tag{11.19}$$

$$T^i_{jk}=\lambda\delta_{jk}\frac{\partial G_{mi}}{\partial x'_m}+\mu\left(\frac{\partial G_{ji}}{\partial x'_k}+\frac{\partial G_{ki}}{\partial x'_j}\right),\tag{11.20}$$

$x'_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{r}'$ 的分量。

如果令

$$[\sigma_{jk}]=\lambda\delta_{jk}\nu_m[u_m]+\mu(\nu_k[u_j]+\nu_j[u_k]),\tag{11.21}$$

那么(11.18)式可以表示成另一种形式:

$$u_i(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint_V G_{ij}F_jdV'-\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma G_{ij}[\tau_{jk}]\nu_kd\Sigma'$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}dt'\iint_\Sigma [\sigma_{jk}]\frac{\partial G_{ij}}{\partial x'_k}d\Sigma'。\tag{11.22}$$

5. 位错谱表示式

前面作的分析都是在时间域里进行的。有时，在频谱域讨论问题比较方便，因此需要上述关系在频谱域里的表示式。在频谱域，位移表示定理为:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega)=\iiint_V \hat{\mathbf{G}}\cdot\hat{\boldsymbol{F}}dV'-\iint_\Sigma \hat{\mathbf{G}}\cdot[\mathbf{T}(\hat{\boldsymbol{u}})]\cdot\boldsymbol{\nu}d\Sigma' + \iint_\Sigma \boldsymbol{\nu}\cdot([\hat{\boldsymbol{u}}]\cdot\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T))d\Sigma' \tag{11.23}$$

式中，$\hat{f}$ 表示量 f 的频谱。在均匀、各向同性和完全弹性的无限介质中，索米扬那张量的频谱表示式是:

$$4\pi\mu\ \hat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)=\frac{e^{-ik_\beta R}}{R}\mathbf{I}+\nabla\nabla\cdot\left[\frac{e^{-ik_\beta R}-e^{-ik_\alpha R}}{k_\beta^2 R}\mathbf{I}\right]。\tag{11.24}$$

6. 位错元和力偶系的等效性

由(11.23)式可见，位错引起的位移谱为:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega)=\iint_\Sigma \boldsymbol{\nu}\cdot([\hat{\boldsymbol{u}}]\cdot\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T))d\Sigma'。\tag{11.25}$$

如果以 $\boldsymbol{e}$ 表示滑动向量，以 u_0 表示错距，以 u_0 表示错距，以 $g(t)$ 表示位错的时间函数，即

$$[\hat{\boldsymbol{u}}]=u_0\hat{g}(\omega)\boldsymbol{e},\tag{11.26}$$

那么(11.25)式可以表示为:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega)=\iint_\Sigma u_0\hat{g}(\omega)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{e}\cdot\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T))d\Sigma'\tag{11.27}$$

或

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega)=\iint_\Sigma u_0\hat{g}(\omega)_0\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T))d\Sigma'。\tag{11.28}$$

以上两个式子说明，作为 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的函数，$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega)$ 中的 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 是可以互易的:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})=\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r};\omega;\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu})。\tag{11.29}$$

按照(11.20)式，$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T)$ 可以表示成:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T)=\lambda\mathbf{I}\nabla\cdot\mathbf{G}+\mu(\nabla\hat{\mathbf{G}}+\hat{\mathbf{G}}\nabla),\tag{11.30}$$

所以

$$u_0\hat{g}(\omega)\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{T}(\hat{\mathbf{G}}^T))d\Sigma'=u_0\hat{g}(\omega)d\Sigma'\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\nu})\lambda\nabla\cdot\hat{\mathbf{G}}+\mu\left(\frac{\partial(\hat{\mathbf{G}}\cdot\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\frac{\partial(\hat{\mathbf{G}}\cdot\boldsymbol{\nu})}{\partial\boldsymbol{e}}\right)\right]。\tag{11.31}$$

我们把 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 互相垂直的位错叫剪切位错:

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}=0\tag{11.32}$$

在剪切位错源情形下，(11.31)式的右边可化为:

$$\mu u_0\hat{g}(\omega)d\Sigma'\left[\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\nu})}{\partial\boldsymbol{e}}\right]。\tag{11.33}$$

如果沿 $\boldsymbol{e}$ 方向有 $\pm Fg(t)$ 的集中力作用于与 $\boldsymbol{e}$ 正交的 $\boldsymbol{\nu}$ 方向上的 $\pm\varepsilon/2$ 处，则它们引起的位移的频谱为(图 11.12):

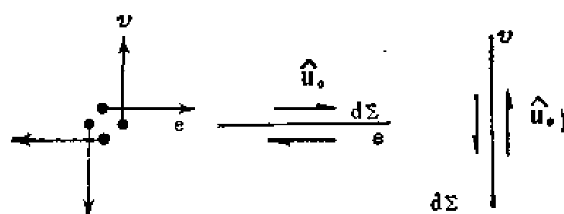


图 11.12 剪切位错和双力偶的等效性

$$M_0\hat{g}(\omega)\frac{\partial(\hat{\mathbf{G}}\cdot\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{\nu}}, \tag{11.34}$$

其中，

$$M_0=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon F_{o} \tag{11.35}$$

类似地，如果沿 $\boldsymbol{\nu}$ 方向有 $\pm F\hat{g}(\omega)$ 的简谐集中力作用于与 $\boldsymbol{\nu}$ 正交的 $\boldsymbol{e}$ 方向上的 $\pm\epsilon/2$ 处，则它们引起的位移的频谱为：

$$M_0\hat{g}(\omega)\frac{\partial(\hat{\mathbf{G}}\cdot\boldsymbol{\nu})}{\partial\boldsymbol{e}}, \tag{11.36}$$

这两对力偶引起的位移谱为：

$$M_0\hat{g}(\omega)\left[\frac{\partial(\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{e}))}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\frac{\partial(\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\nu}))}{\partial\boldsymbol{e}}\right], \tag{11.37}$$

显然，如果

$$M_0=\mu u_0 d\Sigma', \tag{11.38}$$

则发生于面积元 $d\Sigma'$ 上的、错距为 $\hat{u}_0$ 的剪切位错元所引起的位移与各个单力偶的力矩都等于 $M_0=\mu u_0 d\Sigma'$ 的双力偶所引起的位移完全相等。这个关系叫做剪切位错的等效性定理，M_0 叫地震距。

若 $\boldsymbol{\nu}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 平行，即 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{e}$，这种情形就是张裂位错。此时(11.30)可化为

$$u_0\hat{g}(\omega)d\Sigma'\left[\lambda\nabla\cdot\hat{\mathbf{G}}+2\mu\frac{\partial(\hat{\mathbf{G}}\cdot\boldsymbol{\nu})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right], \tag{11.39}$$

它相当于一个强度为 $\lambda\hat{u}_0 d\Sigma'$ 的膨胀中心和一个 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的、强度为 $2\mu\hat{u}_0 d\Sigma'$ 的无矩偶极的叠加。既然膨胀中心总可以分解为三对彼此正交的、强度为 $\lambda\hat{u}_0 d\Sigma'$ 的无矩偶极，那么在 $\boldsymbol{\nu}$ 方向上的无矩偶极的总强度 M_0 便应当是：

$$M_0=(\lambda+2\mu)u_0 d\Sigma', \tag{11.40}$$

而其余两个方向上的无矩偶极的强度则都是 $\lambda u_0 d\Sigma'$。这就是张裂位错和膨胀中心加无矩偶极的等效性(图 11.13)。

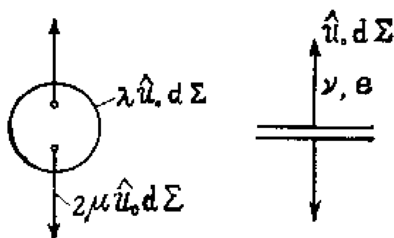


图 11.13 张裂位错元和膨胀中心加无矩偶极的等效性

（三）剪切位错点源辐射的地震波

1. 剪切位错点源辐射的地震波远场位移的频谱

以剪切位错面代表构造地震的震源，这样的震源所辐射的地震波可以由(11.27)式求得。设剪切位错元位于图 11.14 中的 Q 点。在以地球球心为原点的球极坐标系中，这点的坐标为$(r_h, 0, 0)$。设观测点 P 在同一坐标系中的坐标为 (r, θ, ϕ)。为方便起见，引进一个直角坐标系 $x_i(i=1, 2, 3)$，其基矢量为 $\boldsymbol{e}_i$。选取 x_3 轴通过震源 Q，向上为正。选取 x_1 轴位于位错面，平行于赤道面。x_1 轴的方向就是断层面的走向。选取 x_2 轴，使它与 x_1, x_3 轴一起构成一个右旋直角坐标系。以 δ 表示断层面和水平面的夹角（断层面的倾角），以 λ 表示滑动矢量 $\boldsymbol{e}$ 和 x_1 轴的夹角(滑动角)，逆时针为正。显然，λ 和 δ 确定了矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 在震源坐标系中的取向。由图 11.14 我们可以求得：

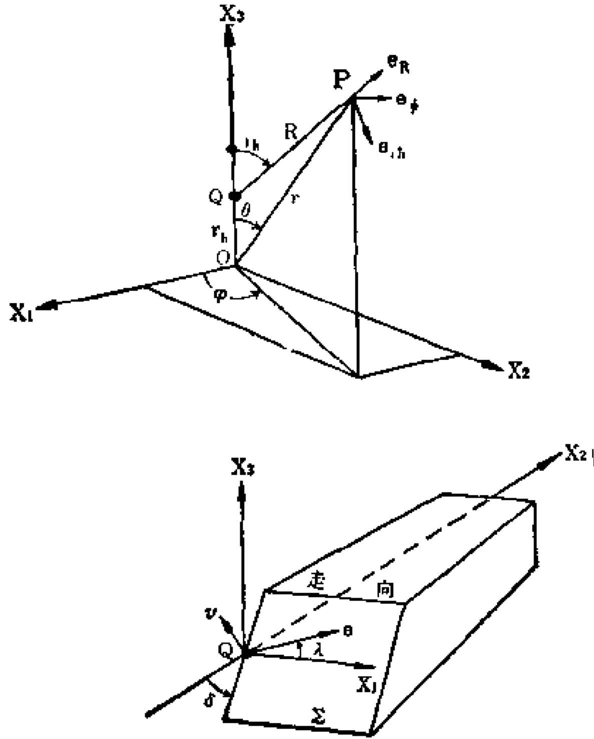


图 11.14　坐标系和震源的几何情况

$$
\left\{
\begin{aligned}
\boldsymbol{e} &= \cos\lambda \boldsymbol{e}_1 + \sin\lambda\cos\delta \boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + \sin\lambda\sin\delta \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{\nu} &= -\sin\delta \boldsymbol{e}_2 + \cos\delta \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_R &= \sin i_h\cos\phi \boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + \sin i_h\sin\phi \boldsymbol{e}_2 + \cos i_h \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi \boldsymbol{e}_1 + \cos\phi \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_{i_h} &= \cos i_h\cos\phi \boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + \cos i_h\sin\phi \boldsymbol{e}_2 - \sin i_h \boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
\right.
\tag{11.41}
$$

其中，ϕ 代表观测点相对于断层走向的方位角。将上式和 (11.24) 式代入 (11.25) 式，便可求得剪切位错元所引起的位移谱 $d\hat{\boldsymbol{u}}$ 在球极坐标系 (R, i_h, ϕ) 中的三个分量。在远场$(k_\alpha R, k_\beta R \gg 1)$，这三个分量的形式是：

$$
\left\{
\begin{aligned}
d\hat{u}_R &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{4\pi}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^3}\right)2(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e})\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\
d\hat{u}_{i_h} &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{4\pi\beta}[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_{i_h})(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_R) + (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_{i_h})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_R)]\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\
d\hat{u}_\phi &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{4\pi\beta}[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_\phi)(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_R) + (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\phi)(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_R)]\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)。
\end{aligned}
\right.
\tag{11.42}
$$

在上式中，我们已将位错的频谱 $\hat{u}_0(\omega)$ 表示成：

$$\hat{u}_0(\omega) = u_0\hat{g}(\omega), \tag{11.43}$$

u_0 表示错距，$\hat{g}(\omega)$ 表示震源时间函数 $g(t)$ 的频谱。

因为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{i_h} = d\boldsymbol{e}_R/di_h, \\ \boldsymbol{e}_\phi = d\boldsymbol{e}_R/\sin i_h d\phi \end{cases} \tag{11.44}$$

所以如果我们引进函数 $F(\delta, \lambda, i_h, \phi)$:

$$\frac{1}{6}F(\delta, \lambda, i_h, \phi) = (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_R)(\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{e}), \tag{11.45}$$

则(11.41)式可以化为:

$$\begin{aligned} d\hat{u}_R &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{12\pi\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 F\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ d\hat{u}_{i_h} &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{24\pi\beta}\frac{\partial F}{\partial i_h}\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ d\hat{u}_\phi &= i\omega\hat{g}(\omega)\frac{u_0 d\Sigma'}{24\pi\beta}\frac{\partial F}{\sin i_h\partial\phi}\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)。 \end{aligned} \tag{11.46}$$

式中的 F 可以表示为:

$$\begin{aligned} F(\delta, \lambda, i_h, \phi) = &\cos\lambda(\sin\delta A_1 + \cos\delta A_2^{**}) \\ &+ \sin\lambda(\sin 2\delta A_3 - \cos 2\delta A_2), \end{aligned} \tag{11.47}$$

$$A_1 = -\sin 2\phi P_2^2(\cos i_h),$$

$$\begin{cases} A_2 = -2\sin\phi P_2^1(\cos i_h), \\ A_3 = 3P_2(\cos i_h) + \frac{1}{2}\cos 2\phi P_2^2(\cos i_h), \\ A_2^{**} = A_2\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\phi P_2^1(\cos i_h)。 \end{cases} \tag{11.48}$$

当 $\lambda = 0$, $\delta = 90°$ 时就是走向滑动断层，此时 $F = A_1$；当 $\lambda = 90°$, $\delta = 90°$ 时是倾向滑动断层，此时 $F = A_2$；当 $\lambda = 90°$, $\delta = 45°$ 时是倾角为 45° 的逆断层，此时 $F = A_3$。

2. P 波和 S 波的辐射图型

有时，在震源坐标系中讨论问题比较方便。如果选取 X_1 轴与 $\boldsymbol{e}$ 一致，X_3 轴与 $\boldsymbol{\nu}$ 一致，X_2 轴与 X_1 和 X_3 轴共同构成右旋直角坐标系。那么这样选取的坐标系 $X_i(i = 1, 2, 3)$ 就叫做震源坐标系。在这个坐标系中，剪切位错点源辐射的地震波远场位移谱可以由令(11.45)式中的 $\lambda = \delta = 0$ 并将 i_h 换成 $\boldsymbol{e}_R$ 与 X_3 轴的夹角 θ 求得(图 11.15)，结果是:

$$\begin{cases} d\hat{u}_R = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu u_0 d\Sigma'}{4\pi\rho\alpha^3}\sin 2\theta\cos\phi\frac{e^{-ik_\alpha R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ d\hat{u}_\theta = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu u_0 d\Sigma'}{4\pi\rho\beta^3}\cos 2\theta\cos\phi\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ d\hat{u}_\phi = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{\mu u_0 d\Sigma'}{4\pi\rho\beta^3}(-\cos\theta\sin\phi)\frac{e^{-ik_\beta R}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)。 \end{cases} \tag{11.49}$$

用向量形式表示，则为:

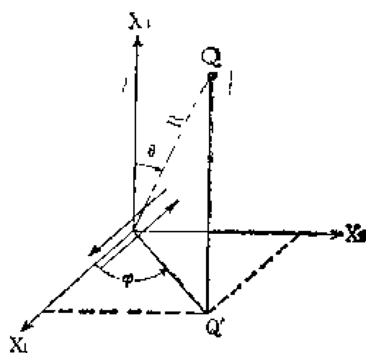


图 11.15　震源坐标系

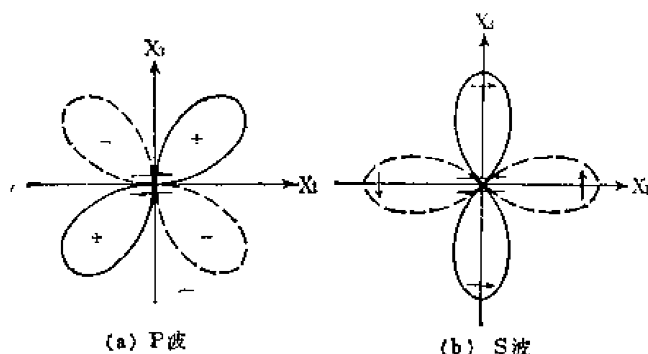


图 11.16　剪切位错点源的 P 波和 S 波辐射图型

$$d\hat{\boldsymbol{u}} = i\omega\hat{g}(\omega)\frac{M_0}{4\pi\rho c^3}\boldsymbol{R}\frac{e^{-ik_cR}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \tag{11.50}$$

式中，c 表示 α 或 β，M_0 是地震矩：

$$M_0 = \mu u_0 d\Sigma', \tag{11.51}$$

$\boldsymbol{R}$ 叫做辐射图型因子：

$$\boldsymbol{R} = \sin 2\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_R + \cos 2\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi。\tag{11.52}$$

图 11.16 示意地表示了在 $X_2 = 0$ 的平面上，剪切位错点源的 P 波和 S 波的辐射图型。

3. S 波的偏振

S 波的质点振动方向在垂直于射线的平面上并不是毫无规则的，它有一个由震源性质决定的取向。换句话说，S 波是平面偏振的。包含射线和 S 波的质点振动方向的平面叫偏振面。通常以 S 波质点振动和入射面的夹角表示 S 波偏振的性质，这个角叫偏振角。今以 SH 和 SV 分别表示 S 波的质点运动在水平面和垂直面的分量，则偏振角 ε 的正切为(图 11.17)：

$$\tan\varepsilon = \frac{SH}{SV}。\tag{11.53}$$

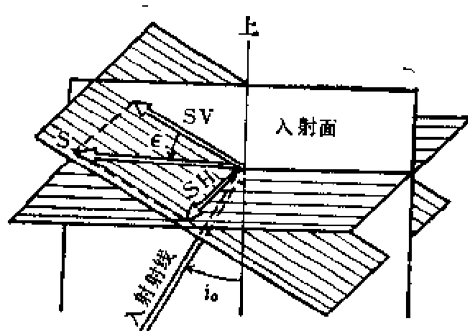


图 11.17　S 波的偏振角

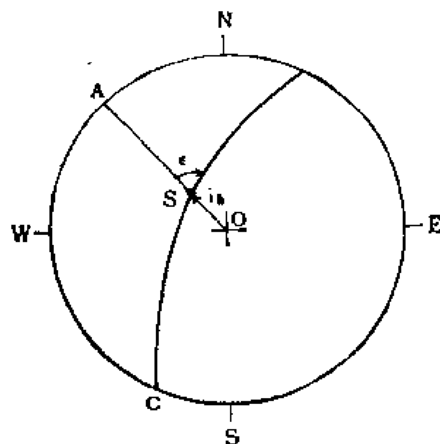


图 11.18　在乌尔夫网上表示 S 波的偏振方向的方法

在乌尔夫网上，台站 S 的位置由离源角 i_h 和台站相对于震中的方位角 ϕ 决定。按前面的规定(参见图 11.4 和 11.5)，ϕ 以顺时针为正。在 S 点，偏振方向是由与过这点的大

圆弧 $\overset{\frown}{OA}$(投影在乌尔夫网上正好是一条直线)成 ε 角的大圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 确定的。弧 $\overset{\frown}{BC}$ 在 S 点的切线方向就是该点的偏振方向(图 11.18)。

如果以 ε' 表示 S 波偏振方向与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的夹角,则由(11.49)式可知,

$$\tan\varepsilon' = \frac{d\hat{u}_\phi}{d\hat{u}_\theta} = -\frac{\cos\theta\sin\phi}{\cos 2\theta\cos\phi} \tag{11.54}$$

ε' 的意义如图 11.19 所示。由上式可以得知,在震源球球面上,位错点源产生的 S 波的偏振方向是从 P 轴发出、朝 T 轴汇聚的线段簇(图 11.20)。

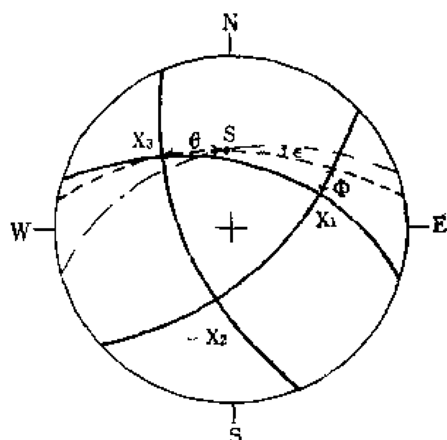


图 11.19 S 波的偏振方向与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的夹角 ε

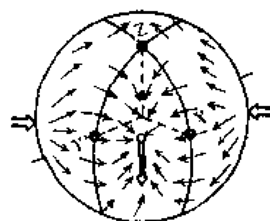


图 11.20 位错点源产生的 S 波偏振方向

S 波的偏振可以用来确定断层面解。用 S 波的偏振确定断层面解有一个很大的优点,这就是 S 波偏振方向的确定和是否真正辨认出 S 波的初至无关。S 波的偏振方向是由空间的一条直线的取向决定的,如果错过了 S 波的初动,误把其后的半周期认为是初动,同样可以确定出偏振方向。这样定出的质点运动方向与正确的方向正好差 180°,但定出的偏振方向仍是正确的。

三、破裂过程和震源参数

(一) 有限移动源

1. 单侧破裂

以位错点源表示地震辐射的 P 波初动和 S 波偏振是合适的。但是实际的破裂过程是复杂的,它出现在有限的范围内,发生于有限的时段中。为了得到地震破裂中震源辐射的弹性波场,应当对移动着的点源引起的位移场作连续的迭加。这种由移动着的点源构成的大小有限的点源,叫有限移动源。

最简单的一种有限移动源是单侧破裂方式的有限移动源。设断层面(位错面)是长为 L 宽为 W 的矩形平面,$L \gg W$。并且设断层面位于 X_1X_2 平面,即 $\boldsymbol{\nu}$ 方向与 X_3 轴一致。断层滑动矢量 $\boldsymbol{e}$ 的方向即 X_1 方向。如果破裂过程从断层的一端开始,以有限的速度 v_f 传播到另一端(图 11.21),那么这种震源就叫做单侧破裂方式的有限移动源。由(11.49)式容易求得,在时间域里,在破裂过程中,由 $(x_1, x_1 + dx_1)$ 的位错源辐射的远场位移是:

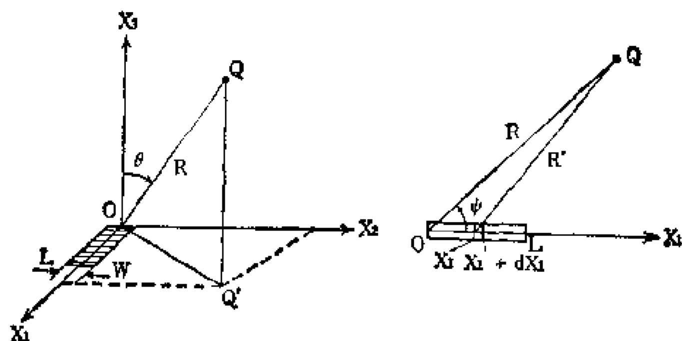


图 11.21　单侧破裂方式的有限移动源

$$d\boldsymbol{u}=\dot{g}\left(t-\frac{x_1}{v_f}-\frac{R'}{c}\right)\frac{\mu u_0 W dx_1}{4\pi\rho c^3 R}\boldsymbol{R},\tag{11.55}$$

式中，R' 是位错元至观测点 Q 的距离。当 $L/R\ll 1$ 时，

$$R'=R-x_1\cos\phi,\tag{11.56}$$

所以这个有限移动源引起的远场位移：

$$\boldsymbol{u}=\frac{\mu u_0 W}{4\pi\rho c^3 R}\boldsymbol{R}\int_0^L \dot{g}\left[t-\frac{R}{c}-\left(\frac{x_1}{v_f}-\frac{x_1\cos\phi}{c}\right)\right]dx_1。\tag{11.57}$$

上式右边的积分容易作出，结果是：

$$\boldsymbol{u}=\frac{M_0}{4\pi\rho c^3 R}\boldsymbol{R}F(c)\frac{v_f}{L}\left[g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left(t-\frac{R}{c}-\frac{L}{v_f F(c)}\right)\right]。\tag{11.58}$$

其中，M_0 是这个矩形断层的地震矩：

$$M_0=\mu u_0 W L,\tag{11.59}$$

而函数

$$F(c)=\frac{1}{1-\frac{v_f}{c}\cos\phi}。\tag{11.60}$$

$F(c)$ 表示因为破裂传播效应，波的振幅受到了调制。在破裂传播方向的前方，振幅增大；在后方，振幅减少。调制效应的大小受破裂速度与波速之比控制。我们把 $F(c)$ 叫做调制因子。因为调制效应，P 波和 S 波的振幅图型变成如图 11.22 所示的样子。此时的辐射图型对于断层面（$X_3=0$）是对称的，而对其余两个平面不对称。这一性质可以用来

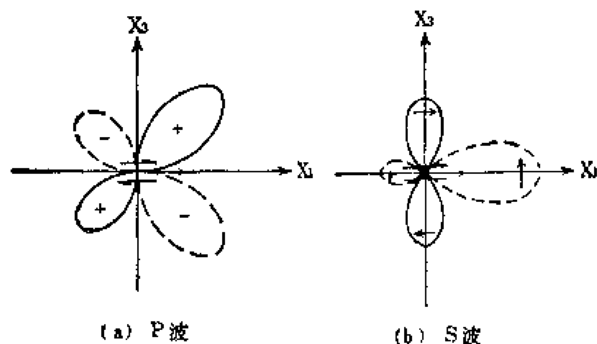


图 11.22　单侧破裂方式的有限移动源辐射的体波远场位移的辐射图型

从两个节平面中选择出真正的断层面。

如果震源时间函数是单位函数 $H(t)$：

$$H(t)=0,\ t<0,\qquad =1,\ t>0, \tag{11.61}$$

那么(11.58)式表示 u 的波形是方形波，它的半周期(持续时间)为(图 11.23)：

$$T_u=L/v_fF(c)=L\left(\frac{1}{v_f}-\frac{1}{c}\cos\phi\right)。 \tag{11.62}$$

这就是说，由于破裂调制效应，在破裂传播方向的前方，地震波初动半周期变小；在相反方向上，半周期增大。破裂传播的效应包括两方面，即半周期缩短和振幅加大，或反过来。这种情况类似于声学中的多普勒（Doppler）效应，通常叫做地震学中的"多普勒效应"。

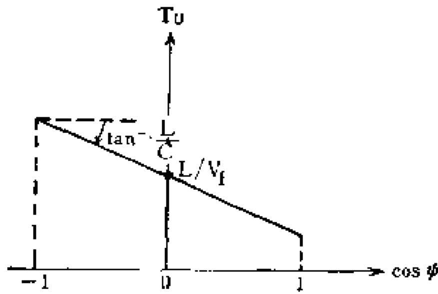


图 11.23 单侧破裂方式情形下初动半周期随方向的变化

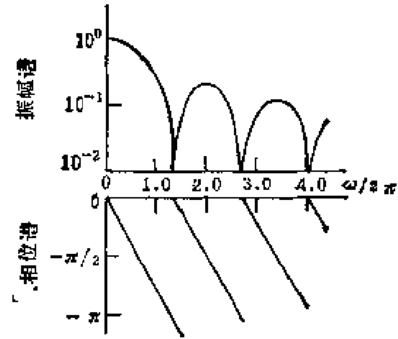


图 11.24 单侧破裂情形下 P 波的频谱

在频谱域，与(11.58)式相应的表示式是：

$$\hat{u}=\frac{M_0}{4\pi\rho c^3R}\boldsymbol{R}i\omega\hat{g}(\omega)e^{-ik_cR}e^{-iX}\frac{\sin X}{X}。 \tag{11.63}$$

其中，

$$X=\frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v_f}-\frac{\cos\phi}{c}\right)。 \tag{11.64}$$

由于多普勒效应，在体波的振幅谱上出现了一系列极小点(图11.24)，它们的位置由

$$X=n\pi,\ n=1,2,3,\cdots。 \tag{11.65}$$

决定。与第 n 个极小点相应的频率 f_n 为：

$$f_n=\frac{n}{L\left(\dfrac{1}{v_f}-\dfrac{\cos\phi}{c}\right)}。 \tag{11.66}$$

对比(11.61)式和上式，不难发现第一个极小点的频率 f_1 的倒数正好是初动半周期 T_u：

$$1/f_1=L\left(\frac{1}{v_f}-\frac{\cos\phi}{c}\right)=T_u。 \tag{11.67}$$

f_1 与 T_u 之所以存在这种关系是因为它们仍是同一种效应（多普勒效应）在时间域和频谱域里的表现。因为这个缘故，T_u 或 $1/f_1$ 与方位角的关系可以用来鉴定断层面，确定破裂传播速度和断层长度。由于破裂速度通常更接近于 S 波速度，所以 S 波的上述效应尤为明显，更宜于用于确定上述参数。

2. 双侧破裂

以上涉及的是破裂朝一侧扩展的简单情况。实际的地震破裂过程是很复杂的，其中一种可能的情形是破裂从一点开始，朝反方向的两侧以相同的速度扩展(图 11.25)。这种情形叫做对称的双侧破裂。对于这种情形，远场位移 $\boldsymbol{u}$ 可以由(11.58)式求得，结果是:

$$\boldsymbol{u}=\frac{M_0}{4\pi\rho c^3R}\boldsymbol{R}\left\{\frac{v_fF(c)}{2L}\left[g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left(t-\frac{R}{c}-\frac{L}{v_fF(c)}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{v_fF_1(c)}{2L}\left[g\left(t-\frac{R}{c}\right)-g\left(t-\frac{R}{c}-\frac{L}{v_fF_1(c)}\right)\right]\right\}。\tag{11.68}$$

式中，M_0 是地震矩:

$$M_0=\mu u_0W2L,\tag{11.69}$$

$$F_1(c)=\frac{1}{1+\dfrac{v_f}{c}\cos\psi}。\tag{11.70}$$

这种情形下的 P 波和 S 波辐射图型如图 11.26 所示。此时的 P 波辐射图型和点源情形一样，而 S 波的振幅在破裂传播方向($\pm X_1$ 方向)增强。

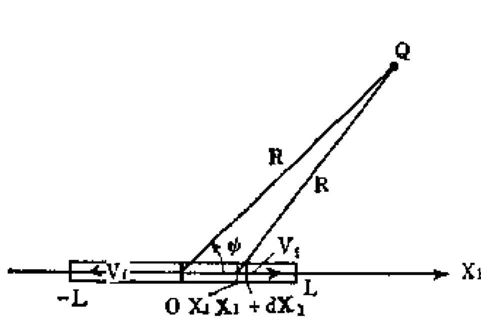


图 11.25 双侧破裂方式

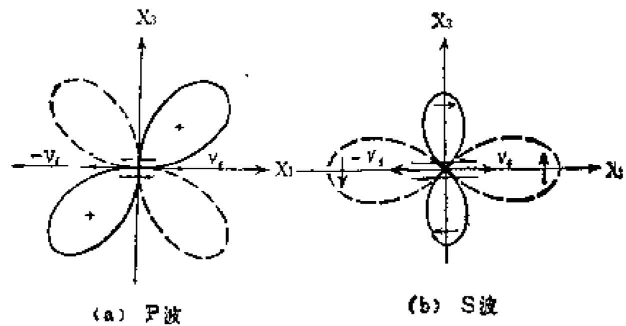


图 11.26 双侧破裂方式情形下体波的辐射图型

在频谱域，与(11.68)式相应的表达式是:

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\frac{M_0}{4\pi\rho c^3R}\boldsymbol{R}i\omega\hat{g}(\omega)e^{-ik_cR}\frac{1}{2}\left(e^{-iX}\frac{\sin X}{X}+e^{-iX_1}\frac{\sin X_1}{X_1}\right)。\tag{11.71}$$

其中 X 如(11.64)式所示，M_0 如(11.69)式所示，而

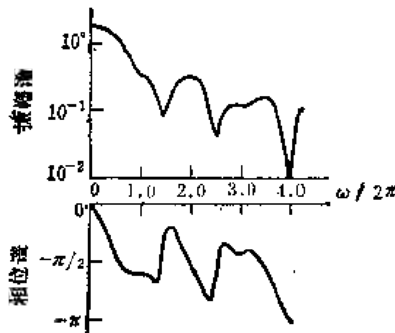


图 11.27 双侧破裂情形下 P 波的频谱

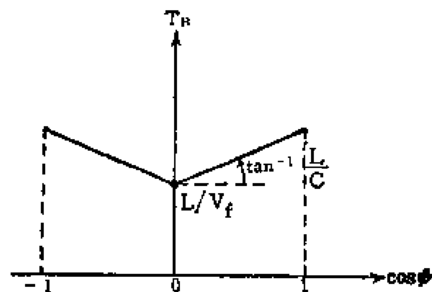


图 11.28 双侧破裂方式情形下初动半周期随方向的变化

$$X_1 = \frac{\omega L}{2}\left(\frac{1}{v_f} + \frac{\cos\phi}{c}\right)。\tag{11.72}$$

这种情形下 P 波的频谱如图 11.27 所示。

在双侧破裂情形下，初动半周期 T_b 由下式确定(图 11.28)：

$$T_b = \frac{L}{v_f}\left(1 + \frac{v_f}{c}|\cos\phi|\right)。\tag{11.73}$$

(二) 震 源 参 数

1. 点 源 的 参 数

(1) 位置和发震时刻

如果震源至台站的距离 R 比震源尺度 L 大得多 ($R \gg L$)，就可以把它当作是空间中的一个点；如果地震波的周期 T 比完成破裂过程所花费的时间 L/v_f 大得多 ($T \gg L/v_f$)，就可以不考虑破裂传播的细节，把它当作时间轴上的一个点。破裂速度 v_f 是和波传播速度 c 相当的量：$v_f \sim c$，所以 $T \gg L/v_f$ 意味着波长 λ 比震源尺度 L 大得多 ($\lambda \gg L$)。因此，在 $R \gg L$ 和 $\lambda \gg L$ 这两个条件下，我们把地震的震源当作时间上和空间中的一个点。依此前提求得的最简单的、也是人们最早求得的一组震源参数是：震中的经、纬度、震源深度，发震时刻和(假定是匀速情形时)震源处的地震波速度。

(2) 震级和地震波能量

由地震波的振幅可以求出地震的震级。

由地震记录可以估算给定距离处的地震波能量。关于震级和地震能量的测定，我们在第八章第一节中已经述及，这里不再重覆。

(3) 断层的几何参数

P 波初动符号的象限分布，S 波的偏振，体波、面波的频谱或地震图都可以用来确定地震断层在空间的取向，即断层面的走向 ϕ，倾向，倾角 δ，错动矢量和走向间的夹角(滑动角 λ)。这些参数描述了震源(断层面)的几何情况，叫做断层的几何参数。

2. 运 动 学 参 数

在不能把震源视为点源的情况下，必须增添若干参数来描述它。如果把震源理想化为长度为 L，宽度为 $W(L \gg W)$ 的矩形断层，并设破裂是以恒定的破裂速度 v_f 从断层的一端向另一端扩展，那么 L，W，和 v_f 以及由此得出的断层面面积等和破裂的运动学过程有关的参数，我们把它们叫做破裂的运动学参数。

3. 静 力 学 参 数

构造地震的震源可以理想化为连续的弹性介质中的一个位移间断面(位错面)。从这个观点出发建立和发展起来的震源理论叫地震位错理论。从另一个角度看，地震是地壳介质中的应力松弛过程。因此，构造地震的震源可以理想化为地球介质中某一个面上或某一个区域内应力的突然松弛。从这个观点出发建立和发展起来的震源理论叫应力松弛理论。

根据地震的位错理论，给定断层面上的位错分布及其上各点的震源时间函数，原则上便可以求得介质中各点的位移场，并可由此求得断层面上以及介质中各点的应力变化。在这个理论中，位错分布及震源时间函数是假定已知的，而介质中各点的位移和应力变化是导出的。位错理论是运动生理论。

按照应力松弛理论，原则上可以计算弹性介质中某一个面或某一个区域应力突然松弛后介质中各点的位移，包括断层面上各点的位移间断(位错的分布)及其历史(震源时间函数)。在这个理论中，应力的突然松弛的情况是预先给定的，断层面上的位错分布及震源时间函数以及整个位移场则是导出的。应力松弛理论是动力学理论。

由此可见，地震震源的位错理论和应力松弛理论是从不同角度描述震源性质的理论，它们互相补充，相得益彰。

最简单的应力松弛理论是静力学理论。今考虑如图 11.29 左图所示的理论地震断层模式。这个断层模式是一个二维的模式，宽度为 $2a$。设初始应力为 $p_{21}=\tau_o$ 如果把地震

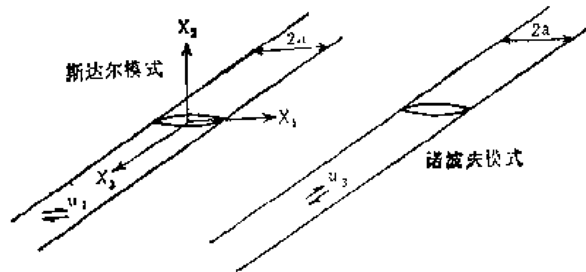


图 11.29　二维地震断层模式

看作是断层面上的应力 p_{21} 突然从 τ 降为零。那么根据这个条件，可以求出断层面两盘的位移分布，断层面两盘的位移总是沿 x_1 方向，其分布为(图 11.30):

$$U_1(x_1)=\frac{\tau a}{2}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu(\lambda+\mu)}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad |x_1|\leqslant a_o \tag{11.74}$$

$U_1(x_1)$ 如图 11.30 的上图所示。

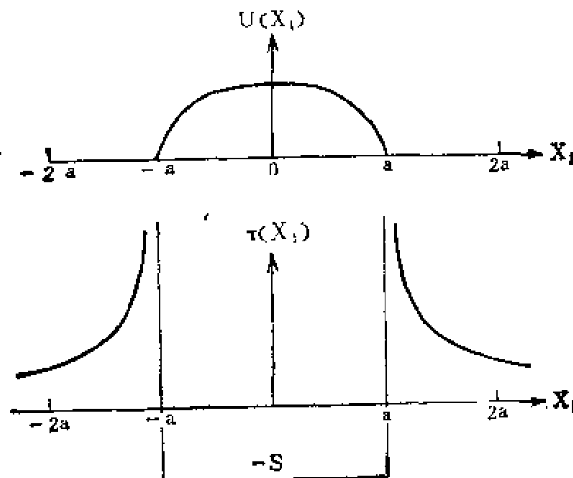


图 11.30　沿 x_1 轴的位移和应力的分布

对于斯达尔模式，U 表示U_1，τ 表示p_{21}；

对于诺波夫模式，U 表示U_3，τ 表示 p_{23}。

由上式可以求得当 $\lambda = \mu$ 时最大相对位移 U_m 为:

$$U_m = 2U_1(0) = \frac{3}{2}\frac{\tau a}{\mu}。 \tag{11.75}$$

并且可以求得平均位错

$$\bar{U} = \frac{\pi}{4} U_m。 \tag{11.76}$$

断层形成前,原点处的应力为 τ; 形成后,应力松弛到零。因此断层面上的应力变化(应力降) $\Delta\tau$ 为(设 $\lambda = \mu$):

$$\Delta\tau = \tau - 0 = \frac{2}{3}\frac{U_m\mu}{a} = \frac{8}{3\pi}\frac{\bar{U}\mu}{a}。 \tag{11.77}$$

断层形成后,介质中各点的应力并非完全松弛掉,可以求出断裂面沿 x_1 轴的切应力分布是:

$$\begin{cases} p_{23}(x_1) = -\tau, & |x_1| \leqslant a, \\ p_{23}(x_1) = \tau\left[\dfrac{x_1}{(x_1^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right], & |x_1| > a。 \end{cases} \tag{11.78}$$

由图 11.29 的左图可见,如果把 x_1 轴的方向设想为深度方向,那么这个理论模式可以看作是无限介质中的一个宽度为 $2a$ 的、无限长的倾滑断层。这个断层模式是斯达尔(Starr)在 1928 年最早提出的,叫斯达尔模式。

和斯达尔模式不同,诺波夫 (L. Knopoff) 在 1958 年分析了如图 11.29 右图所示的理论断层模式。这个模式是无限介质中一个宽度为 $2a$ 的无限长的断层面。在这个面上 ($x_2 = 0$, $|x_1| \leqslant a$),切应力 p_{23} 从 τ 松弛为零。分析表明,由于断层面上应力的松弛所产生的位移总是沿着断层的长度方向(x_3 方向),在断层所在的平面 ($x_2 = 0$ 平面)上,其分布为:

$$U_3(x_1) = \frac{\tau a}{\mu}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad |x_1| \leqslant a。 \tag{11.79}$$

$U_3(x_1)$ 如图 11.30 的上图所示。由上式可以求得断层面上的最大相对位移为:

$$U_m = \frac{2\tau a}{\mu}, \tag{11.80}$$

而平均位错和最大位错的关系和斯达尔模式的相同,(11.78)式。

由上式容易求得断层面上的应力变化(应力降) $\Delta\tau$ 为:

$$\Delta\tau = \tau - 0 = \frac{1}{2}\frac{U_m\mu}{a} = \frac{2}{\pi}\frac{\bar{U}\mu}{a}。 \tag{11.81}$$

可以求得,断层形成后沿 x_1 轴的切应力 p_{23} 为:

$$\begin{cases} p_{23} = 0 & |x_1| \leqslant a, \\ p_{23} = \dfrac{\tau x_1}{(x_1^2 - a^2)^{1/2}} & |x_1| > a。 \end{cases} \tag{11.82}$$

所以这种断层的出现相当于在原来的均匀切应力场 $p_{23} = \tau$ 之上再施加一个应力于 $x_2 = 0$ 平面,这个应力的分布是:

$$\begin{cases} p_{23}(x_1) = -\tau, & |x_1| \leqslant a, \\ p_{23}(x_1) = \tau\left[\dfrac{x_1}{(x_1^2 - a^2)^{1/2}} - 1\right], & |x_1| > a。 \end{cases} \tag{11.83}$$

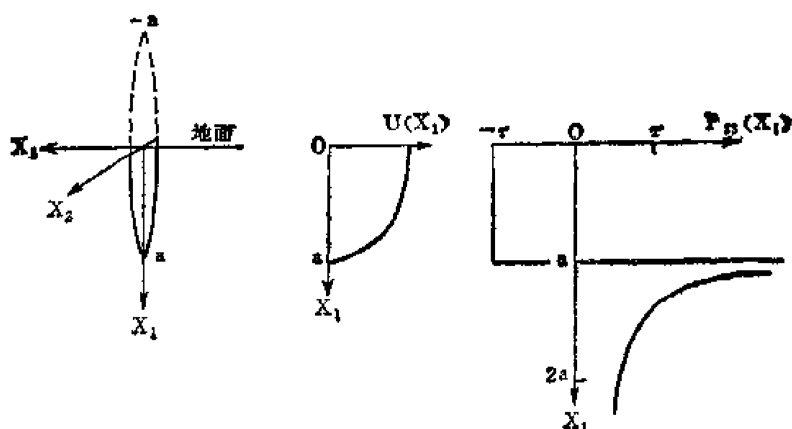


图 11.31　诺波夫模式运用于延伸到地面的走滑断层

由图 11.29 的右图可见，如果把 x_1 轴的方向设想为深度方向，那么这个断层模式可以看作是无限介质中一个宽度为 $2a$ 的、无限长的走向滑动断层。通常把这个模式叫做诺波夫模式。当 $x_1=0$ 时，$p_{12}=0$，所以诺波夫模式也适用于延伸到地表面的走向滑动断层(图 11.31)。这种情况下，可以把诺波夫模式看作是半无限介质中一个宽度为 a 的、无限长的走向滑动断层。斯达尔模式不能运用于延伸到地表面的走向滑动断层，因为在那种情况下，当 $x_1=0$ 时，$p_{12}\neq 0$。

上述两种二维断层模式都假定断层形成后，断层面上的应力 p_{21}，p_{22}，p_{23} 都松弛到零。如果断层是张开的，作这种假定是适宜的。但是因为在地球内，介质处于受到围压的状态，断层面是接触面，震后断层面上的应力一般不为零。设破裂后断层面上的应力为 τ'，则应力降

$$\Delta\tau=\tau-\tau'。\tag{11.84}$$

在这种情形下，地震可以看作是在断层面上施加切应力

$$p(x_1)=-\Delta\tau,\ |x_1|\leqslant a,\tag{11.85}$$

而位移

$$U(x_1)=0,\ |x_1|\geqslant a。\tag{11.86}$$

上两式中 p 和 U 表示 p_{21} 和 U_1（斯达尔模式）或 p_{23} 和 U_3(诺波夫模式)。只要把上述两种模式的解答中的 τ 换成这里的 $\Delta\tau$ 就可以得到这种情形下的解答。

就浅源大地震而言，其上部边界为地表面所限制，下部边界因为摩擦应力随深度增加也受到限制，所以以长度和宽度不一样的断层面（例如上述矩形断层面或椭圆形断层面）模拟它是合适的。和浅源地震的情况不同，对中、小地震来说，上述两种限制不那么显著，以相等尺度的位错面(例如圆盘形或正方形的断层面)模拟它则更合适些。如果以 $x_2=0$ 平面上半径为 a 的圆盘上的切应力从 $p_{21}=\tau$ 松弛为零作为断层模式，可以求得沿 x_1 方向的位移：

$$U(x_1)=\frac{4\tau a}{\pi\mu}\frac{(\lambda+2\mu)}{(3\lambda+4\mu)}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ 0\leqslant x_1\leqslant a。\tag{11.87}$$

最大错距 U_m 发生于圆心处，在 $\lambda=\mu$ 情形下，

$$U_m=\frac{24}{7\pi}\frac{\tau a}{\mu}。\tag{11.88}$$

不难求出，平均错距

$$\bar{U}=\frac{2}{3}U_m。\tag{11.89}$$

应力降（若 $\lambda=\mu$ 时）

$$\Delta\tau=\tau-0=\frac{7\pi}{24}\frac{U_m\mu}{a}=\frac{7\pi}{16}\frac{\bar{U}\mu}{a}。\tag{11.90}$$

对于切应力从 $p_{21}=\tau$ 松弛到 τ' 的情形，只要将以上各式中的 τ 换成 $\Delta\tau=\tau-\tau'$，就可得到相应的结果，我们可以把断层面上的应力降的一般表示写成：

$$\Delta\tau=c\frac{\bar{U}\mu}{S^{1/2}}。\tag{11.91}$$

式中，c 是和断层面的几何形状有关的无量纲因子，叫几何因子，S 是断层面面积。自然，$S^{\frac{1}{2}}$ 是断层面的线性尺度。

由地震矩的定义[(11.38)式]和上式可得：

$$M_0=c'\Delta\tau S^{\frac{3}{2}}。\tag{11.92}$$

c' 也是一个几何因子，$c'=1/c$。

如果以 E 表示地震时释放的能量，那么

$$E=\bar{\tau}\bar{U}S,\tag{11.93}$$

$\bar{\tau}$ 是震前应力 τ 和震后应力 τ' 的平均值（平均应力）：

$$\bar{\tau}=\frac{\tau+\tau'}{2}。\tag{11.94}$$

错距（最大错距 U_m 和平均错距 $\bar{U}$），应力降 $\Delta\tau$，地震矩 M_0 都是表示断层形成前后震源处状态变化的参数，它们不涉及破裂过程和断层面两盘滑动的过程的具体情况，所以我们把它们叫做震源的静力学参数。

4. 动力学参数

设地震效率为 η，则地震波能量

$$E_s=\eta E=\eta\bar{\tau}\bar{U}S,\tag{11.95}$$

利用地震矩的定义[(11.38)式]可以从上式导出：

$$\eta\bar{\tau}=\frac{\mu E_s}{M_0}。\tag{11.96}$$

$\eta\bar{\tau}$ 叫视应力，它和震源辐射的地震波能量有关，也就是和断层面上的应力变化速度、地震过程中断裂是如何发生的、断层面两盘如何滑动的等因素有关。因此，视应力是一个和震源动力学过程有关的量，是一个动力学参数。

四、震源物理

（一）地震前兆

1. 地震预报

地震预报指的是预告在什么地方、什么时候要发生多大的地震，即预告地震的“时、

空、强”三要素。这是一种“气象学”意义上的地震预报。

根据板块构造学说，历史地震的统计分析以及地震地质的研究，可以划分地震危险区，指出在什么地方可能会发生多大的地震。这也是一种地震预报，然而这种预报没有完整地给出“时、空、强”三要素，所以它是一种“气候学”意义上的地震预报。

近十几年来，在许多地震之前都观测到了地震前兆，有些国家在不同程度上曾成功地预报过一些地震。如我国在 1975 年 2 月 4 日辽宁省海城 7.3 级地震前就曾做过长期和短期预报。这些情况表明，地震是有前兆的，不但可以预报地震，而且可以对它作出确定性的而不是概率性的预报。

2. 确定性的地震前兆

地震前兆是那些在地震之前发生的、标志导致地震的过程已经开始或正在进行的现象。迄今已观测到不少地震前兆，如地壳形变、地震波速度和速度比、地震活动性、地磁场和地电场、地下水、水中氡的含量、震源机制、重力和动物习性等。

(1) 地壳形变

日本地震学家今村明恒是地震预报的先驱者。许多年以前，他曾指出日本可能发生一次灾害性地震，后来确实发生了。他的根据是在所研究的灾害性地震发生之前海岸线的高度或海平面发生变化。以后在许多大地震前都曾观测到海平面变化等地壳形变。例如，在 1964 年日本新潟 7.5 级地震前，震中区的重复大地测量表明(图 11.32)，从 1898 年至 1955 年，地壳缓慢地、稳定地上升，但从 1955 年开始到 1959 年，震中区出现近 5 厘米的急剧隆起。从 1959 年至地震前变化很小，最后发生地震。新潟附近鼠关潮汐站观测到的平均海平面下降，证实地壳隆起是存在的。地壳前兆性隆起的幅度沿着离开震中的两个方向随距离逐渐减小，距离大于 100 公里时就观测不到什么变化。

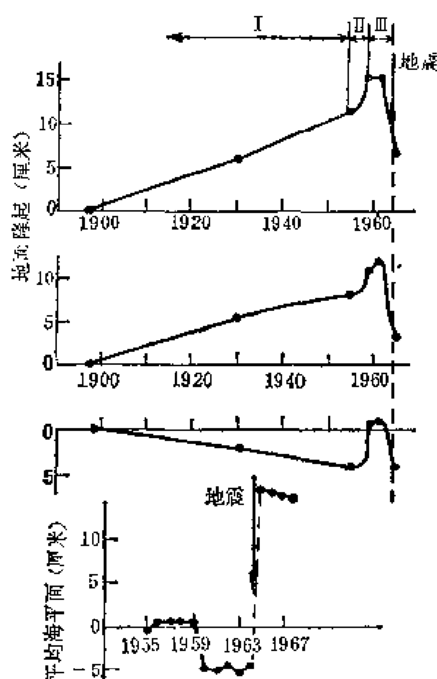


图 11.32 1964 年日本新潟 7.5 级地震前的地壳形变

1973 年 6 月 17 日日本北海道东部的根室近海的 7.4 级地震前也有类似的前兆。图 11.33 是这次地震前的海平面变化。图中所示的花咲(Hanasaki)验潮站至少从 1920 年(即震前 53 年开始就以 9 毫米/年的速率下沉。另一个验潮站[钏路(Kushiro)验潮站]的记录也证实了这点。根据北海道沿海阶地的高度随时间的变化可以推算出在地质年代里北海道东南部相对于其它地区的沉降速率是 0.4—0.6 毫米/年。这就是说，花咲和钏路在半个世纪来的下降速率比地质年代里的下降速率要高一个数量级。

在我国，震前的地壳形变也屡见不鲜。1966 年 3 月 22 日河北省邢台 7.2 级地震前，震中附近的第 449 号水准点从 1920 年以来以 5 毫米/年的速率下沉(图 11.34)，然后在一段

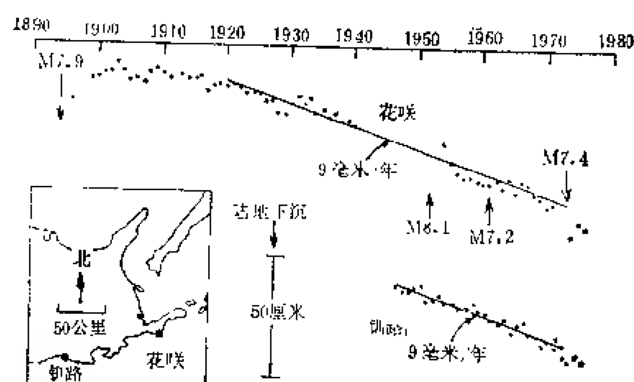


图 11.33　1973 年 6 月 17 日日本北海道东部的根室近海 7.4 级地震前海平面的变化

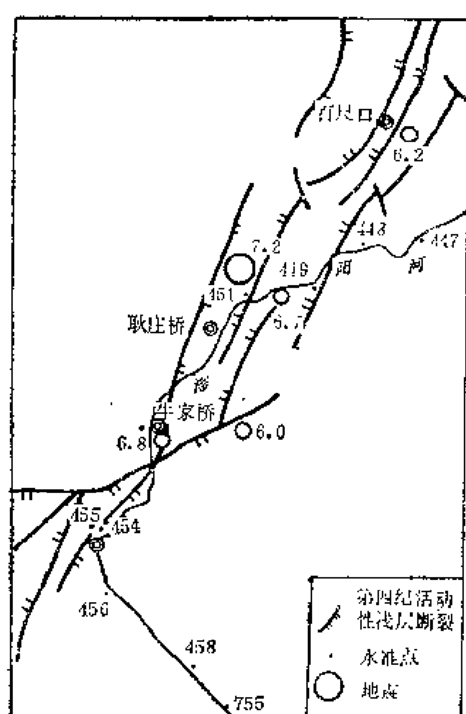


图 11.34　1966 年河北省邢台 7.2 级地震前的地壳形变

时间内呈现相对稳定状态，在 1966 年 3 月 8 日的 6.8 级地震前回升，在 3 月 22 日 7.2 级地震后继续下沉。

地震震级越大，和它有关的地形变面积越大。檀原毅（Dambara）1966 年得到了地震震级 M 和地壳形变区平均半径 r（以厘米为单位）的经验公式(图 11.35)：

$$\lg r^3 = 8.18 + 1.53M。\tag{11.97}$$

这个公式可以改写为：

$$M = 1.96\lg r + 4.45,\tag{11.98}$$

其中的 r 现在以公里为单位。这个公式和宇津德治（Utsu）得到的主震震级 M 和余震区面积 A（单位平方公里)的经验关系

$$M = \lg A + 3.7\tag{11.99}$$

相近。由(11.98)式可知，如果测得了水准异常变化的地区，那就可以估计未来地震的大致位置和震级。

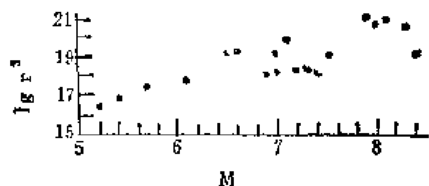


图 11.35　地壳形变区的平均半径 r（以厘米为单位）和震级的关系

尽管在日本、中国和苏联等国家的地震前都曾观测到地面形变的前兆异常，但许多地方在类似的地壳形变情形下并没有观测到地震。相反地，地震也发生在海岸线位置相对稳定的地方。这些情况表明，地壳形变是一种重要的地震前兆，但还不能把它当作预报地震的一种普遍的指标。

(2) 波速和波速比

从地震观测中即使没有独立地求出纵波速度 V_P 和横波速度 V_S，也可以求得波速比 V_P/V_S。如果以 t_P, t_S 分别表示 P 波和 S 波的走时，那么 t_S-t_P 和 t_P 的关系是一条直线，斜率

$$k=\frac{t_S-t_P}{t_P}。\tag{11.100}$$

平常把 t_S-t_P 和 t_P 的关系图叫和达（K. Wadati）图。若设 P 波和 S 波的传播路径一样，则

$$V_Pt_P=V_St_S,\tag{11.101}$$

从而

$$k=\frac{V_P}{V_S}-1\tag{11.102}$$

或

$$\frac{V_P}{V_S}=k+1。\tag{11.103}$$

所以，波速比可以由和达图求得。

一个时期以来，用波速或波速比预报地震的问题在国内外很引人注目，甚而有人乐观地认为地震预报已因找到了波速或波速比这个前兆而处于即将实现的阶段。

1950 年，日本地震学家早川正巳（Hayakawa）第一个发现地震前纵波和横波速度比有变化。可能是因为当时的测量精度不高的缘故，他的发现没有引起充分的注意。但这以后，苏联在其地震试验场开展了波速比预报地震的研究工作。1969年，涅尔谢索夫（Нерсесов）和赛蒙诺夫（Семенов）报道了他们在中亚细亚塔吉克共和国的加尔姆地区观测到中强地震前波速比有变化(图 11.36)。在每次地震前数周或数月，横波走时和纵波走时之比 $\xi=t_S/t_P=V_P/V_S$ 从较长时期(数年)所具有的稳定的正常值开始下降，然后逐渐增加，在临震前达到甚至超过其正常值，紧接着就发生一次地震。比值 ξ 减少的量与震级无关，但是 ξ 从什么时候开始下降是和震级有关的，震级越大越早出现波速比异常。

苏联地震学家在加尔姆的工作的公布引起了各国地震学家的广泛注意，在那以后，越来越多的例子证实了震前波速比确有异常。例如 1962 年 4 月 30 日日本东北部的宫城县北部的 6.5 级地震前，ξ 的异常持续了一年(图 11.37)。

在 1973 年 8 月 3 日纽约兰山湖 2.6 级地震前，阿加维尔（Aggarwal）发现 ξ 在 7 月 31 日至 8 月 2 日出现异常低值（$\xi=1.5$）。据此，阿加维尔在 8 月 1 日作出了兰山湖地区几天内将有一次 2.5—3.0 级地震的预报，取得了成功(图 11.38)。

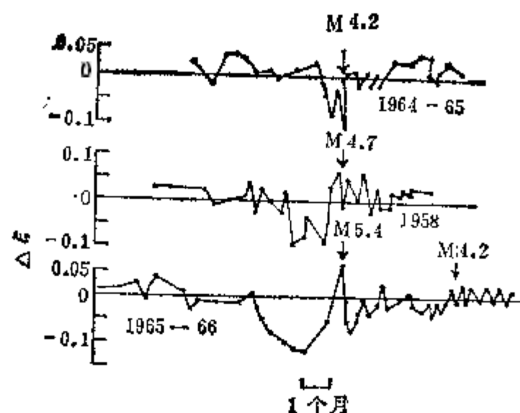


图 11.36　苏联加尔姆地区波速比的变化



图 11.37　1962 年 4 月 30 日日本东北部宫城县北部 6.5 级地震前的波速异常

在我国许多地震前，如西吉、通海、昭通、海城、龙陵、盐源-宁蒗和松潘-平武等地震前，也有波速比异常。图 11.39 是冯德益等得到的 1970 年 12 月 3 日宁夏西吉 5.7 级地震前后波速比的变化。地震前，波速比从 1.73 降低到 1.63，持续了 10 个半月。

图 11.40 是 1976 年 11 月 7 日川滇交界的盐源-宁蒗 6.7 级地震之前的波速比变化。在震前的 1966—1968 年，总的说来波速比是正常的。从 1969—1971 年，盐源-宁蒗地区的西部开始出现低值，东部仍保持正常，所以在这段时间内整个区域的波速比曲线表现出既有异常低值、又有正常值。从 1972 年到 1975 年 8 月，全区的波速比都低于正常值。1975 年底，波速比开始回升。根据 1975 年 7 月 20 日以前的波速比资料，董颂声等曾于 1975 年 11 月 26 日预测了这个地震的地点(盐源 宁蒗地区)和震级(5.7—6.8 级)，并取得较好的实际效果。类似地松潘-平武地震前的波速异常也是在地震前得到的，并成为这次

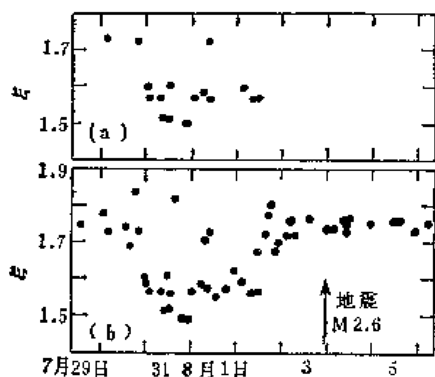


图 11.38　1973 年 8 月 3 日美国纽约州兰山湖地区 2.6 级地震发生前后的波速比随时间的变化

(a) 震前作出的；(b) 震后总结的。

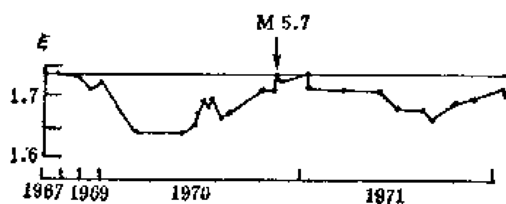


图 11.39　1970 年 12 月 3 日宁夏西吉 5.7 级地震前后的波速比变化

地震成功预报的重要依据。

震前的波速异常已经不是一时一地的特殊例子，而是一种相当普遍的前兆现象。现在，观测到的正面例子有几十个，地理范围很广，包括北美、阿拉斯加、阿留申群岛、堪察加、中亚细亚、伊朗、日本、新西兰和中国。但是也有没观测到震前波速比异常的实例，如

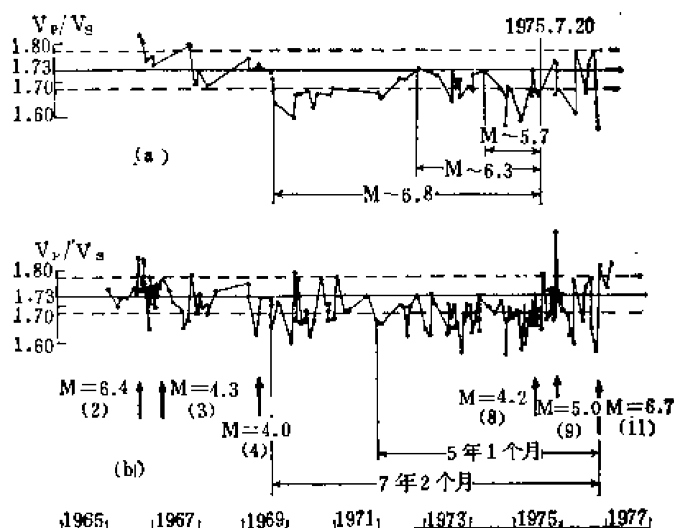


图 11.40　1976 年 11 月 7 日盐源-宁蒗 6.7 级地震前的波速比变化

1966年 6 月28日美国帕克菲尔德(Parkfield)6.4 级地震,1968年 5 月16日日本十胜近海 7.9 级地震，1973 年 3 月 27 日南非约翰内斯堡 $3\frac{3}{4}$ 级地震，都没有观测到震前波速比的异常变化。这种反面的例子至少已有 16 个。有些地震，不同作者得到的结论也不尽相同；即使是正面的例子,有些也是需要重新审查的。

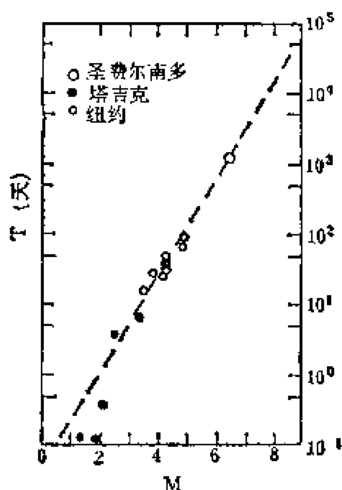


图 11.41　波速比前兆异常时间 T 和震级 M 的关系

在震前有波速比异常的地震中，前兆异常时间 T 和震级 M 的关系是(图 11.41):

$$\lg T = 0.68M - 1.31。 \tag{11.104}$$

根据波速异常的范围可以预告地点，利用震源尺度和震级的关系可以预告震级，而利用上式可以预告发震时间。所以波速比是一种自身就提供了未来地震的"时、空、强"三要素的讯息的前兆。

(3) 地震活动性

越来越多的例子说明,在大地震发生前,在一定范围内的地震活动具有一定的特征。识别这种地震活动图型的特征对于地震预报很有益处。

地震活动图型

图 11.42 是一个例子,说明在 1976 年 2 月22 日阿留申群岛中部一个 5 级地震前地震活动性的变化，左上图表示这个地震(叉号)之前一般地震活动水平;右上图表示在 4 个半月(1975 年 10月 5 日至1976 年 1 月 16 日)间,在 50 公里宽的范围内地震活动性出奇地低;左下图表示在震前五个星期,在震源体积内发生了 6 次小震,这些小震朝着未来主震的方向趋近,呈线状排列，排列方向大体上与主震的滑动方向一致;右下图表示主震后地震活动又恢复到原有水平。

地震填空性

地震填空性常用来预报地震。在千岛群岛—日本南海道近海，大约每隔 100 年左右就要发生一次 8 级左右的大震。在五十年代和六十年代，在图 11.43 所示的 A，B，D，E，

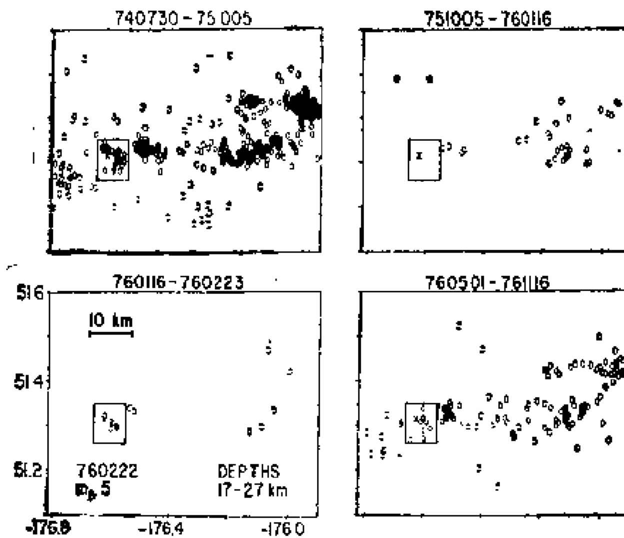


图 11.42　1976 年 2 月 22 日阿留申群岛中部 5 级地震前后地震活动性的变化

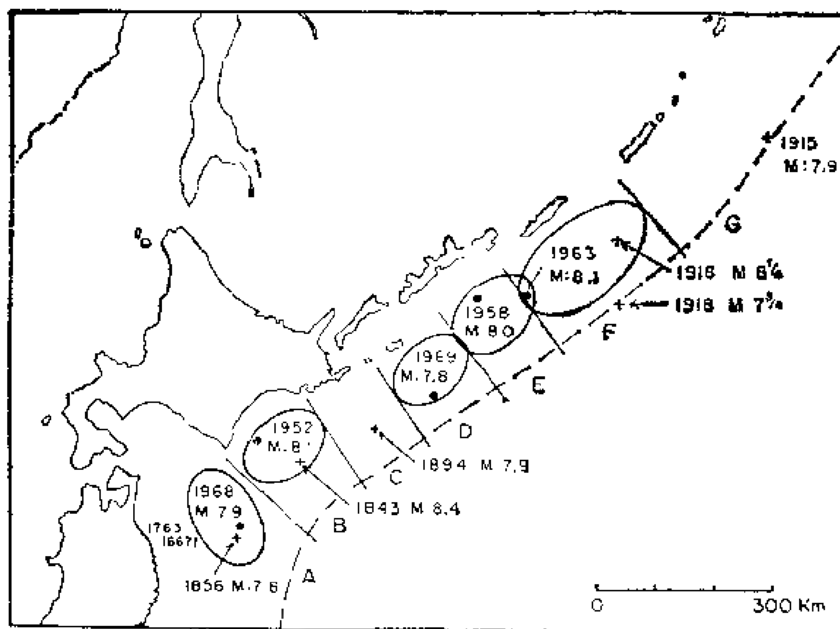


图 11.43　沿千岛群岛-北海道发生的五个近期的大震（$M \geqslant 7.8$）的余震区和历史地震的震中

F 区已经发生了 8 级左右大震，而 *C* 区自 1894 年 7.9 级大震以来一直没有发生过大震。这是一个地震空白区。据此，宇津德治（Utsu）于 1972 年预报这个区域里要发生一个 8—$8\frac{1}{4}$ 级大震。后来，在 1973 年 6 月 17 日，在南海道东面近海发生了一次 7.4 级地震。不过，上述地震空白区的范围是震后一天内的余震区的两倍，而且震级比预期的小些。这就引出一个问题，就是：在这个地区是否会再发生一个大震？根据对 1952 年 3 月 4 日十胜近海 8.1 级地震的余震重新定位的结果，现已比较肯定地知道：1973 年 7.4 级地震的余震已完全填补了上述地震空白区。

前震

无论是在时间分布上还是空间分布上，前震的定义都是很含糊的。大多数地震学家说到前震时都是指主震前在它附近发生的地震；或者更严格点说，指主震前在后来的余震区中发生的地震。

地震的数目N的对数和震级M有如下关系：

$$\lg N = a - bM, \tag{11.105}$$

斜率b表示了大小地震的比例关系，通常把它叫做b值。现已知道，前震的b值一般比余震的低。例如，在希腊地区，前震的b值为0.67，而余震的b值为0.92。最大前震的震级M_{-1}和主震震级M_0的差值不受M_0影响，其平均值是1.9，即(图11.44)：

$$M_0 - M_{-1} = 1.9。 \tag{11.106}$$

前震的时间分布规律和余震的相同，即最大前震的频度n和主震与最大前震的时间差t有如下关系(图11.45)：

$$n = n_1 t^{-h}, \tag{11.107}$$

其中，n_1和h是常数。

有前震的地震只约占20%。在有前震的情况下，b值的下降可供鉴别前震或一般地震；而前震的时间分布及其震级和主震震级的关系可以用来预报主震的发震时间和震级。

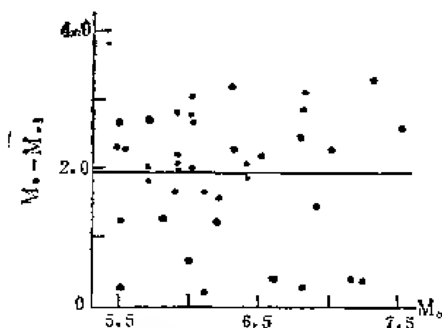


图11.44　主震震级M_0和最大前震震级M_{-1}的差值M_0-M_{-1}与M_0的关系

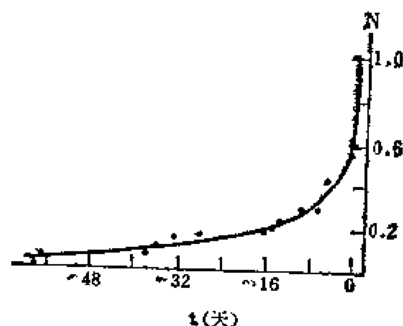


图11.45　主震和最大前震的时间差的累积分布

广义前震·前兆震群：

在许多情形下，地震活动性的前兆性变化出现在距离主震震中好几百公里的更广范围内。通常把这种地震叫广义前震。有许多例子说明，大地震的发生和在它之前的震群活动有关。例如，在1966年3月4日M_L为6.2的新西兰吉思博恩(Gisbon)地震(图11.46)，1966年4月23日M_L6.0级的塞顿地震，1968年5月23日M_L7.1级伊南加华(Inan gahua)地震，1973年2月21日M_L5.7级黑斯延斯地震前都有以前兆性震群的形式出现的广义前震活动。这四个地震都经历了以下四个阶段(图11.47)。

第一阶段——正常的地震活动阶段。

第二阶段——前兆震群阶段。在一段时间里，在即将发生大地震的地方附近突然出现地震活动。

第三阶段——前兆性的地震空白区。在前兆震群后，紧接着在包括震群和大震的区域内出现一段长时间的平静。

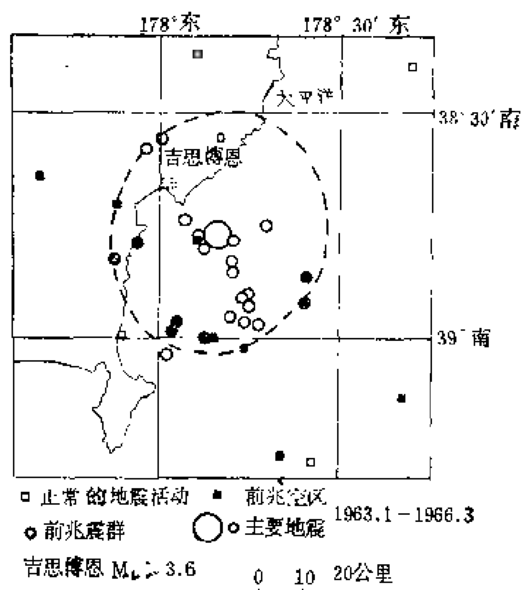


图 11.46　1966 年 3 月 4 日新西兰吉思博恩 M_L6.2 级地震的震中分布图

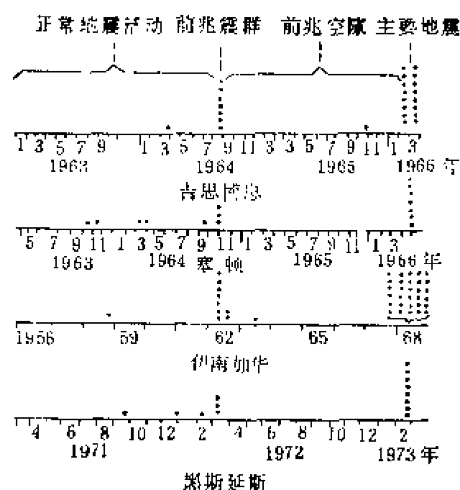


图 11.47　与吉思博恩、塞顿、伊南加华和黑斯延斯地震有关的地震序列

第四阶段——大地震。平静期以大地震的发生而告终。这里“大地震”指的是主震及与其紧挨着的前震和余震。

从前兆震群开始到大地震发生的时间间隔叫前兆时间，它和主震震级的关系服从力武常次（T. Rikitake）从其它十一种类型的前兆总结得到的关系：

$$\lg T = 0.76M - 1.83。\qquad (11.108)$$

式中，T 以天为单位。对于 $M = 5, 6$ 和 7 级地震，T 分别为 3 个月，1.5 年和 8.5 年。震群中最大地震的震级 M_P 随主震震级 M_m 而增大：

$$M_m = M_P + (1.7 \pm 0.15)。\qquad (11.109)$$

前兆震群中最大地震的震级 M_P 和次大地震的震级 M_{P-1} 有如下简单关系：

$$M_P - M_{P-1} = (0.15 \pm 0.15),\qquad (11.110)$$

而 M_m 和主要地震中的第二个最大地震的震级 M_{m-1} 有如下关系：

$$M_m - M_{m-1} = (1.1 \pm 0.5)。\qquad (11.111)$$

由方程(11.110)可以辨别前兆震群。震群的位置表明了未来主震的大致位置。由方程 (11.109) 可以估计主震震级，由(11.108)可以估计前兆时间，因而估计出未来主震的发震的发震时间。这样，前兆地震序列提供了一种可以估计发震时间、地点和震级三要素的长期预报方法。

微震活动性

强震前，微震活动性有变化。图 11.48 表示苏联加尔姆地区的北区（用 I 表示）中区 (II)、南区 (III) 的地震密度的长期变化。地震密度是每年每平方公里内的地震数。图中的粗线是三年的滑动平均。由图可见，在能级 $K = 14$(相当于 $M = 6.1$) 的地震前，II 区的背景地震活动性在 1955—1959 年间降低，而在此后的七、八年间逐渐升高，然后发生 6.1 级地震。

更仔细考察图 11.48 后可以看到，在临强震前，地震活动性降低。例如在 1969 年 6.1 级地震前 1.5 年，地震活动性降低。这是一种中短期的异常。

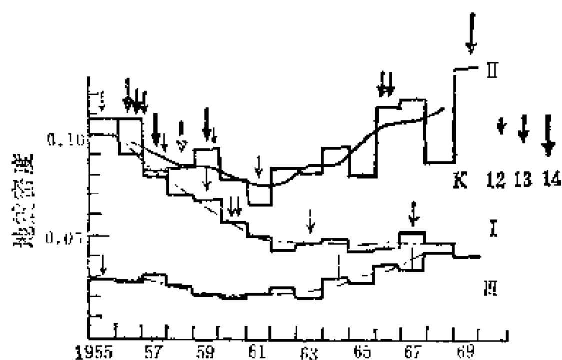


图 11.48　苏联加尔姆地区的三个分区地震密度的长期变化



图 11.49　伴随 1946 年 12 月 21 日南海道 8.1 级大地震的地磁变化

(4) 磁场和电场

在苏联、日本、美国、加拿大和我国，都在研究震前的地磁异常。1946 年 12 月 21 日，在日本西南部南海道发生了 8.1 级大地震。这次地震在震中区有明显的地面形变和相当大的地磁场局部异常变化。图 11.49 是串本附近纪伊半岛的和歌山县胜浦台观测到的伴随这次大震的磁偏角变化。磁偏角向东偏了约 4′，相当于磁场强度变化了约 40 伽玛。分析表明，这个变化是由于地震时断层面的滑动而造成的地壳内应力的松弛所引起的，叫做同震地磁变化。与同震地磁变化方向相反的地磁变化发生于地震前一段长时间内。根据目前的构造磁性的研究可以推算，积累的地磁场可能变化的大小在几十年至一百年间会达到几十伽玛的数量级，这就要求连续测量地磁场强度的精度应当达到 0.5 伽玛。

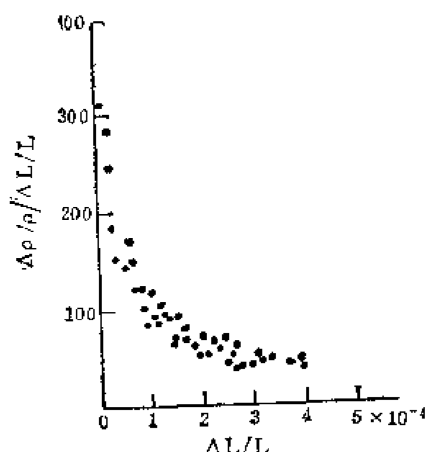


图 11.50　火山砾岩的 $\Delta\rho/\rho/\Delta L/L$ 随 $\Delta L/L$ 的变化

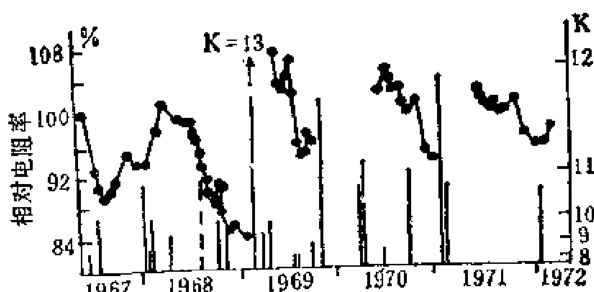


图 11.51　加尔姆地区一些中等大小地震前视电阻率的变化

地电阻率对应变的反应很灵敏，特别是在低应变值时。以 $\Delta L/L$ 表示单轴压缩应变，$\Delta\rho/\rho$ 表示电阻率的相对变化，则从火山砾岩的 $S = \frac{\Delta\rho}{\rho}\Big/\frac{\Delta L}{L}$ 随 $\Delta L/L$ 的变化图(图 11.50)可以看到，当应变低到 10^{-5}—10^{-6} 时 S 可达 10^2—10^3。由此可见，地电阻率可以很好地反映地下的应变变化。因为这个道理，在许多地震前都曾观测到电阻率异常。

图 11.51 是苏联加尔姆地区一些中等大小的地震前视电阻率的变化。通常，视电阻率在震前下降 10—15%。地震越大，前兆时间越长。

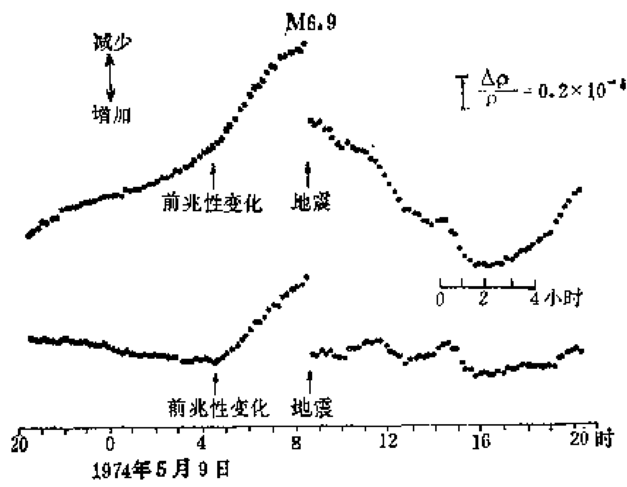


图 11.52 1974 年 5 月 9 日日本伊豆 6.9 级地震前后电阻率的"阶跃"和震前 4 小时的前兆性变化

上半部的曲线是原始记录;下半部曲线是经过滤波的记录

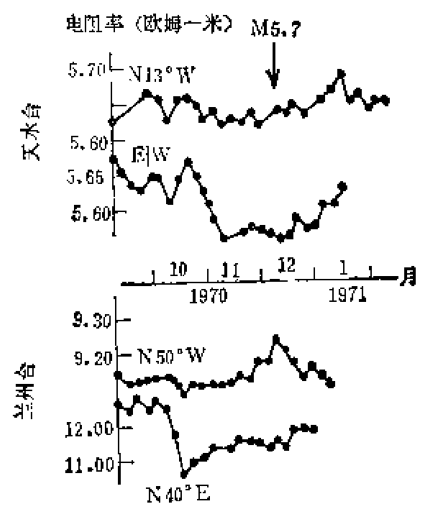


图 11.53 1970 年 12 月 3 日宁夏西吉地震前电阻率的变化

1974 年 5 月 9 日日本伊豆 6.9 级地震时，地电阻率有一个"阶跃"(图 11.52)；在地震之前出现了 4 个小时的前兆性变化(下降)。

在 1970 年 12 月 3 日宁夏西吉地震前，在震中南面约 140 公里的天水台记录到电阻率下降 14%。异常持续了 80 多天。震中西面约 150 公里的兰州台也有类似的变化，电阻率下降了 16%，异常时间约 60 天(图 11.53)。

这些例子说明，地电阻率不但有长期异常，而且有短期异常，它可以成为一种短期前兆手段。

(5) 水氡

1966 年 4 月 26 日苏联塔什干 5.3 级地震以前，在塔什干盆地的深井的矿泉水中的水氡(氡是一种放射性气体，半衰期很短，只有 3.825 天)的含量在 1961 年至 1965 年间由 5 埃曼增加到 15 埃曼(1 埃曼 = 1 居里/升)。在主震前半年一直保持高值。主震后迅速减少(图 11.54a)。在余震前也有类似情况(图 11.54b)。在我国、美国和日本，后来也发现了

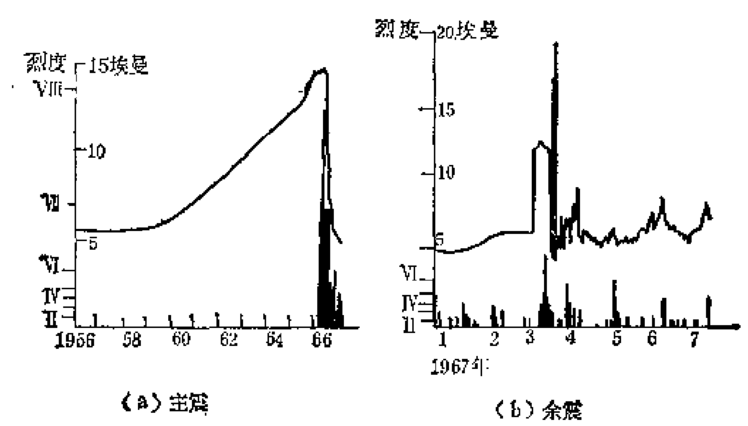


图 11.54 1966 年 4 月 26 日苏联塔什干 5.3 级地震及其余震前的水氡变化

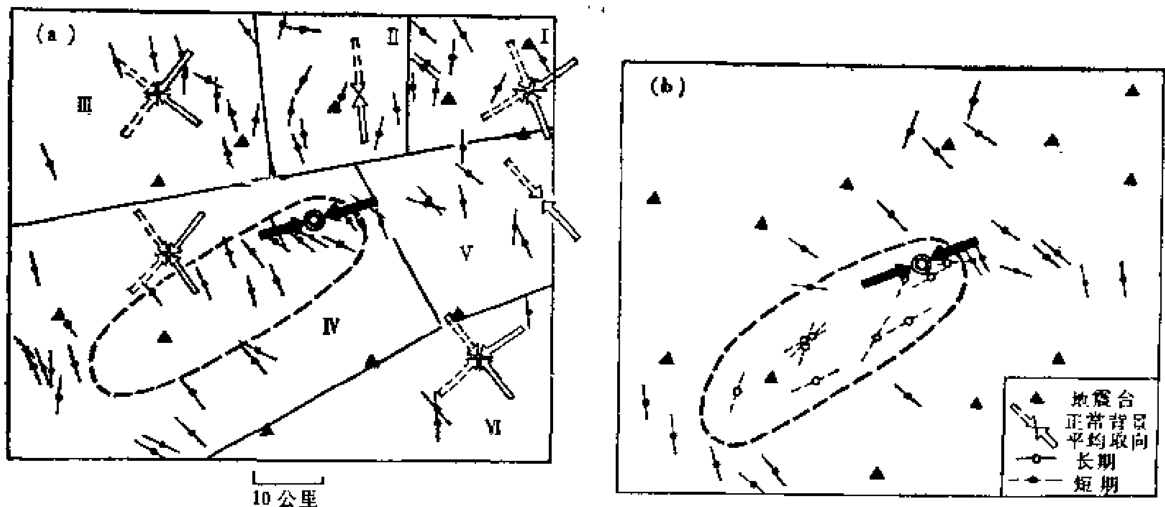


图 11.55　加尔姆地区小震主压应力轴随时间的变化

类似的例子。

(6) 微震应力轴的取向

苏联在塔什干加尔姆地区发现,在 1966 年 4 月 14 日 5.4 级地震前,由微震的断层面解得到的释放的应力的最大主压应力轴 (P 轴)的方向发生旋转 (图 11.55)。图 11.55 中的虚线所围区域内的微震,其 P 轴方向在 1965 年初以前没有固定方向。但如图 11.55a 所示,在 1965 年 7 月至 12 月, P 轴取向趋于南东东或南东向;而从 1966 年 1 月开始,突然转到北东东方向; 4 月 14 日发生了地震后, P 轴有优势取向的现象消失。

在日本 1969 年 8 月 18 日和知 (Wachi) 5.6 级地震前,小地震的主应力轴的取向也呈现定向排列。地震后则无规则地取向(图 11.56)。

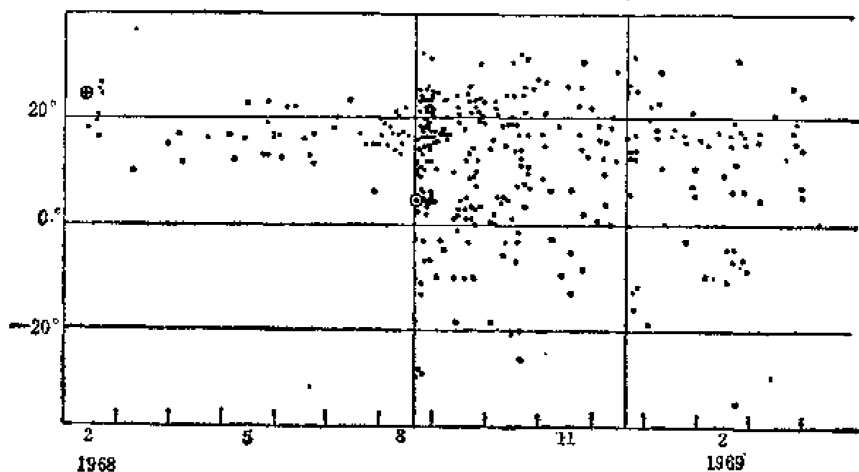


图 11.56　1969 年 8 月 18 日日本和知 5.6 级地震前后小震最大主应力轴随时间的变化

(7) 重力

在一些地震前都曾观测到重力的变化,如 1964 年 3 月 2 日美国阿拉斯加地震、1965—1966 年间的松代震群、1968 年 5 月 24 日新西兰因南加华地震。图 11.57 是松代

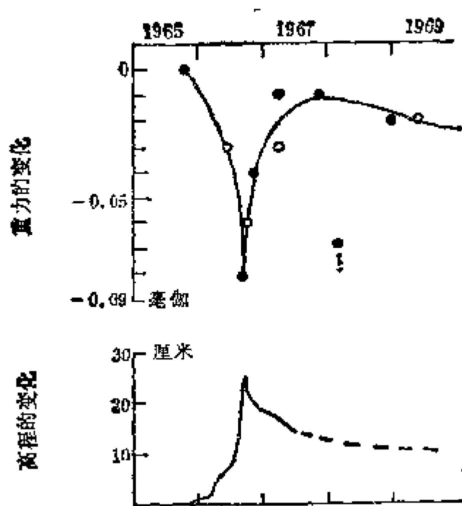


图 11.57　日本松代震群活动期间重力和高程随时间的变化

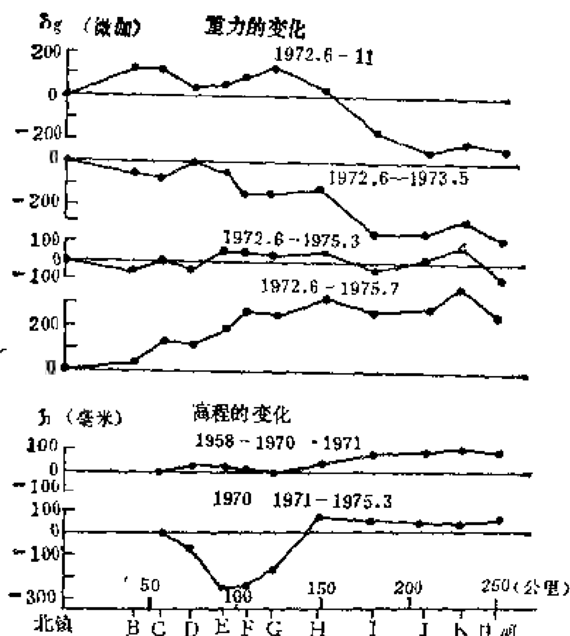


图 11.58　1975 年 2 月 5 日辽宁海城 7.3 级地震前后的重力变化和高程变化

地震群活动期间重力变化和高程变化图。我们看到，在 1965 年到 1966 年年底的一年间，重力显著下降，而后很快地增加，最后逐渐恢复到正常水平。

在我国，1975 年 2 月 5 日辽宁海城 7.3 级地震前后和 1976 年 7 月 28 日河北唐山 7.8 级地震前后也都曾观测到重力的变化。在海城地震前的 1972 年 11 月，重力大幅度下降，最大达 264 微伽。到 1973 年 5 月，重力继续下降，最大达 352 微伽。震后，重力又恢复到 1972 年 6 月的水平，以后又继续上升，到 1975 年 7 月时达到＋382 微伽(图 11.58)。

(8) 其它

迄今观测到的地震前兆远不止上述几种。地面倾斜、地应变、地应力、P 波残差、SV 波和 SH 波的分离、P 波和 S 波的振幅比、地下水（水位、水温、水浑浊、变味等）、油井自喷，动物习性异常等等都是各国在积极开展的前兆观测手段，都有一些正面的例证。

(二) 震 源 物 理

1. 概　述

鉴于地震学家和业余地震工作者在世界各地一再观测到大量地震前兆，所以很容易想到，只要掌握一些可靠的前兆手段就可以有效地预报地震。实际上，不少例子表明，尽管许多前兆可能是确定性的前兆，但它们和地震的简单对应关系迄今还没有找到过(如果不是说没有的话)。这使人们认识到，只有设法认识地震孕育和发生的物理过程才能实现地震预报。当前，国际地震学界一般认为，虽然不知道地震的物理过程也可能做一些地震预报，但相信只有了解了震源的物理过程才能真正实现地震预报。基于这种思想，无论是美国、苏联，还是日本、中国以及其它国家，许多人都倾向于通过地震前兆的野外观测、实验室实验与实地可控试验以及理论研究等三个方面来探讨各种可能的地震发生机制，并

清楚震源过程，以达到地震预报。

人们对震源物理的研究是和地震学的诞生同时的。1910年雷德提出的关于地震直接成因的弹性回跳理论实际上就是一个把地震和地球介质内的破裂过程联系起来的理论。不过在这以后地震学的发展基本上是沿着研究地震波的传播和地球内部的结构与组成的路子进行的，对震源物理的研究比较少。原因是研究地壳和地球内部在学术上和国民经济上都具有重要意义，而对震源物理的研究也确实需要以地球介质和地震波传播规律的知识作为基础。

自从拜尔利(P. D Byerly)在本世纪二十年代末发现了节平面后，对震源物理的研究就逐渐展开，并且取得了很大的进展。在那以后的三十多年间，震源物理研究的主要特点是震源机制的研究和破裂物理的研究各不相扰。震源机制研究主要是从地震观测资料中去提取震源信息，而破裂物理主要是研究材料的强度以满足生产和军事部门对结构利用的需求。到了六十年代中期，在地震学研究成就(包括地震震源机制研究)和破裂物理(特别是破裂力学)成就的基础上，才开始了以探索地震预报为目标的地震孕育物理过程的研究，也就是现在说的震源物理的研究。在这个意义上来说，震源物理是地震学中一个只有十几年历史的新的分支。

2. 震源物理实验研究

六十年代以来，为了寻找地震预报的物理基础，许多国家的地震学家开始做实验模拟地震。当然，在实验室中能够处理的仅仅是大小很有限的岩石样品，所以将实验室中得到的结果应用于地壳中的实际现象时有一定的局限性，必须注意尺度效应。尽管如此，从实验中还是得到了许多很有用的结果，为地震预报理论提供了很好的物理基础。

地震是由突然的应力降产生的。所以自然要在实验室里研究在地壳内的温度和压力条件下岩石产生突然的应力降的机制。现已知道有两种情况可以产生突然的应力降，一种是完整岩石的脆性破裂，另一种是在已有的断层上的粘滑。这两种情况统称为破裂(rupture)。在实际断层上，这两种情况是密切联系在一起的，但为方便起见，常将它们分开研究。它们的区别仅在于在围压下脆性破裂开始时物质是完整的，而发生粘滑时物质中已有裂纹或其它间断面。

(1) 岩石破裂试验

微破裂和主破裂：

日本的茂木清夫(Mogi)是最早注意到在应力作用下脆性物质的微破裂对地震研究的重要意义的人。在六十年代初，他就做了岩石破裂试验，研究微破裂和主破裂的关系。他把加工成正四棱柱体的岩石样品抛光，然后加轴压直至破裂。当岩石样品的应变超过弹性限度进入塑性状态时就开始产生微破裂。所产生的微破裂引起了小震动。在金属学的类似研究中这种小震动叫声发射(acoustic emission，缩写为AE)。茂木用贴在样品上的传感器记录下了微破裂引起的小震动，结果发现，当应力速率恒定时，如果样品不均匀(如花岗岩)，则在主破裂前有许多微破裂发生；如果样品很均匀(如松香)，则在主破裂前没有微破裂发生；如果样品极不均匀(如泡沫岩)，则发生许多微破裂而不发生大的破裂。

茂木的实验为解释三种类型的地震(前震-主震-余震型，主震-余震型和震群型)提供了物理基础。

围压下的实验：

布雷斯（W. F. Brace）等把茂木的实验推广到相当于地壳处的围压条件下。他们得到，在几千巴的围压下，威斯利特花岗岩在应力达到破裂应力的 95% 时微破裂的数目显著地增加(图 11.59)。

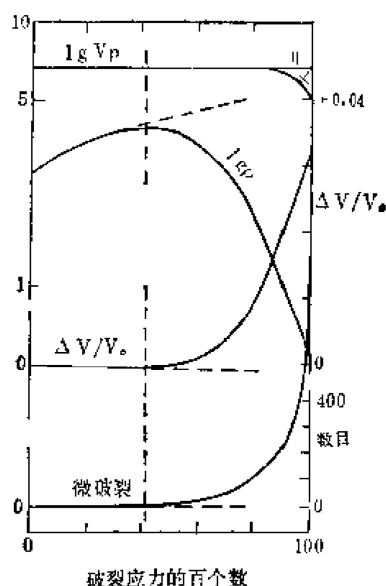


图 11.59 威斯特利花岗岩的物理性质在围压下随压应力的变化

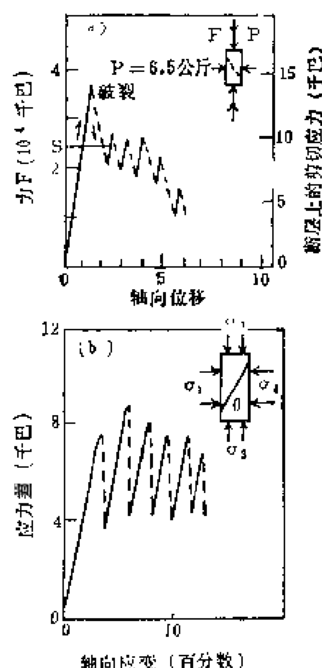


图 11.60 实验得到的力和位移的关系

a 原先未破裂的威斯特利花岗岩

b 有切割面的情形

图 11.60a 是花岗岩在 6.5 千巴围压下的力-位移曲线。破裂时，沿生成的断层发生几千巴的应力降。图 11.60b 是有切割面的情形。

拜尔利（J. D. Byerlee）发现（1967），在高围压下，已经破裂了的岩石也可以支持很高的应力。图 11.60b 是有锯口的花岗岩的运动情况。和完整岩石的脆性破裂不同，在运动过程中不断出现许多次的应力降，应力降的大小由数十巴到几千巴，视围压大小而定。这种运动叫粘滑。

围压对稳定性的影响

围压对滑动方式有重要影响。提高有效围压一般有利于粘滑，不利于稳滑。图 11.61 表示一种辉长岩在三种不同围岩下的应力-应变曲线，轴向应变达 20%。在这些压力下，断层失稳，伴随巨大的突然应力降，出现断层后断层面上的运动性质明显地依赖于围压。低围压时也发生粘滑，但应力降小，只有数千巴。

孔隙度对稳定性的影响

多孔性倾向于造成稳滑。低孔隙度的岩石，其破裂和滑动都是不稳定的；多孔性岩石只有在极高的压力和很大的应变时才观测到粘滑。图 11.62 表示致密的、压碎了的花岗岩砂在三轴应力实验中的情况。在低围压下形变是稳定的，没有明显的产生断层的趋势。

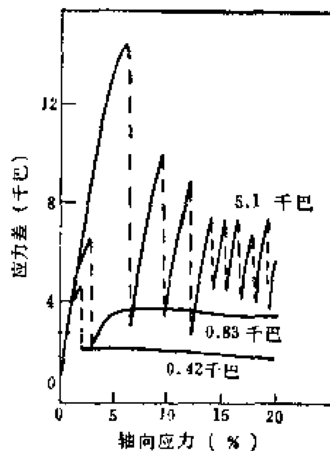


图 11.61　围压对稳定性的影响

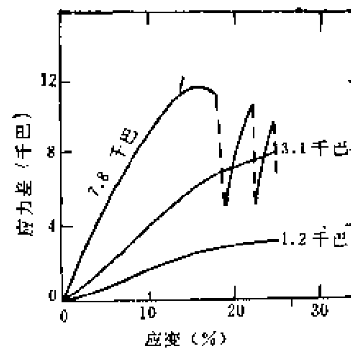


图 11.62　围压对压碎了的岩石稳定性的影响

但在接近 8 千巴、应变达 15% 后，开始出现断层作用和粘滑。

断层泥厚度对稳定性的影响

孔隙度通过断层泥的厚度也起作用。一般说来，断层泥厚有利于稳滑。实验中，一般是用颗粒直径范围很宽的磨碎了的岩石模拟断层泥。当观测锯开的缝的滑动时，要使粘滑发生的围压比在已有的断层中的滑动发生的围压要低；锯开的缝的断层泥厚度接近于零，在断层中，断层泥的厚度可以是很大的。图 11.62 所示的压碎了的花岗岩砂，可以看作是断层泥很厚的极端情况。这种花岗岩砂在一很大的围压范围内形变是稳定的，而在同一围压范围内，锯开的缝和断层是不稳定的。

矿物对稳定性的影响

图 11.63 是两种橄榄岩在各种围压下实验得到的应力-应变曲线，由此可以看出矿物对稳定性的影响。纯橄榄岩的破裂是不稳定的，在断层面上出现强烈的粘滑；而橄榄石颗粒界面上约有 3% 蛇纹石化的橄榄岩一直到应变为 20% 时还是稳定的，既不发生断层，也不发生粘滑。石灰岩、大理岩、蚀变辉长岩和多孔火山岩的性质和蛇纹石化的橄榄岩性质相似。

水对稳定性的影响

水在滑动现象中至少起两种作用。第一，水使有效围压降低。实验表明，在围压下，岩石破裂时的剪切应力(图 11.64)。

$$\tau = A + B\sigma_n。\tag{11.112}$$

式中，σ_n 是作用于破裂面的正应力，B 是摩擦系数，A 是围压为零发生破裂时的剪切应力即剪切应力强度。大多数岩石和模拟的断层泥，都遵从这个关系式，而这个公式与矿物成分、压力、温度(直到 600℃)、物性的关系都不大。$A = (0.6 \pm 0.1)$ 千巴，$B = 0.6 \pm 0.05$。这个公式表明，引起破裂的应力随着摩擦应力的增加而增加。

地壳中的岩石有许多孔隙。在许多情况下，孔隙中都充有水。在有孔隙流体时，胡伯特 (M. K. Hubbert) 和鲁贝 (W. W. Rubey) 1959 年指出，上式应修正为：

$$\tau = A + B(\sigma_n - P),\tag{11.113}$$

式中 P 是作用在破裂面上的孔隙压。若 $\sigma_n = P$，则剪切破裂强度就和正应力为零时一样。

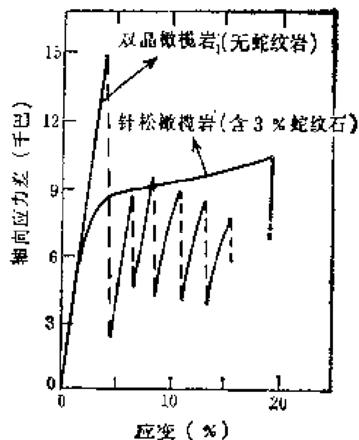


图 11.63 橄榄岩中蛇纹石含量对稳定性的影响

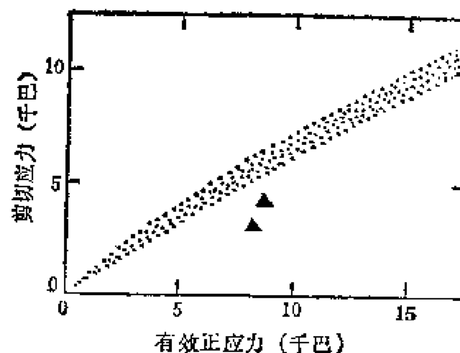


图 11.64 各种岩石和模拟的断层泥的摩擦强度

这个式子说明，在地壳深部和上地幔，如果孔隙压足够高的话也可能发生脆性破裂。

第二，水和岩石中的硅酸盐矿物发生化学反应，使像石英、长石等强矿物弱化，改变了摩擦特点，趋向稳定滑动。

温度对稳定性的影响

温度有使脆性破裂和粘滑趋于稳定滑动的趋势。图 10.65 表示了温度对辉长岩中断裂的影响。辉长岩在 140℃ 时发生粘滑，400℃ 时变成稳滑，195℃ 时是过渡状态。花岗岩、石英岩、斜长岩和纯橄榄岩都有类似现象，只是转变的温度不同。图 11.66 是花岗岩和辉长岩中稳定和不稳定滑动的界限。一直到 700℃ 和 6 千巴，粘滑一般发生在高压-低温时，而稳滑发生于高温-低压时。

总之，有效围压低、孔隙度高、弱矿物、断层泥厚、温度高都有利于稳定滑动。

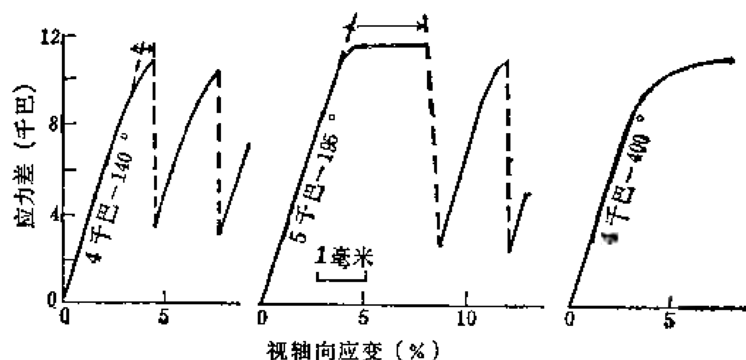


图 11.65 辉长岩中破裂面的滑动

(2) 地震前兆的实验研究

从实验的角度研究地震前兆也就是要研究破裂之前的岩石的物理性质。目前主要集中研究膨胀、波速、电阻率、前兆性蠕动等性质。

膨胀：

岩石在高剪切应力作用下发生形变时，其体积发生非常可观的非弹性变化，相对于弹性变化来说，体积增大，临破裂前体积变化率达 3% 左右，这种变化叫膨胀。膨胀是由于

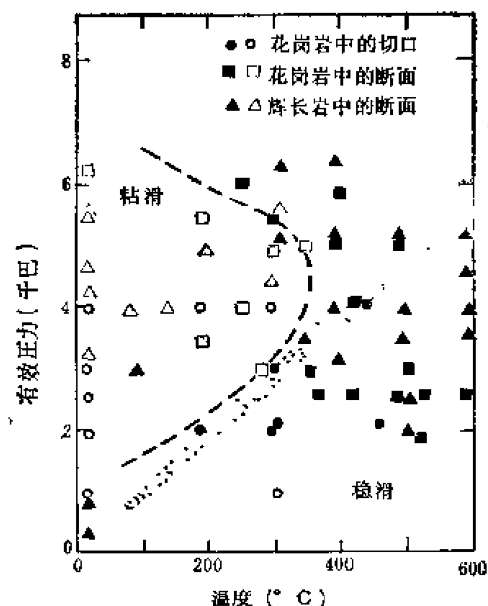


图 11.66 花岗岩和辉长岩的粘滑至稳滑的过渡

空心符号表示粘滑；实心，稳滑；半实心，过渡情形。细点表示中加州的地热梯度。

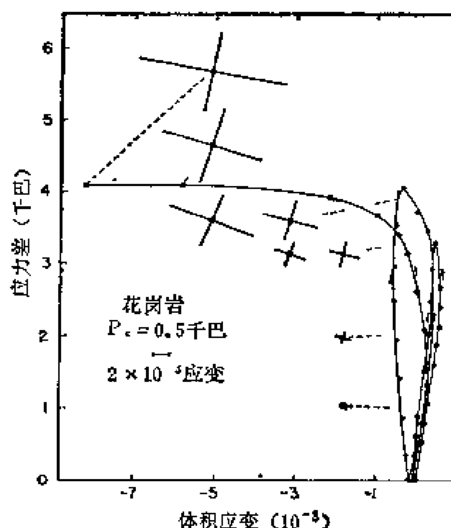


图 11.67 在 500 巴围压下花岗岩膨胀时径向应变的变化

在平行于最大主压应力轴的方向上新出现了裂缝以及裂缝在最小主压应力方向上张开。通常，膨胀发生于应力等于破裂时的应力的一半左右。

关于膨胀做了许多实验。例如研究了膨胀和循环加载的关系。如：花岗岩或辉长岩在经历了 30 次循环加载后，在应力达到破裂应力的 60—90% 时还有膨胀（图 11.67）。在围压为 500 巴时，发生膨胀的应力随应力循环的次数而减小。

波速变化

在单轴应力下，当压力不太大时，在平行和垂直于最大主压应力方向上的 P 波速度都增大，这是因为岩石样品中孔隙或裂缝闭合所致。在 1 千巴以上的围压下，当压应力增加时，在最大主压应力的方向上波速不变或只减少百分之几。当负载大约为破裂时的应力的一半时，在垂直于最大主压应力方向上波速显著减小。

在三轴应力下得到的结果与单轴情形得到的类似。当样品趋近破裂时，V_s 的变化比 V_p 小得多。在最小主压应力方向上，V_p/V_s 减小很厉害，达 10—20%；在中间主压应力方向上变化只有百分之几；在最大主压应力方向上没有什么变化。

电阻率的变化

布雷斯和奥棱季（Orange）在 1966 年和 1968 年曾经测量了水饱合的岩石中的电阻率。在低压时，电阻率随压力增大而增加。这是因为孔隙在压缩下闭合的缘故。当压应力超过某个值时，电阻率显著减小（图 11.59）。这可能是因为发生了膨胀，出现了与新产生的微裂隙有关的感应路径所引起的。

前兆性蠕动

在许多试验中都观测到前兆性的蠕动。概括地说，前兆性蠕动发生于很高的应力水平，即发生粘滑的应力的 90% 时（图 11.66）。平均地说，蠕动时应力不下降。蠕动量（剪

切位移)变化很大,从小于 10 微米到大于 1 毫米都观测到过。

3. 震源物理理论

在野外观测和实验室研究的基础上，许多人提出了地震发生的理论模式。1971 年，苏联大地物理研究所提出了“膨胀-失稳模式”以解释观测到的地震前兆。这个模式也叫做 IPE (Institute of Physics of the Earth) 模式。1972 年,美国的努尔 (A. Nur) 提出、肖尔茨 (C. Scholz)、惠特柯姆 (J. H. Whitcomb)、赛克斯 (L. R. Sykes) 和阿加维尔 (Y. P. Aggarwal) 推广了另一个模式,叫“膨胀-扩散模式”,简称 DD (Dilatancy-Diffusion) 模式。后者是许多美国地震学家支持的模式。在美国,还有布雷迪 (Brady) 提出的“包体模式”,斯图尔特 (W. D. Stuart) 提出的模式;在日本，还有茂木提出的模式。布雷迪等人的模式在许多方面与 IPE 模式很类似,以下只简单介绍 IPE 模式和 DD 模式。

(1) 膨胀-扩散模式

膨胀-扩散模式认为,地震前,在断层附近,当岩石中的应力达到其极限强度 1/2—2/3 左右时那些与最大主压应力轴平行的裂纹就开始张开,从而造成了体积非弹性地增加,这就是膨胀 (dilatancy)。膨胀是土力学中早在三十年前就已熟知的现象,但在 1949 年布雷季曼 (P. W. Bridgman) 才第一个注意到岩石也有此种现象。不过，土壤中的膨胀与颗粒间的空隙的形状有关,而岩石的膨胀则是与晶粒间及切穿晶粒的新裂纹的张开有关。按照 DD 模式,地震孕育和发生过程有如下四个阶段(图 11.68)。

第 I 阶段

构造应力逐渐增加，但岩石中的旧裂纹还没有张开,新裂纹也还没有形成。

第 II 阶段(岩石膨胀阶段)

在断层附近，当岩石中的应力达到其极限强度的 1/2—2/3 时,就发生膨胀，岩石中的旧裂纹张开、新裂纹形成。岩石体积的增加使得其中的孔隙压力减小。由于孔隙压力减小,岩石的破裂强度增高[参见(11.114)式],这种现象叫“膨胀-硬化”。膨胀硬化推迟了地震的发生，这种情况一直持续到有足够的水流入这一区域并使压力恢复到原先的数值为止。在这个阶段,若岩石膨胀足够快,以致岩石来不及被水所饱和,则其弹性模量将大大减小,从而纵波速度 V_p 将急剧下降。横波速度 V_s 相对说来受影响较小,因而 V_p/V_s 也将和 V_p 类似地急剧下降。

第 III 阶段[液体流动(扩散)阶段]

邻近区域的水逐渐流入膨胀区域，扩散到裂纹中，使孔隙压增加、岩石的破裂强度下降;与此同时,构造应力继续增加。

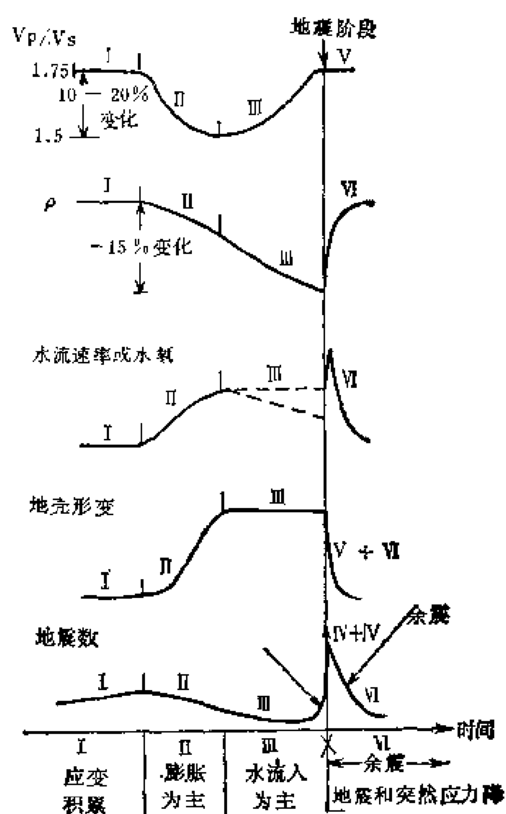


图 11.68 膨胀-扩散模式

第 IV 阶段(主震阶段)

当应力达到了剪切破裂强度时,便发生地震,断层面上的应力突然释放。

第 V 阶段(震后调整阶段)

主震导致应力场重新分布,并使处于震源机制解的压缩区中的水逐渐扩散入膨胀区,结果,膨胀区的孔隙压逐渐增高、剪切破裂强度逐渐下降,从而发生余震。

按照 DD 模式,波速比应当如图 11.68 所示地变化。在膨胀期间,由于体积增大,可使地面高程变化达数厘米。岩石的电阻率主要和岩石含水量有关,因此,在扩散阶段,电阻率应当会大幅度地下降。此外,裂纹增加了岩石与水的接触面积,致使较多的放射性物质流入孔隙中,从而水中便会含有较多的氡等放射性气体。膨胀硬化使得破裂更不容易发生,所以在地震之前地震活动性减弱,地震活动经历了"活跃—平静—前震—主震"的过程。

(2) 膨胀-失稳模式

膨胀-失稳模式是在断裂力学和岩石力学实验的基础上发展起来的。它也认为在地震之前岩石要经历膨胀,但它认为地震并不一定要沿已有的断层发生。这个模式的要点是:

①统计上均匀的物质,在长期荷载下,由于裂纹类缺陷的数目和大小的增长而发生破坏。

②在近于不变的应力条件下,缺陷会随时间而生长;缺陷形成速率随着应力的增高而加快。

③总形变包括岩石固有的弹性形变和由裂纹两边相对移动所造成的形变。

④宏观破裂(主断层形成)是总形变失稳的结果,它发生于裂纹雪崩式地增长到某一临界密度时。

⑤主断层的形成导至其周围应力水平降低,从而使新的缺陷停止生长,并使活动的裂纹的数目减少。

⑥破裂过程与尺度的关系不大。

根据这些观点,IPE 模式把地震的孕育和发生过程分为以下五个阶段:

①第 I 阶段(均匀破裂阶段)

在实际岩石中总是存在着随机分布的缺陷(微裂纹)。在剪切构造应力作用下,方向合适的微裂纹的大小和数目会缓慢地增加;并且还会有新的裂纹产生。在统计上均匀的介质中,这种情形发生于整个体积中。所以这个阶段叫做均匀破裂阶段。在这个阶段中,平均形变速率 $\dot{\epsilon}$ 随时间缓慢地变化 (图 11.69 中的 I)。在这个阶段中,介质的性质也会发生变化,例如有效弹性模量、介质的各向异性都会发生变化,但都很缓慢,所以没有出现前兆现象。当大部分体积中的裂纹平均密度达到某一临界值时,就过渡到第 II 阶段。

②第 II 阶段(雪崩式破裂阶段)

由于裂纹的相互作用,裂纹开始加速增长,或者形象地说,叫做雪崩式地增长(图 11.69 中的 II)。这个加速阶段发生在微裂纹达到临界密度时,与荷载速率无关。在这个阶段,由于在大部分体积中,微裂纹的数目急剧增加、尺寸急剧加大,所以总形变速率急剧增加、介质总体的物理性质也发生变化。

③第 III 阶段

由于介质的不均匀性,裂纹逐渐集中于少数狭窄地带("局部化")。在每一条狭窄地

带内，在相近的平面上形成了若干个较大的裂纹。在这些狭窄地带（图 11.70 中的 A 区）中，发生了失稳形变，即：形变增加，应力下降（如图 11.70 右图中的 γ_A 所示）；而在狭窄地带（A 区）的周围区域（图 11.70 中的 B 区），由于 A 区的应力下降，其应力也下降（如图 11.70 右图中的 γ_B 所示）。B 区内应力的下降使得该区的小裂纹停止发展，甚而部分地愈合。在这个阶段，无论是 A 区还是 B 区，应力都下降。只占整个体积一小部分的 A 区内的形变继续增加，但占整个体积的大部分的 B 区的形变则减小，所以整个体积的形变速率总的说来是减小的，岩石总体的许多性质逐渐恢复原状。

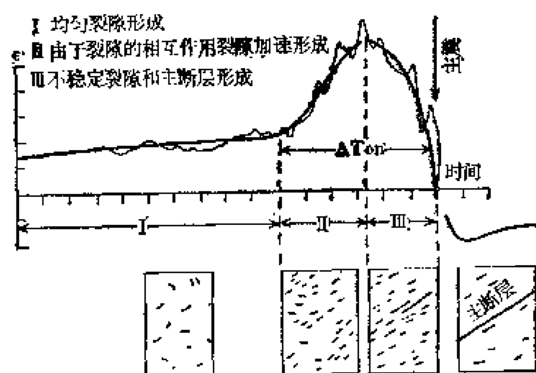


图 11.69　地震孕育和发生过程中平均形变速率的变化（IPE 模式）

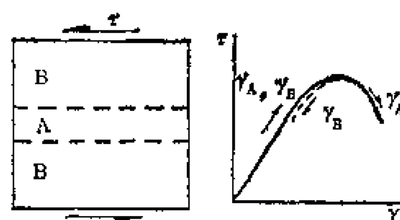


图 11.70　失稳形变区（A 区）和卸载区（B 区）的应力-应变关系

宏观破裂（主断层、地震）是由于裂纹（小断层）之间的连接物遭到大规模破坏所造成的。在这些连接物遭到大规模破坏之前，其中的一、两个或若干个陆续遭到破坏。定性地说，每一个连接物的破坏过程和大规模破坏的全过程是类似的，所以在它发生破坏之前也会发生形变速率的变化，不过周期要短些、幅度要小些。单是一个连接物的破坏还不足于造成整个主断层的切穿，因此这样一种短期形变速率的变化可能会有若干次，这就使得形变速率随时间的变化如图 11.69 中的细实线所示。我们可以把形变速率变化的这种波动视为较大前震的一种短期前兆。

④第 IV 阶段（主震）

当裂纹（小断层）之间的连接物遭到大规模破坏时，便造成了宏观破裂，也就是形成了主断层、发生了地震。

⑤第 V 阶段（震后调整阶段）

在主震之后，断层面附近地区卸载，应力转移到新的断层边缘。由于卸载，许多小破裂可能反向运动，形变速度可能为负。

膨胀-失稳模式有两个重要的特点：一、在第 II 阶段，由于裂纹相互作用，裂纹雪崩式地增长，总形变加速；二、在第 III 阶段，当裂纹逐渐集中于少数狭窄地带（"局部化"）时，断层附近区域的形变速率和应力均越来越小。

与上述五个阶段相应的各种地震前兆随时间的变化定性地如图 11.71 所示。

根据这个模式，地面上两点之间的距离、地面高程的变化、地倾斜和地应变等与地形变有关的异的前兆变化曲线应当与图 11.71 中的 $\dot{e}-t$ 曲线的简单积分相同。

地震波速度主要取决于介质的有效弹性模量。因为微裂纹形成时，有效弹性模量下降，所以在第 II 阶段弹性波速度急剧下降。在第 III 阶段，大多数较小的裂纹闭合，而为数

不多的较大的裂纹对有效弹性模量的影响不大，所以有效弹性模量将恢复正常，从而波速也将恢复正常。类似地，波速比也将按同样方式变化。

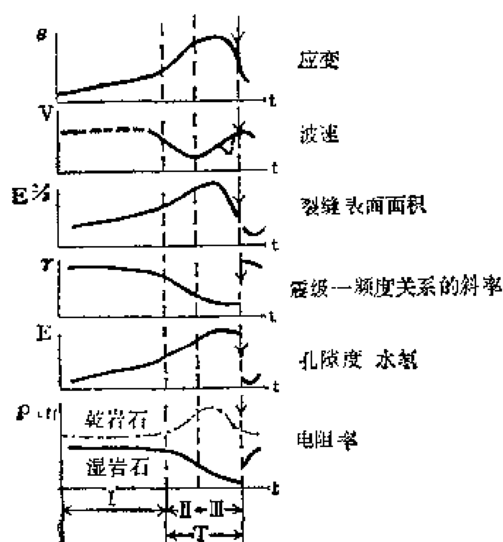


图 11.71 膨胀-失稳模式预计的地震前兆随时间的变化示意图

裂纹总面积是和地震能量 E 的 2/3 次方成正比的量。如前已述，裂纹面积的总和应当与平均形变速率的变化类似，即按图 11.71 中的 $E^{2/3}-t$ 曲线变化。

地震重复率曲线的斜率 b 值（或与 b 值等价的频度的对数-能级曲线的斜率 γ 值）由于在第 II 阶段强前震数目增加而应有较大幅度的下降，到了第 III 阶段则由于前震之间的相互作用逐渐减弱，b 值或 γ 值的下降速度变慢。

氡和其它放射性蜕变物质在水中的含量的增加，以及泉水流量的增加与岩石中裂纹生成的数量有关，因此，在第 II 阶段，它们明显地增加，而在第 III 阶段则趋于平缓。因为在紧邻地震前，许多小裂纹闭合，所以可以预料此时这种前兆的曲线将会下降。

干燥岩石的电阻率在第 II 阶段应当增加，在第 III 阶段则应减小。与此相反，在饱含水的岩石中，如果水来得及扩散到形成或张开的裂纹中，则在第 II 阶段电阻率应当明显地减小。在第 III 阶段，则应仍然继续下降，只是下降得慢了些。显然，大地电流也应有类似的变化。

以上分析适用于裂纹雪崩式增长和随后形成断层面的区域中的前兆的时间进程。在上述区域以外的区域，上述物理量主要取决于应力场，而不是取决于裂纹。

（3）膨胀-扩散模式和膨胀-失稳模式之比较

根据前面的分析，我们可以看到，上述两种模式有以下几个主要差别。

①按照膨胀-失稳模式，断层形成就是发生地震，它既包括原先是完整的岩石的新的破裂，也包括老断层向新岩层的扩展，还包括已胶结了的断层的重新破裂。按照膨胀-扩散模式，地震是老断层的滑动。所以 IPE 模式要求地震时一定得出现尺度与主震相当的破裂；而 DD 模式则不要求地震时一定得出现什么大尺度的破裂。

②IPE 模式认为地震发生于应力过了应力-应变曲线的峰值之后（参见图 11.70）。应力的峰值是在第 II 阶段向第 III 阶段过渡时，也就是在全部异常时间的一半时。此外，主震发生时的应力应当是明显地小于地震前的最大应力（应力-应变曲线的峰值）。相反地，DD 模式预言地震应当发生于峰值应力附近。

③两种模式都认为裂纹起先是在岩石体积中均匀地发展的，但按 IPE 模式，在临震前，裂纹会逐渐集中于未来断层附近区域（图 11.70 的 A 区），并且定向地排列；而按 DD 模式则认为不会出现这样的区域。DD 模式认为地震前裂纹可能扩展和张开，但其方向在整个孕震过程中都保持不变。

④孔隙流体在 DD 模式中起了主要作用，而在 IPE 模式中却并不需要水。

⑤按照 IPE 模式，地震孕育过程中由应力所引起的裂纹的方向和未来的主断层方向

平行，而按照 DD 模式，裂纹方向与最大主压应力平行，因此与主断层是斜交的。

根据上述情况，我们知道，如果设法测量震源附近的应力，就可以辨别这两种模式。因为按 IPE 模式，主震前应力应明显地减小；与未来主断层平行的裂纹朝未来主断层方向集中会导致主应力方向随时间而变化。

DD 模式要求孔隙压在震前有明显的变化，其延续时间与震级成正比，并且孔隙压的变化还得大到足以造成可观测到的前兆异常。IPE 模式对孔隙压的变化却无此要求，固然孔隙压如果有变化的话也会引起裂纹的几何形状的变化。

按照 IPE 模式，形变失稳区（图 11.70 中的 A 区）里地震波速度、电阻率和其它物理性质的变化与其外围的卸载区（B 区）的相应量的变化应当有所差别，因此，测量异常期间与未来的断层相垂直方向上的上述物理量，可以作为 IPE 模式的一种检验。

两种模式所预言的裂纹的取向是不同的。裂纹方向不同应当表现为物理性质的各向异性。所以异常期间最大电导率增加的方向在 IPE 模式中应当是与未来的断层平行的方向，而在 DD 模式中则是与最大主压应力平行、也就是与未来断层斜交的方向。波速和波速比也应有类似的情况。

DD 模式原则上适用于美国加利福尼亚州的地壳中的浅源地震、即发生于已有断层上的地震；IPE 模式则可适用于板块内部的、原先未破损的岩石的破裂。但是，不论是哪一个模式，目前都只是定性地或半定量地解释了一些观测到的前兆现象，它们都要在今后的实践中接受进一步的检验。现在还没有充足的证据说明哪一个模式更切合实际，可能将来会出现能更好地反映震源物理过程的新的模式。

参 考 书 目

[1] Aki, K., 1972. Earthquake mechanism, *Tectonophysics*, 13, 423—446.

[2] Balakina, L. M., H. I. Shirokova, and A. V. Vvedenskaya, 1961. Study of stresses and ruptures in earthquake foci with the aid of dislocation theory, *Publ. Dom. Obs. Ottawa*, 24, 321—327.

[3] Ben-Menahem, A., and S. J. Singh, Multipolar elastic fields in a layered half-space, *Bull Seism. Soc. Amer.*, 58, 1519—1572.

[4] Berckhemer, H., and K. H. Jacob, 19. Investigation of the dynamical process in earthquake foci by analyzing the pulse shape of body waves, AD-738953, U. S. Department of Commerce.

[5] Bollinger, G. A., 1968. Determination of earthquake fault parameters from long-period P waves, *J. Geophys. Res.*, 73, 785—807

[6] Brune, J. N., 1970. Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, *J. Geophys. Res.*, 75, 4997—5009.

[7] Burridge. R., and L Knopoff, 1964. Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull Seism Soc Amer.* 54, 1875—1888.

[8] Burridge, R., 1976. *Mathematical Topics in Seismolgy*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ.

[9] Chinnery, M. A., 1969. Theoretical fault models, *Publ. Dom. Obs. Ottawa*, 37, 211—223.

[10] Chinnery, M. A., 1970. Earthquake displacement fields, in: *Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth*, edited by L. Mansinha, D. E. Smylie and A. E. Beck.

[11] de Hoop, A. T., 1958. *Representation Theorems for the Displacement in an Elastic Solid and Their Application to elastodynamic Diffiaction Theory*. Doctoral dissertation Delft.

[12] Eshelly, J. D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. (London), A*, **241**, 376—396.

[13] Honda, H., 1957. The mechanism of the earthquakes, *Sci. Repts. Tohoku Univ., Ser.* **9**, *Geophys. Suppl.*, **9**, 1—46.

[14] Keylis-Borok, V. I., 1959. On estimation of the displacement in an earthquake source and source dimensions, *Ann. Geofis.*, **12**, 205—214.

[15] Kisslinger, C., and Z. Suzuki (editors), 1978. *Earthquake Precursors,* Center for Academic Publications Japan, Japan Scientific Societies Press.
中译本：《地震前兆》，郗占琪、李兴才、顾平泽，陈运泰校，地震出版社，1980。

[16] Love, A. E. H., 1944. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,* 4th edition, Dover Publications, New York.

[17] Maruyama, T., 1963. On the force equivalents of dynamical elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism, *Bull. Earthq. Res. Inst., Tokyo Univ.*, **41**, 467—486.

[18] Maruyama, T., 1964. Statical elastic dislocations in an infinite and semi-infinite medium, *Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo Univ.*, **42**, 289—368.

[19] Mikumo, T., 1972. Focal process of deep and intermediate earthquakes around Japan as inferred from long-period P and S waveforms, *Phys. Earth Planet. Interior,* **6**, 293—299.

[20] O'Neill, M. E., and J. H. Healy, 1973. Determination of source parameters of small earthquakes from P-wave rise time, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, **63**, 599—614.

[21] Rikitake, T., *Earthquake Prediction,* Elsevier Sci. Pub. Company.

[22] Savage, J. C., 1980. Dislocations in Seismology, in: *Dislocations in Solids,* edited by F. R. N. Nabarro, 3, 251—339. North-Holland Publishing Company.

[23] Stacey, F. D., 1977. *Physics of the Earth,* 2nd edition, John Wiley and Sons, Inc.

[24] Stauder, W. S. J., 1962. The focal mechanism of earthquakes, In *Advances in Geophysics,* 9, 1—76.

[25] Steketee, J. A., 1958. On volterra's dislocations in a semi-infinite medium, *Can. Jour. Phys.*, 36. 192—305.

[26] Steketee, J. A., 1958. Some geophysical applications of the elasticity theory of dislocations, *Can. Jour Phys.*, **36**, 1168—1198.

[27] Steketee, J. A., 1975. A note on elasticity theory of dislocations and earthquake mechanisms, in. *Progress in Geophysics,* edited by G. J. Barradaile et al., North-Holland Publ. Comp., Amsterdam.

[28] Yamakawa, N. 1971. Stress fields in focal regions, *J. Phys. Earth,* **19**, 347—355.

[29] Wyss, M. (editor), 1975. *Earthquake Prediction and Rock Mechanics,* Birkhauser.

[30] Введенская, А. В., 1956. Определение полей смещений при землетрясениях с помощью теории дислокаций, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 3.

[31] Кейлис-Борок, В. И., 1957. Исследование Механизма Землетрясений, Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР **40** (166), Изд. АН СССР, Москва. 中译本：《地震机制的研究》，李宗元译，傅承义校，科学出版社 1961。

第十二章　地球内部构造

构造这个词在地球物理学术语中有两个涵义：一是结构，二是组成。前者主要是几何关系，如分层、断裂等等；后者是岩石、矿物或化学成分。固体地球物理学的目标之一就是利用地面观测和试验来推断地球内部深不可见的情况。前几章论述的各种地球物理场的理论都有助于这种推断。

一、地球的表面形态和内部的主要分层

地球表面最大的两个构造单元是大陆和海洋。大陆上有稳定的地盾和地台，有比较活动的地槽和内陆山系。大陆边缘地带还可能有海岸山脉(如南美的安第斯山)。海洋约占地球表面的十分之七。海底在海洋的覆盖下也不平坦。大洋中有峻峭的海岭，高出海底几千米，绵延几万公里；还有高地、海底峡谷、海底火山、平顶山、珊瑚岛、深海沟等。

大陆与海洋之间的过渡带可分为活动的与不活动的两类。在不活动的大陆边缘，地震较少。这和扩张的海洋(如大西洋或印度洋)有联系，所以叫做大西洋式的大陆边缘。边缘处常有大陆架和大陆坡。大陆架是由海岸线向海洋中延伸直到水深约二百米左右的一片坡度平缓的地带。地震勘测表明大陆架下面沉积很厚，可能蕴藏丰富的石油。沉积下面的地壳性质和大陆是相同的，所以大陆架应是大陆的一部分。由大陆架再往深海延伸，海底的坡度突然加大(陡度大于 1/10)。在不到 50 公里的宽度内就达到深海。这个地带叫做大陆坡。大陆坡常为许多深海峡谷所割切。大陆地壳的性质经由大陆坡向海洋地壳过渡。在大陆坡与深海平原之间，有时还存在着一段略为隆起但坡度平缓的地带。此处沉积很厚，但下面的地壳则完全是海洋地壳性质的。

太平洋式的大陆边缘是另外一种形式。按照近代海底扩张的假说，太平洋正在缩小。在环太平洋地震带上，地震有浅源的、中源的和直到七百多公里的深源的。震源多集中在一个斜面附近，这个面以约 45° 角倾向大陆(叫做本尼奥夫面)。在大陆边缘以外，存在着深海沟；海沟与大陆之间则有岛弧或边缘山脉(如南美西岸)。大陆架在此处很窄或不存在，但岛弧所包围的海域可能很大(如日本海)。

深海沟是极重要的一种地表形态，大多数都在太平洋，其他各洋较少。秘鲁-智利海沟长达四千多公里。海沟最深处约达一万至一万一千米，位于西太平洋。海沟的宽度不到一百公里，截面为 V 字形，向大陆一面较陡。近年来的观测表明：①海沟地区的地壳是不均衡的，重力异常为负值，表明质量短缺；②海沟下面的地壳是海洋性质的，厚度与别处的海洋地壳差不多；③负重力异常是地壳弯到以下较重介质中的结果；④海沟内充填的沉积物一般并不很厚，所以海沟的下沉并非沉积的重量所造成的。根据现代板块大地构造假说的观点，海沟的形成是大陆向海底上面逆掩或海底向大陆下面俯冲的结果。

以上各种表面形态，绝大部分是可以直接观测的，但若涉及到地球内部的结构，就必须借助于物理的方法，尤其是地震的方法。根据第九章所阐述的地震射线理论，人们可以

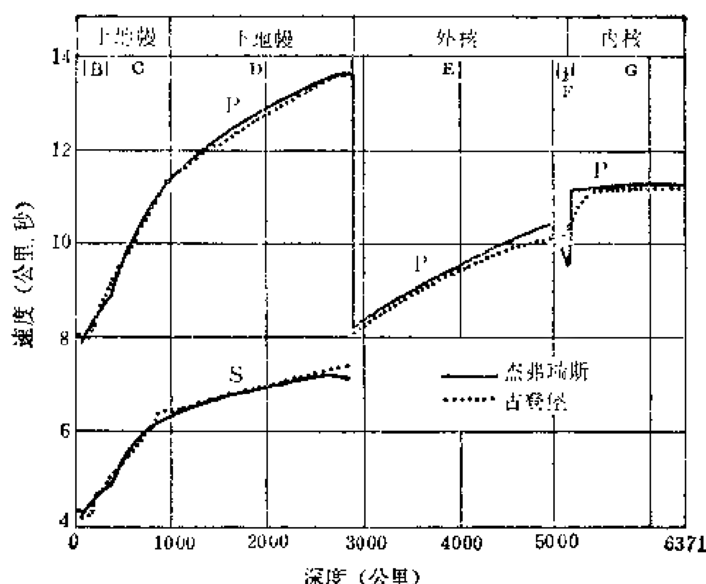


图 12.1 地下各深度地震波速度的分布

从地面所测到的地震走时，计算地下不同深度的地震波传播速度。许多地震学家都对这个问题有所贡献，但最著名的要属古登堡和杰弗瑞斯与布伦的工作。他们根据多年来地震学家所积累的地震走时资料，计算了由地面到地心地震体波 P 和 S 的速度分布。上图是他们的结果。实线是杰弗瑞斯工作的结果，虚线是古登堡工作的结果。两组结果是非常接近的，只有细节上的不同。根据这个速度分布曲线，布伦（K. E. Bullen, 1942）将地球分为 A, B, C, D, E, F, G 七层，各层的深度也标在图上。以后他又将 D 层分为 D' 和 D'' 两层。这个分层模式一直为各国地震学家所采用。

A 层相当于地壳，它的结构很复杂而且厚度也很不均匀，由几公里（海洋地壳）到六、七十公里（青藏高原下面）。但无论如何，地壳的厚度比地球半径要小得多。它在图 12.1 中已经查不出来。在研究地球大尺度的结构时，它可以做为单一的薄层来对待，厚度约为 35 公里。

由 A 层往下直到约 400 公里深度，速度几乎是直线上升。这被解释为在这个区域内，地球介质是均匀的，速度的变化完全是压缩的结果。这层称为 B 层。在 B 层以下，速度梯度显著增大。由 400 至 1000 公里的区间，速度梯度连续变化。这一层称为 C 层。这里速度的变化并不完全是压缩的结果，而是附有物质组成的变化。C 层又称为过渡层，它的性质和起源曾引起许多学者的注意。由约 1000 公里深度起直到 2900 公里深度的地幔边界，速度梯度的变化是平缓的，表明这一区域的物质组成是均匀的，速度和密度的增加主要是压缩的结果。这层称为 D 层。以后又发现在 D 层的最下二百公里内，速度几乎不变，所以人们又把 D 层分为 D' 和 D'' 两部分，D'' 的物理意义也是引起推测的问题。在 D 层以下，P 波速度突然大幅度降低，而 S 波不见了。这就到达液体地核的边界。由 2900 至 4980 公里深度的区间称为 E 层。E 层中的速度梯度变化不大，表明这里的物质组成是均匀的。这就是地核的外层。在此之下，在深度为 4980—5120 公里的极窄区间内，杰弗瑞斯在 1939 年根据当时的资料，认为那里的速度梯度是负的。他假定这个梯度是常数，从而得到图 12.1 中那个 V 形区域。这就是 F 层。其实杰氏这个结果并没有什么物理依据，

以后的作者也没有能证实这个负梯度区的存在。F层是一个过渡区，其中的速度变化细节至今还不是很清楚。在F层以下就是G层，这就是地球的内核。

地壳以下直到C层的底部叫做上地幔，也就是B层加C层。但还有一种划分方法是将B层叫做上地幔，C层叫做过渡层，D层叫做下地幔。

表 12.1 地球的分层

分层		深度（公里）	
地壳 A		0—35	
（莫霍面）			
地幔	B	35—400	上地幔
	C	400—1000	
	D'	1000—2700	下地幔
	D''	2700—2900	
（核-幔边界）			
地核	E	2900—4980	外核
	F	4980—5120	过渡层
	G	5120—6371	内核

二、地壳、地幔和地核

地壳这个词给人一个内软外坚的印象。上世纪末，人们认为地球的内部是熔融的液体，表面上凝固着一层硬壳。现在这个概念已经过时了，因为观测证明地球内部一般比钢还硬。然而这个词已经沿用多年，不宜再改。我们只须记住它仅仅是地球的最上层，并无硬壳的涵义。

（一）研究地壳的地震方法

地壳是1909年南斯拉夫地震学家莫霍洛维契奇（A. Mohorovičić）首先发现的，他在近地震观测中，发现了现在所谓的Pn和Sn震相。他假定在地下几十公里的深处，存在着一个地震波速度的间断面，下面的速度突然增加。Pn波或Sn波就是以临界角人射而又以临界角出射这个面的地震波。这个间断面以后就称为莫霍面或M-面。这个面以上的介质称为地壳，以下的称为地幔。按照射线的原理(方法见第九章第三节)，可以计算地壳的厚度和M-面上下的地震波速度。这个方法叫做地震折射法，在浅层的地壳结构探测(包括地震勘探)中是一个极有效的方法。虽然如此，这种“折射波”的性质早期曾引起很多的争议。它显然不是普通的折射波,因为后者在以临界角入射后就不会折回了；它也曾被人叫做行进反射波，因为它不是反射在一点，而是在一定距离之后，连续可以观测到；它也曾叫过界面衍射波，但也不确切，因为它的传播方向是确定的。直到三十年代晚期，这种波的性质才算基本弄清楚。原来在界面以下，地震扰动是以速度V_2传播的。如果它大于界面以上的速度V_1而界面两边的扰动又是耦合的，则这种情况和子弹在空气中以超声速飞行一样，根据惠根斯原理，将在低速的介质中产生一种首波。不同之处是在高速介质那一边，首波并不存在，所以只是一个半首波。也有人管它叫侧面

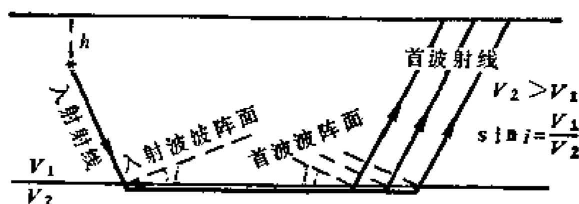


图12.2 地震首波

波，但首波这个词现在已经广泛使用了。从几近的射线理论，这种波的强度应极微弱，但严格的波动计算证明这种波的强度是不小的。

折射法是一个经济有效的方法。利用同一个震源，可以在很大面积上同时进行测量，但是它有一个重要的缺点。根据以上的讨论，首波的存在必须下层介质中的速度高于上层。如果在一系列地层中有一层不符合这个条件，则应用折射法就不能得到这层以下的信息。但反射法就没有这种限制(具体的方法见第 9 章)。不过反射法更多的是用在反射角比较小的时候。所以反射法虽然深度的辨别能力比较强，但横向的有效范围却比较小。实际测量时，常两者兼用。

无论是折射法还是反射法，所用的都是地震体波。但是研究地壳的结构时，还可以利用地震面波。在成层介质中，瑞雷式和勒夫式的面波都有频散。频散曲线的形状和介质各层的参数有关系。假定了地壳的成层模式，就可以计算出理论的频散曲线(第九章第四节)，以与观测曲线做对比。所谓的地震反演问题就是如何调整地壳结构的参数以使得理论计算结果可以和观测结果最好地拟合。但是此处应指出，反演问题的解并不能证明是单一的。良好的拟合与多种的拟合只不过增加可信度而已。

除了利用地震波的走时外，还可利用地震波的振幅。在给定震源类型和结构的参数后，地震波在不同时间的振幅是可以计算的，这就是所谓的理论地震图。将理论地震图与实际观测的地震图相比较，就可据以修改原来给定的参数以求得更好的拟合。这样反复几次直至得到最佳的结果。这虽不能证明是唯一的解答，但由于可以对比的震相常有好几个，所以可信的程度也就比较大。这个方法计算量很大，但对于研究细结构是一个强有力的方法。

前章所讨论的各种地球物理场其实都可用来研究地球内部构造，特别是重力和地磁，不过它们的分辨力都不如地震。这是因为重力异常和地磁异常都是反映总体的和准静态的影响(电法和电磁法也是)，而地震波，由于它的传播速度不太大，是可以追踪的。虽然如此，当地下介质有显著的密度差别或磁性差别时，重力和磁力也就成为有效的工具。但必须注意，重力和地磁的反演是不唯一的。这两种方法应当尽可能的与地震法联合应用。

（二）大陆和海洋下面的地壳

地壳的厚度在全球各处是不均匀的。大陆之下，地壳平均约厚 35 公里，但变化很大。我国青藏高原下面的地壳厚度约在 65 公里以上，而华北地区有些地方，还不到 30 公里。海洋下面的地壳，厚度只有 5 到 8 公里。

在大陆的稳定地区，地壳约厚 35—45 公里，一般分为两层。上层中的 P 波速度由每

秒 5.8—6.4 公里随深度递加到下层的每秒 6.5—7.6 公里，但递加的情况各处不同。在有些地区，上下层中存在着一个速度间断面，叫做康拉德（V. Conrad）间断面，或叫 C 间断面，但在另一些地区，速度随深度的增加是连续的。由地壳下部过渡到地幔一般是很快的，P 波速度由每秒 7 公里多在几公里深度之内就增加到 8—8.2 公里/秒。M-界面的细结构现在仍是引人兴趣的问题。

地壳的上、下两层以前曾分别叫做花岗岩层和玄武岩层，但这两个词并不十分确切。从结晶基底以及其他岩石的分析，上层岩石的化学成分介于酸性和基性岩浆岩之间，更近于花岗闪长岩。根据矿物组合稳定性的考虑，下层岩石可能是一种酸性到中性的麻粒岩（这是酸性到中性岩石的高压形式），也可能是闪岩。上层中的地震波震相一般用 $\bar{P}$，$\bar{S}$（或 P_g，S_g）表示，下层中的用 P^*，S^* 表示，不过因为 C 界面并不普遍存在，P^*，S^* 也不一定存在。

在大陆造山带地区，地壳构造比稳定地区复杂。地壳厚度较大并且还时常出现速度为 7.2—7.8 公里/秒的深部岩层。在有些地区，M-界面并不明显，表明速度是连续变化的。在南美安第斯山和北美阿巴拉契亚山地区，地壳厚度约有 65 公里，在阿尔卑斯地区，厚度约有 55 公里，在青藏高原，地壳厚度可达 65 公里以上。这些地区的上层地壳一般是酸性的，速度为 6.0—6.5 公里/秒，厚约 20—30 公里。在这层下部，有时还存在一个低速层。在 30 公里以下，速度连续由 6.5 增加到 8.2 公里/秒。这种下地壳的来源有几种可能的解释：①它们是闪岩；②石榴麻粒岩；③超基性岩和榴辉岩与酸性-中性岩石的混合物；④地壳物质与地幔物质的混合物。

表 12.2　海底地壳的结构

层　次	厚　度 （公里）	密　度 （克/厘米^3）	速　度 （公里/秒）
海　水	4.5	1	1.5
第 一 层	0—2	2.0	2
第 二 层	0.5—2	2.4	4.6
第 三 层	4.7	3.0	6.7
地幔顶部		3.3	8.1

海洋地壳的结构是用海上地震测量来确定的，它和大陆地壳有显著的差别。海水的平均深度约为 4.5 公里。海底地壳主要有三层。第一层是未凝结的沉积，厚度变化很大，约 0—2 公里，P 波速度为 2 公里/秒。第二层是孔隙度很大的玄武岩碎屑，厚约 0.5—2 公里，P 波速度约 4.6 公里/秒。第三层是海洋地壳的主要层次，厚度和 P 波速度都比较均匀，各为 4.7 公里和 6.7 公里/秒。一般认为这层直接覆盖在地幔之上，但也有人认为中间还有一夹层，厚约 3 公里，P 波速度为 7.4 公里/秒。无论有无夹层，地壳与地幔之间的间断面（M-界面）仍有一定的厚度（可能不超过一公里）。人工地震探测还可测出它的细结构。关于第三层的组成曾有过一些争论。有人认为它是蛇纹岩化的橄榄岩。如果是这样，则 P 波速度虽然与观测值差不多，但 S 波速度则略嫌太小，只有 3.5 公里/秒，而观测值是 3.7 公里/秒。还有一些其他的困难。现在多数人认为第三层是一种铁镁质的岩石，与玄武岩很相近。

大洋中的另一形态是海岭。图 12.3 是横过大西洋中脊上面的重力及地震剖面。自

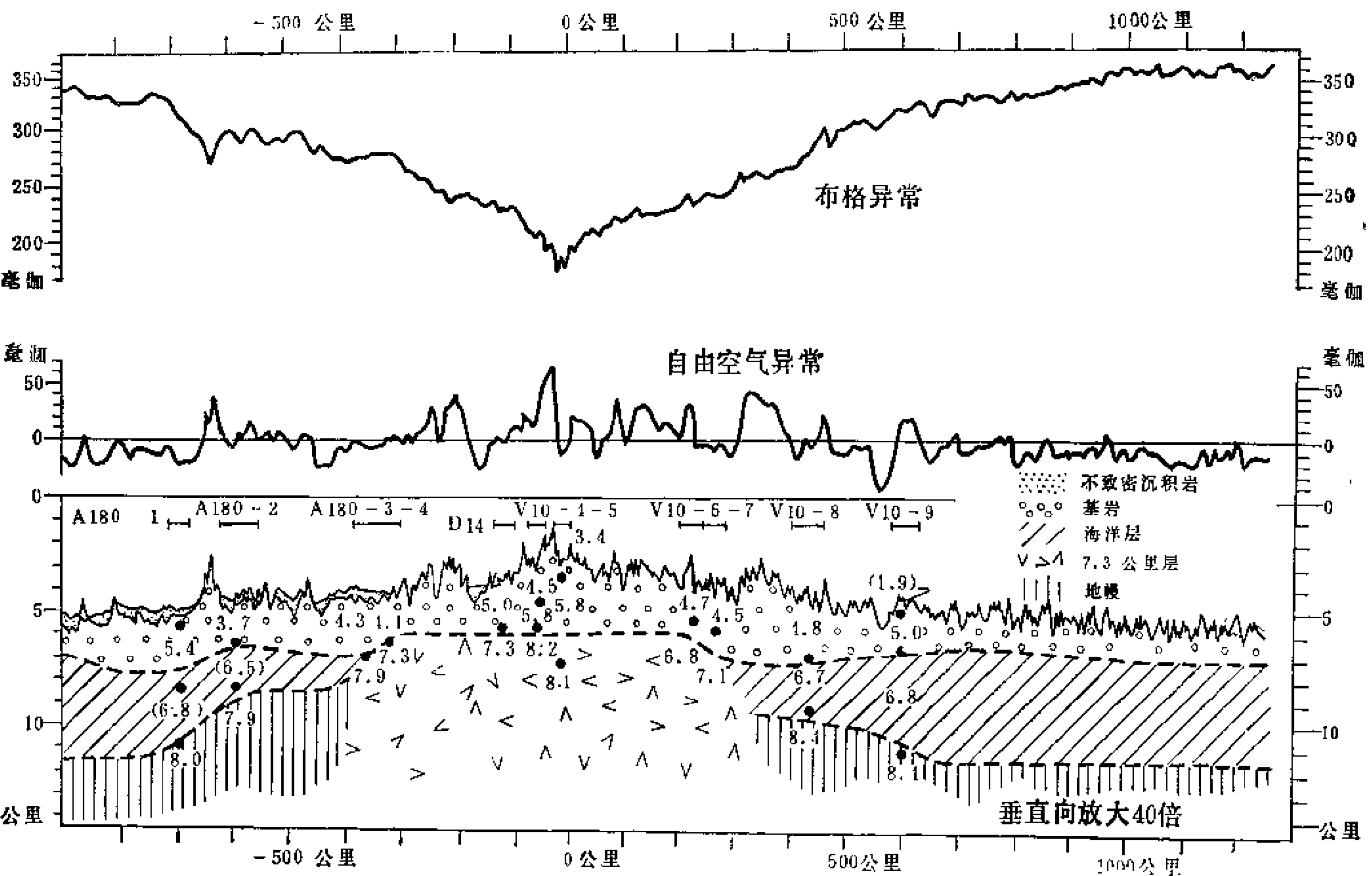


图 12.3　大西洋中脊的重力及地震剖面
(见 Talwani et al., 1965, J. Geophys. Res. 70, 341—352)

由空气异常极小，表明中脊是均衡的，但布格异常是负的，表明下面有质量短缺。地震剖面表明此处没有第一层。玄武岩质的第二层出露海底并且较厚，但第三层则较薄并且逐渐过渡到地幔。此处地幔的速度特别低，M-界面也不明显。别处的海岭也有大致类似的结构。高热流、低密度和低波速、玄武岩喷发以及结构的不均匀性都指向海岭乃是地幔对流上升的地带，此处发生着岩石的部分熔融和分异，形成新的玄武岩地壳并由海岭向外扩张。

海洋中的岛屿有时断续地联成弧形，叫做岛弧，西印度群岛，阿留申群岛，日本列岛等都是例子。观测表明，从岛弧向大陆，依次有以下各种形态：①海沟(海槽或海渊)；②浅源地震和负重力异常成带地出现在海沟凹的一边，此处常有出露的海岭，形成非火山性的小岛；③正重力异常的最大值，此处地震深度约为 60 公里，常常很大；④白垩纪晚期或第三纪的主构造弧和火山，地震深度约为 100 公里；⑤次构造弧，晚期的火山活动，地震深度增至 200—300 公里；⑥深源地震，可达 300—700 公里。这些形态的具体情况随地而异，也不一定全部出现。图 12.4 是三个岛弧地区的剖面。深海沟和岛弧地区的地壳是不均衡的。在海沟向海的一边，M-界面急剧向下弯曲，地壳积累着很大的应变能。这说明为何

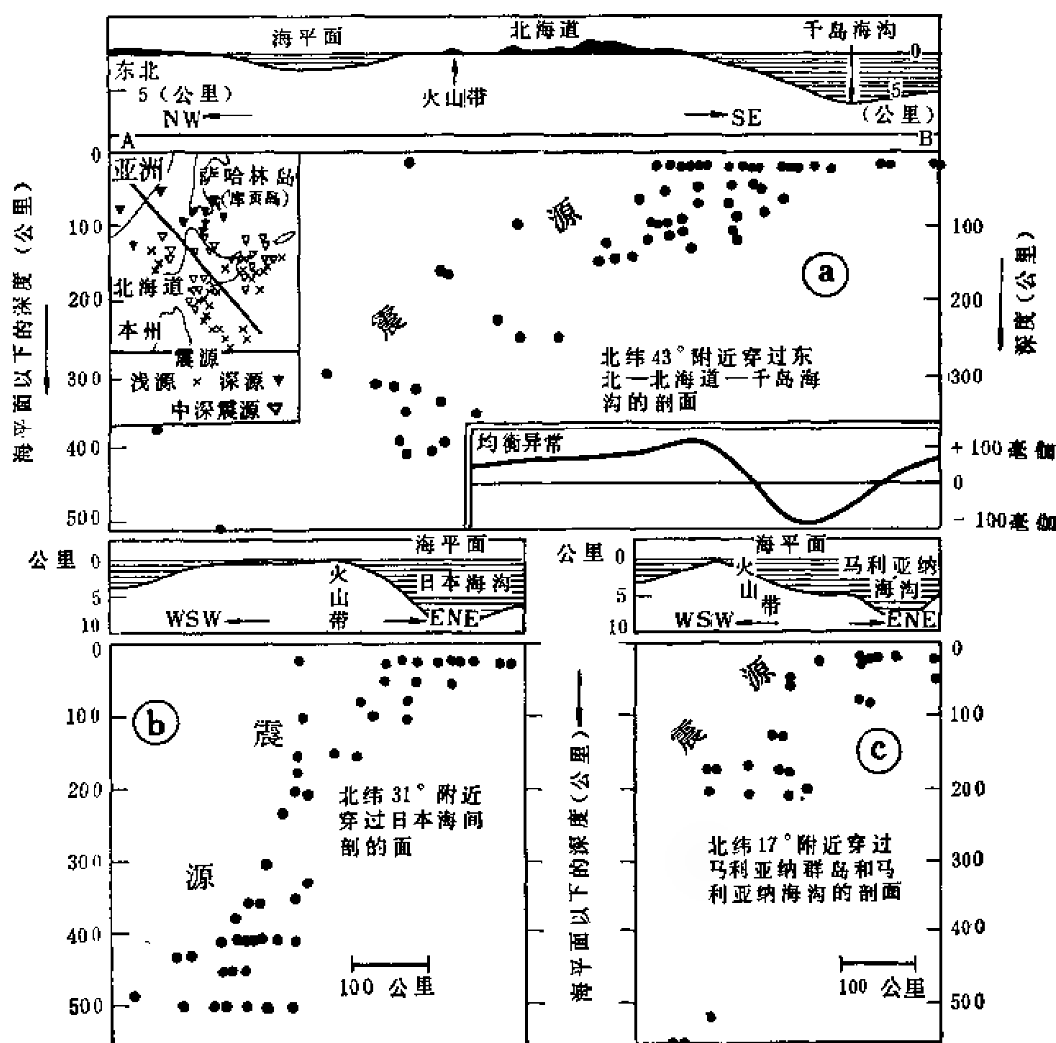


图 12.4　三个岛弧地区的剖面

这里时常发生极大的地震。

海洋与大陆地壳如何过渡是一个引人注意的问题。联合使用地震和重力的方法可以得到过渡带地壳构造的轮廓。图 12.5 是一个例子。

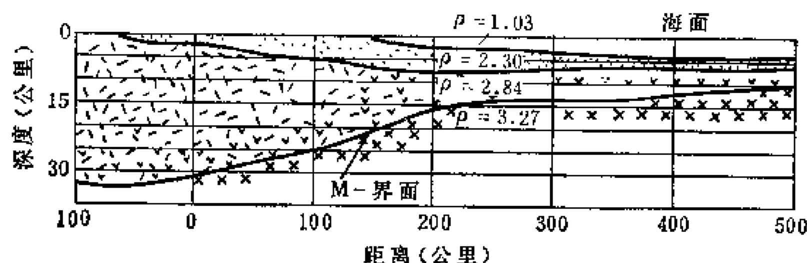


图 12.5 地壳过渡带的剖面

(取自古登堡,《地球内部物理学》,科学出版社,1965)

在稳定的大陆地区,M-界面是一个明显的速度间断面,P 波速度由地壳底部约 7 公里/秒一跃而达到地幔顶部约 8.1 公里/秒并且各地都相当一致。关于这个界面的性质以前曾是一个长时期争议的问题。一派认为地壳底部的岩石是辉长岩性质的,而地幔顶部则是榴辉岩性质的。M-界面上下的岩石化学成分基本相同,只是结晶相不同,所以M-界面是一个相变分界面,而相变时也可能还要经过一个石榴麻粒岩的中间阶段。不过这个解释有一些困难:①观测表明,由地壳向地幔过渡时,速度变化极快,M-界面的厚度有时不到一公里。相变不大可能在这样短的距离内完成。②M-界面的温度各地相差很大,有时达到 200℃,但界面以上的地壳厚度一般变化不大。这与试验室的相变温、压变化条件是不相符的。③在地壳底部的温、压条件下,辉长岩是不稳定的。稳定的矿物组合将形成榴辉岩或石榴麻粒岩,所以就不发生相变问题了。以上的情况在海洋下面也存在。但在造山带地区,地壳下层有时很厚。P 波速度可能在每秒 7 公里以上。这时M-界面并不明显。P 波速度是随深度连续增加的,但不间断。在这种情况下,辉长岩相变成榴辉岩也不是不可能的。基于这些论证,现在多数人认为M-界面是一个化学分界面。它的上面是中等的铁镁岩石地壳,下面是超铁镁岩石(橄榄岩)的上地幔。

(三) 上地幔和低速层

上地幔这个词原来是指地幔最上层约一千公里厚的这部分,不过以后也有人将最上约 400 公里(即B层)叫做上地幔,而把C层叫做过渡层。上地幔的结构虽不似地壳那样复杂,但也有横向的不均匀性和地区性的差异。地球的成层结构原是做为一个简单模式而提出的,用来研究地球的内部。当工作深入后,这个模式就越来越需要修补了,不过横向不均匀性毕竟是不大的,不影响宏观的结果。

地球内部的地震波速度一般是随深度而增加的,因此产生首波或弯回地面的折射波。但若地下有一低速层,情况就复杂了,因为地震射线穿入这层后不是向上而是向下弯曲。只有当它穿过这层又入射到高速层时,才在比较远的地区弯回地面。这样在地面上就有一段距离收不到地震波而出现一个影区。在影区中,只有微弱的绕射或散射的波,振幅很小。早在 1926 年,古登堡就已注意到了这个现象。他发现P波振幅起初逐渐随距离减

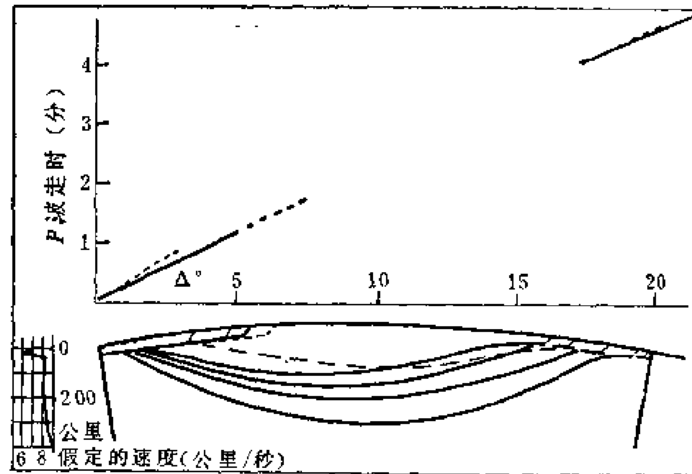


图 12.6　低速层的 P 波射线及走时

小，直到约 1600 公里时，振幅又回升起来，以后又慢慢随距离衰减掉。古氏认为这个现象是由于地幔上部存在一个低速层。对于 P 波，这个层在北美西部约深 60—150 公里，波速最低处约在 100 公里的深度（图 12.6）。 S 波的低速层约深 60—250 公里，最低处约在 150 公里。低速层的存在最初颇有人怀疑，但以后人工爆破和地球自由振荡的观测充分证实了古氏的观点。

S 波的低速层几乎是全球性的，但 P 波低速层在地盾地区并不明显。低速层的厚度和深度在海洋和大陆下面略有不同，对于 P 波和 S 波也不相同，不过最低点都是在一百多公里的深度。低速层的存在还有一个有意义的旁证。在地下核爆炸的地震监视中，人们发现，约在震中距离 1000 至 2500 公里之间，核爆炸的地震信号最不规则而不易分辨；在 2500 公里之外，反而容易侦察。这也是低速层的影响。

低速层是怎样形成的？现在不少人认为那个地方的温度已接近岩石的熔点，在有些晶体的边界上发生了部分的熔化，所以使波速降低。那里的介质仍是固体，但在长期力的作用下，可表现相当塑性而发生流动。这就为板块运动提供了条件。 有些人将低速层与地质学家的软流层等同起来，而把低速层以上这部分盖层叫做岩石层(或叫岩石圈)。其实这两对名词来源不同，其物理涵义也可能不完全一样。图 12.7 是地壳和上地幔顶部的构造示意图。图的右边是大陆，左边是海洋。在隆起地区（E）地壳加厚，靠近海洋地区地壳变薄。A 处是深海沟，其外缘的地壳有显著拗陷。 极左边的两条曲线表示地下温度

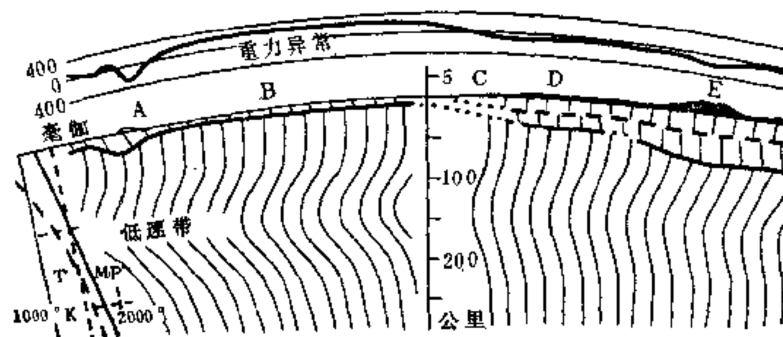


图 12.7　地壳和上地幔顶部构造示意图

T 和岩石熔点 MT 随深度的变化。在低速层的地方，两条曲线很靠近但不相交。

以上只是一般的情况。近年来的地球物理学进展，特别是地震观测技术的进展，发现上地幔的结构也是很复杂的，速度分布各地区都有差异。下图是根据面波的频散所得到的三种不同地区 S 波的速度分布。在稳定的大陆地区（图中的 CANSD 是加拿大地盾），盖层很厚，但其下的速度只略有降低，能量衰减小。在海洋地区（图中的 8099），低速层很明显，能量衰减大。在构造活动地区（如阿尔卑斯），P 波和 S 波低速层都存在。S 波最低速度小于以上两种地区，可低到 4.1 公里/秒。盖层厚度仅有 10—50 公里。有的地区（如美国的盆地及山岭地区），低速层的上界可达到 M-界面。

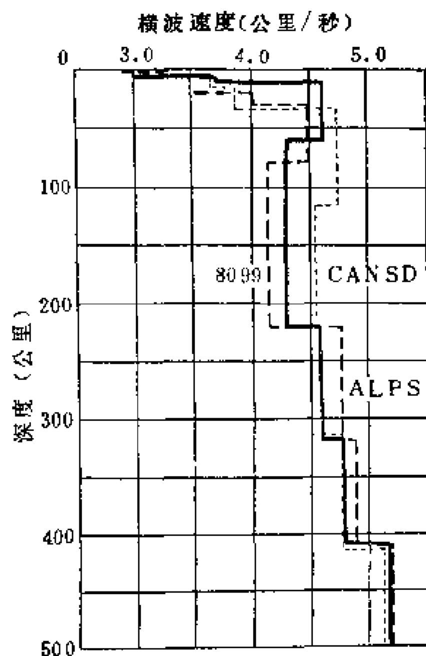


图 12.8　三种不同地区 S 波的速度分布

低速层以下，波速连续增加，直到约 400 公里深度时，速度梯度突然增大并连续变化。这个深度相当于震中距离为 20° 时所计算的射线最低处的深度，所以又称为 20° 间断。在杰弗瑞斯的速度分布图上，有 20° 间断但无低速层；在古登堡的图上，有低速层但无 20° 间断。其实这两种形态以后证明都存在，不过在有些地区不都是很明显而已。在 400 与 1000 公里深度之间，速度梯度连续变化，直到 D 层。在 D 层内，速度变化是均匀的，梯度保持很小。在接近核幔边界一、二百公里时，速度几乎不变。

（四）地　　核

地核与地幔的分界是一个尖锐的速度间断面，V_P 由地幔底部的 13.72 公里/秒突然降到地核顶部的 8.06 公里/秒，S 波不见了，密度则由 5.56 升到 9.90 克/厘米^3。这个界面可以产生清晰的反射波 P_cP，S_cS，P_cS 和 S_cP。由于 V_P 急剧下降，地面上在震中距离 105°—142° 之间造成一个明显的影区。由反射波的走时，古登堡早在 1913 年就已确定核幔边界的深度为 2900 公里。经过 70 年来反复修订并没有多大的变化（现在采用的数值为 2891 公里）。近年来，由于地球自由振荡的观测，还由于影区内可以观测到微弱的绕射 P 波，似乎表明地幔底部存在一个速度略低而密度略高的过渡层。关于这层的成因现在还没有一致的意见，可能和地球的形成机制有关系。

地球核内的地震波有多种类型，统称为核震相。由于核内还有一个间断面，核震相的走时曲线非常复杂。在外核（E）内，V_P 由 8.06 平缓地增至 10.36 公里/秒。通过 F 层后，又增到 11.03 公里/秒；以后渐增至 12.26 公里/秒而达到地心。但在 F 层内如何变化，由于观测不多，尚无定论。

地球外核是液体，因为没有观测到通过它的 S 波。但仍有可能 S 波并非不存在，而是完全被吸收掉了。不过，利用人工爆炸可以观测到在 E 层内部经过 7 次的反射纵波，表明

E 层物质的吸收系数是很小的。另外，固体潮和地球自由振荡的观测也表明 E 层的刚性系数也必须很小。所以 E 层是液体的结论是可以肯定的。

很早以前，在解释核震相的走时曲线时，就已发现地球内核的存在，但是不能肯定它的物理状态。以后发现 P 波速度在通过 F 层后增值约 7%。若 F 层上下全是液体，这就意味着容积弹性模量 k 增加约 14%，而这是不大可能的。一个可能的使 V_P 增值的办法是内核的刚性系数 μ 不等于零，即是说内核是固体。P 波穿入内核后可以转换成 S；穿出时，又转换成 P。这种震相以 PKJKP 表示。它也可以不发生转换，则震相以 PKIKP 表示。内核中的 V_S 估计为 3.4—3.6 公里/秒。震相 PKJKP 已由高分辨率的地震台阵找到。图 12.9 也给出了 S 波在内核中的速度分布。

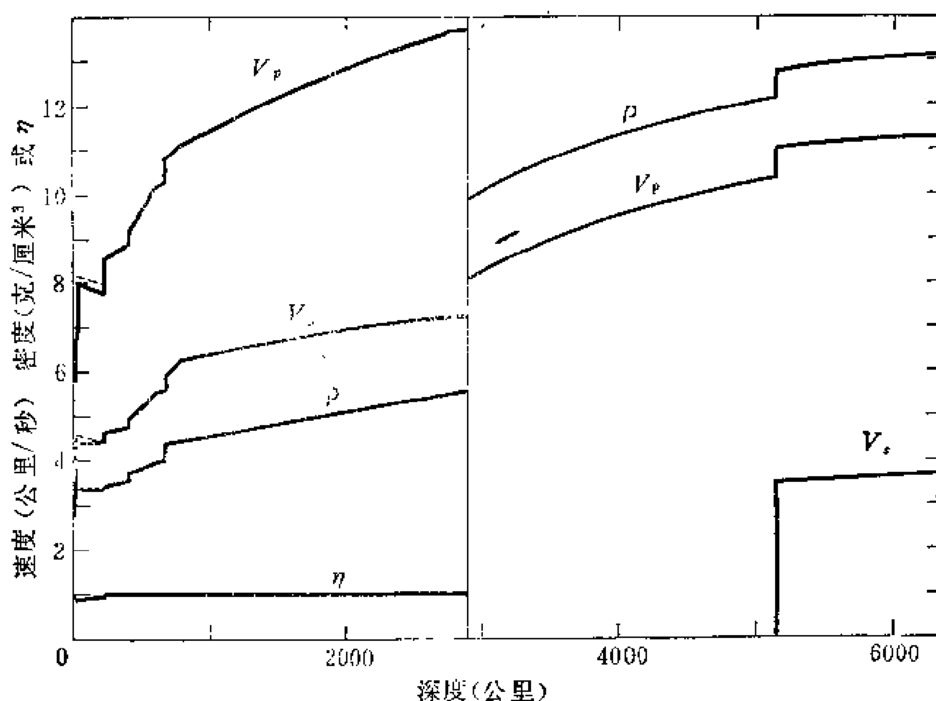


图 12.9 地球内部的速度分布

三、地球内部的物质组成

五十年代和六十年代早期，许多人认为地球是由陨石物质积聚而成的，因此地球的物质组成可能和球粒陨石很相似。以后人们又发现若将地球表面的总热流除以地球的质量，所得结果恰好和单位质量的球粒陨石所释放的热能很相近。这就加强了以上的信念并引到地球内部铀、钍、钾的丰度可能与球粒陨石相一致的设想。1958 年，伯奇将这个想法加以发展并推论地球的分异作用将约 60% 的铀、钍含量集中到地壳。奇怪的是，钾一般是与铀、钍一起分馏的，却不曾同样地集中于地壳，而估计有 80% 的含量仍留在地球内部。钾的匮乏一度曾引起相当的注意。到了 1960 年，喀斯特 (P. W. Gast) 首先指出地壳及上地幔中铷/锶比值要比球粒陨石中相应的比值至少低四倍。他还发现在地壳及上地幔中，K,Rb,Cs 的丰度相对于 Ba,Sr,U 来说，也比球粒陨石低得多。他提出的一个解释

是，在球粒陨石中，碱金属如 K,Rb,Cs 等可能由于容易挥发，在地球形成之前就已有所丢失。这就意味着，地球的组成与原来的球粒陨石并不一样。林伍德 (A. E. Ringwood) 支持这个观点并加以发展。他的研究表明，地球相对于太阳星云中的原始物质来说，有一系列元素都是短缺的，而这些元素在高温、还原的情况下都是比较容易挥发的。于是地球组成的球粒陨石模式就难于成立了。但在另一方面，人们发现，有一种特殊的球粒陨石，叫做第一类含碳球粒陨石，它所缺失的元素比普通的球粒陨石要少得多。它与太阳光球相比时，所含的元素，除了最易挥发的 H,He,C,N,O 和隋性气体外，几乎丰度全是一样的。这种陨石的演化历史比较简单，似乎仍保留太阳星云中原始物质的相对丰度，可以做为讨论地球化学组成时更好的模式。现在许多人认为地球中不挥发的元素(即挥发性小于 Na 的元素)的相对丰度与第一类含碳球粒陨石是相似的。

地幔顶部地震波速度几乎各处相等，V_p 总是在 8.1 公里/秒左右。这个特点以及岩石化学的考虑限制了地幔上部的矿物成分只能是橄榄石、辉石、石榴石和闪石的某种组合。由这些矿物造成的两种最重要的岩石就是橄榄岩(橄榄石—辉石)和榴辉岩 (辉石—石榴石)，两种都可能含有闪石。橄榄岩的密度约为 3.3 克/厘米^3，榴辉岩约为 3.5 克/厘米^3。上地幔的密度估计为 3.3 至 3.4 之间，所以近于橄榄岩。地震波速度的各向异性也支持介质主要是橄榄岩。从岩石学的观测来看，由深部来的包裹体和由地幔来的侵入体多数是以橄榄岩为主要成分。当然这并不排斥上地幔也含有少量的榴辉岩和其他岩石，但它们只占次要地位。

上地幔顶部存在着一层橄榄岩性质的岩石；地面各处又观测到大量喷发的玄武岩。玄武岩岩浆是上地幔物质部分熔融所产生的。但不能由此得出结论：玄武岩是由橄榄岩部分熔融所产生的，因为橄榄岩所含的“不相容元素”如 K,U,Th,Ba,Rb,La,Ti,P 等的丰度远不足以产生玄武岩的岩浆。合理的推论是：玄武岩和橄榄岩都是由另一种母岩产生的。当这种母岩发生部分熔融时，其熔化部分产生玄武岩岩浆，未熔(耐火)部分产生橄榄岩，二者是相辅的关系。这个更原始的母岩叫做地幔岩 (pyrolite)，它的成分介于玄武岩与橄榄岩之间。人们在地面上观测到不同成分的玄武岩套，这和产生它们的地幔岩熔化程度有关系。例如霞岩和碧玄岩是 1—5% 的熔化产生的，碱性玄武岩是 5—10% 的熔化产生的，拉斑玄武岩是 15—25% 的熔化产生的，而最近在非洲发现的柯马蒂玄武岩 (komatiite) 则是地幔岩经过 30—60% 的部分熔化所产生的。与此相应的耐火部分则形成了橄榄岩套：二辉橄榄岩，方辉橄榄岩和纯橄榄岩。地幔岩原是一种假想的岩石，它的成分本不十分确定。不过利用实验岩石学的方法并参考天然的玄武岩套和橄榄岩套的成分，地幔岩的成分可以限制在一定范围之内。上表给出它的平均主要成分。对于大多数主要元素和相容的痕量元素，地幔岩成分变化不大。但对于不相容的痕量元素可能变化范围很大。

表 12.3 地幔岩的平均主要成分

SiO_2	45.1	MnO	0.15	K_2O	0.03
TiO_2	0.2	NiO	0.2	P_2O_5	0.02
Al_2O_3	3.3	MgO	38.1		
Cr_2O_3	0.4	CaO	3.1	$\frac{MgO}{MgO+FeO}$	0.89
FeO	8.0	Na_2O	0.4		

用地幔岩作为上地幔上部成分的模式是有观测和实验根据的，但它是否也适用于更深的部分还需进一步的考虑。*B* 层中的地震波速度随深度均匀增加可以认为是介质压缩的结果，物质的组成未变。*C* 层则不然。在 400 至 1000 公里的深度范围内，速度的分布曲线是弯曲的，表明速度的增加不仅由于重力压缩，而且有化学成分或晶体结构的变化，不过伯奇（F. Birch, 1952）很早就指出，*C* 层的不均匀性主要是由于矿物在超过一定的温度和压力时就变得不稳定而产生多形相变；化学变化如果存在，也只起次要的作用。以后实验岩石学的工作证明这个预见是基本正确的。现代的地震波速度分布图上（图 12.10），在约 400 和 650 公里深度，速度梯度有两个明显的间断性变化并各伴有一定的密度跳跃。除此之外，上地幔中还存在一些较小的突变。假定上地幔的物质是地幔岩，实验证明，在 350—420 公里的深度和约 1000℃ 的温度下，橄榄石将过渡到 β 相，并产生速度

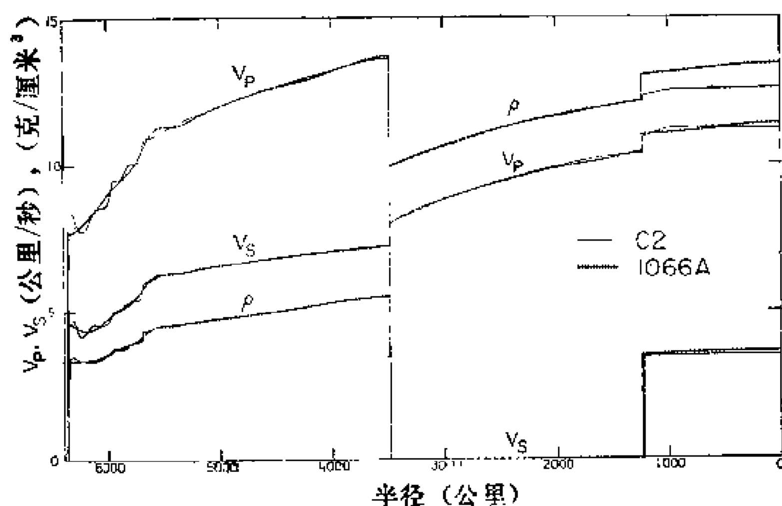


图 12.10 两种地球内部的速度结构

和密度的突变。在约 550 公里的深度，β 相将过渡到尖晶石的结构。到了 650 公里的深度，介质的橄榄石部分就由尖晶石结构过渡到钙钛矿结构加盐岩结构的混合物，其辉石和石榴石部分则过渡到钛铁矿的结构。这又产生速度和密度的突变。其他较小的速度突变也都可以用相变来解释。现代的速度模式比图 12.1 要复杂多了，而各家的结果在大同中仍有小异，对于具体的解释也不无分歧，不过地幔岩的解释似乎是比较满意的一个。

到了一千公里深度以下，速度梯度的变化不大；约到 2700—2900 公里的深度时，梯度几近于零。这层介质是比较均匀的，速度和密度的增加主要是重力压缩的结果。伯奇曾以为在下地幔的温度和压力下，物质只能歧化（disproportionate）为简单的氧化物，所以那里的矿物成分将是方镁石（MgO）、超石英（SiO_2）一类的氧化物的混合物。不过这样的下地幔还不足以解释所观测到的速度和密度，因此也有人认为下地幔与上地幔相比，除了相变之外，还必须有化学成分的变化，特别是增加铁的含量。由于地幔底部的压力已经在一百万大气压以上，要验证以上的设想，以前只能借助于冲击波的暂态试验和晶体结构相似的矿物的对比。近年来，高压技术大有改进，静态的下地幔情况已经可以在实验室中模拟。虽然结果的解释还有分歧，但可肯定地幔物质在高温高压下，可以歧化成高压相的氧

化物的混合物或岩盐加钙钛矿结构的晶体。在此之前，还可能发生一些中间性的相变和部分歧化。根据刘林根的结果，如果上地幔的组成是地幔岩，则由于相变，下地幔的矿物成分将主要是斜方系钙钛矿相的 (Mg,Fe,Al)(Al,Si)O_3，约占总质量的 70%。还有约 20% 是岩盐相 (Mg,Fe)O。有迹象表明，比斜方钙钛矿相还重的晶体结构也是可能的。以上这些矿相都可以给出所观测到的速度和密度。因此可以认为地幔岩的模式不但适用于上地幔，也适用于下地幔，虽然在下地幔中，次要的化学变化也不是不可能的。

关于地核的化学成分，很早以前人们就认为主要是铁，不过那是由一个错误的前提而得出的推论，即地磁场是由一个巨大的铁核产生的。由于地球内部的高温，这种设想显然不能成立。但是地核是由铁镍组成的却仍有可靠的依据。由太阳系和宇宙空间元素的丰度，可以推断地球内部应含有大量的铁。陨石和行星是同一来源，陨石很可能是行星的碎片。石质陨石与铁质陨石可以与地幔地核作对比。更直接的根据是地震波速度与地球内部的密度也与铁镍的地核最为符合。虽然如此，铁核的概念也曾引起过严重的怀疑。1941 年，有人提出在核-幔边界的压力下，氢元素可能被压成金属的状态，而地核的成分可能就是金属氢。这个假说以后被否定了，因为那里的压力还不够大，并且那样形成的相变分界面也不可能很尖锐。1948 年，有人提出地核可能是硅酸盐物质的一种高压相。地幔物质可能失去了电子壳层而变成一种高密度、低熔点和高电导率的物质。这个假说曾一度引人注意，但因以下事实而逐渐失去说服力。利用爆炸的冲击波可以产生几百万大气压的暂时状态。这样可以近似地得到在极高压力下，物质密度 ρ 与压力 p 的关系，从而得到 $dp/d\rho$。这个量的平方根近似地等于纵波速度。图 12.11 是伯奇得到的各种元素的密度在高压下与 $dp/d\rho$ 的关系曲线。图中的数字是原子量，虚线相当于地幔与地核，A 点是在 240 万大气压下，橄榄石的数据。由图可见，地核的位置与铁族金属很近，但和轻金属相距甚远。这就否定了上述的假想。这是铁镍地核最令人信服的证据。然而，仔细的观测表明，外核的密度要比同样温、压条件下的铁、镍合金小，而速度却比纯铁高。一般认为这意味着地核中除铁、镍外，还含有 5—15% 的轻元素。硅、硫和氧都有人讨论过，但地球化学家尚未取得一致的意见。

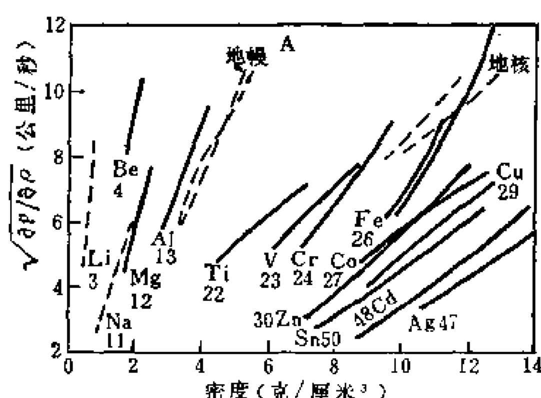


图 12.11　在地球深部的情况下各种元素的密度与 $dp/d\rho$ 的关系

四、地球的密度

地球的密度分布是一个经典的问题。十九世纪时，人们都认为地球是由液体凝固而成的，于是它的密度分布必然和它的形状有密切的关系。许多数学家和物理学家都从这个角度来探讨这个问题，但是都没有得到满意的结果。直到本世纪三十年代，由于布伦 (K. E. Bullen) 的研究，这个问题才开始突破。地球的密度分布和许多地球物理现象都有关系，到现在仍是地球物理学家所关心的课题。

（一）经典的地球密度分布规律

地球是一个转动的扁球体，上层岩石的密度约只有平均密度的一半，所以密度必然随深度增加。如果地球是均匀的，它的转动惯量 I 应等于 $\frac{2}{5}Ma^2=0.4Ma^2$，M 和 a 各为地球的质量和平均半径，但观测结果只有 $0.33Ma^2$，表明地球的质量是向地心集中。

地球的平均密度 ρ_m 是不难计算的。根据第二章的结果，重力加速度 g 的一级近似为

$$g=\frac{GM}{a^2}\left\{\left(1-\frac{2}{3}m\right)-\left(\frac{5}{2}m-e\right)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)\right\}。$$

θ 是地心余纬度，$m=\omega^2a^3/GM$。若在 $\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处的重力值为 g_1，则

$$GM\approx a^2g_1\left(1+\frac{2}{3}m\right)。$$

G,m,g_1 都是可以独立测得的。于是可以得 M，从而计算 ρ_m。这样便得到

$$\rho_m=5.515\ \text{克/厘米}^3。$$

但若求密度的分布 $\rho=\rho(a)$，就完全是另一回事了。直到十九世纪末，许多学者对待这个问题都是从怎样求解克雷若（A. C. Clairaut, 1743）微分方程着手。假定地球原是一团转动的流体，内部达到平衡状态，因此等密度面、等位面和等压面都重合，并且都是扁率很小的扁球面，其平均半径和扁率各为 a 和 e。ρ 和 e 都是 a 的连续函数并在 $a=0$ 时为有限。ω^2 和 e 都是小数。若将它们的高级项略去，克雷若得到

$$\frac{d^2e}{da^2}+\frac{2\rho a^2}{\int_0^a\rho a^2da}\frac{de}{da}+\left(\frac{2\rho a}{\int_0^a\rho a^2da}-\frac{6}{a^2}\right)e=0。\tag{12.1}$$

在这个方程中，$\rho=\rho(a)$ 是一个未知函数。若给定了这个函数，则求解一个二阶微分方程还需两个条件。普通用的条件是：① 地心的扁率是一个有限值；②由地球内部的平衡条件，应有关系

$$\frac{a_1}{e_1}\left(\frac{de}{da}\right)_1=\frac{5}{2}\frac{m_1}{e_1}-2,$$

脚标 1 表示地面上的数值。由这两个条件，可以解（12.1），因而得到地面扁率 e_1。但是 e_1 是可以直接测定的，所以可用它来验证密度定律是否正确。除此之外，由 $\rho=\rho(a)$，还可以计算 ρ_1，ρ_m 和 I 以及岁差常数 H，因为

$$H=\frac{C-A}{C}=\left(e_1-\frac{m_1}{2}\right)\frac{\int_0^a\rho a^2da}{\int_0^{a_1}\rho a^4da}。$$

而这些数值都是可以直接测定的。以下简述几个著名的尝试。

1. 勒让德-拉普拉斯定律

设

$$e\int_0^a\rho a^2da=Ay。$$

A 是一常数，则克雷若方程可以写为

$$\frac{d^2y}{da^2}=\left(\frac{a^2\dfrac{d\rho}{da}}{\int_0^a \rho a^2 da}+\frac{6}{a^2}\right)y。\tag{12.2}$$

若取 $\rho=\rho(a)$ 以使

$$a^2\frac{d\rho}{da}+n^2\int_0^a \rho a^2 da=0。\tag{12.3}$$

则式(12.2)可以化简。式(12.3)的解是

$$\rho a=c\sin(na+b),$$

n, c, b 都是常数。当 $a=0$ 时，ρ 是有限值，故 $b=0$，

$$\rho=c\frac{\sin na}{a}。\tag{12.4}$$

这就是著名勒让德(1793)—拉普拉斯(1825)密度定律。利用这个定律和以前说过的边界条件，式(12.1)可以完全解出，结果是

$$e=\frac{5n}{2}\frac{(\tan n-n)^2}{(n^2-2)\tan^2 n+n\tan n+n^2}\frac{(3-n^2a^2)\tan na-3na}{n^2a^2(\tan na-na)},$$

$$\rho_m=3c\frac{\sin n-n\cos n}{n^3}。$$

式(12.4)含有两个常数 c 和 n，可以由三个观测值 ρ_1, ρ_m, e_1 之中的任何两个来确定，但这样得到的结果不能满足岁差的条件。

2. 若氏 (E. Roch)，李普希次 (R. O. Lipschitz) 和雷维 (M.Lévy) 的定律

克雷若方程可以改写成以下形式：

$$\frac{1}{6}a^2\frac{d^2e}{da^2}-e+\frac{a^3\rho}{3\int_0^a \rho a^2 da}\left(a\frac{de}{da}+e\right)=0。\tag{12.5}$$

令

$$\frac{3\int_0^a \rho a^2 da}{a^3}=\rho_m=\rho_0(1-ka^\lambda)^\mu。$$

ρ_0, k, λ, μ 都是常数。求微商，得

$$3\rho a^2=\rho_0\frac{d}{da}\{a^3(1-ka^\lambda)^\mu\},$$

故

$$\rho=\rho_0(1-ka^\lambda)^{\mu-1}\left[1-ka^\lambda\left(1+\frac{\lambda\mu}{3}\right)\right]。\tag{12.6}$$

这个定律首先是由雷维(1888)得到的。将(12.6)代入(12.5)，得

$$\frac{1}{6}a^2\frac{d^2e}{da^2}-e+\frac{1-ka^\lambda(1+\lambda\mu/3)}{1-ka^\lambda}\left(a\frac{de}{da}+e\right)=0。$$

这个方程的解是一超几何级数 F，

$$e=AF(\alpha, \beta, \gamma, x)。$$

A是一常数可以由边界条件确定，$x = ka^{\lambda}$，$\alpha\beta = \frac{2\mu}{\lambda}$，$\alpha+\beta = \frac{5}{\lambda}+2\mu$，$\gamma = \frac{5}{\lambda}+1$。

地球内部可以几近地认为处于流体静平衡的状态。略去扁率及转动的影响，立得

$$\nabla p = \rho \nabla \phi = -\rho g。$$

ϕ是重力位。由此可见，p和ρ都是a的函数，故彼此有函数关系，而可写 $dp = \psi(\rho)d\rho$。

$$dp = -\rho g da = -\frac{4\pi G\rho\int_0^a \rho a^2 da}{a^2} da = \psi(\rho)d\rho。 \tag{12.7}$$

拉普拉斯取 $\psi(\rho) = h\rho$，则上式化为

$$\frac{a^2\frac{d\rho}{da}}{\int_0^a \rho a^2 da} + \frac{4\pi G}{h} = 0。 \tag{12.3a}$$

此式与(12.3)形式一样，因此得到定律(12.4)。若氏则假定

$$\psi(\rho) = \frac{dp}{d\rho} = h\rho + h'\rho^2。$$

代入(12.7)，得

$$\frac{d}{da}\left[a^2(h+h'\rho)\frac{d\rho}{da}\right] + 4\pi G\rho a^2 = 0。$$

若氏不求通解而令

$$\rho = \rho_0(1 - k_1 a^2)。 \tag{12.8}$$

代入(12.7)，使a^2和a^4的系数各等于零，得

$$\rho_0 = 3h/h'，\ k_1 = 4\pi G/15h。$$

若氏定律(12.8)含有两个参量ρ_0和k_1，它和勒让德定律有相同的缺点。

李普希次将(12.8)式略加推广，令

$$\rho = \rho_0(1 - ka^{\lambda})。 \tag{12.9}$$

上式有三个参数ρ_0，k，λ，但仍不能满足所有的给定条件。从形式上看，(12.8)，(12.9)两式都是(12.6)式的特例。将(12.9)代入克雷若方程，可解出e，仍得一超几何级数：

$$e = AF\left(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ \frac{3k}{\lambda+3}a^{\lambda}\right)。$$

式中

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\lambda}(5\pm\sqrt{25+12\lambda+4\lambda^2})，$$

$$\gamma = 5/\lambda。$$

雷维定律有四个参数，看来似乎可以调整它们以适合四个观测条件，但事实上，无论μ取什么数值，都不能使计算的 $(C-A)/C$ 与岁差的观测相符合。普恩加莱 (H. Poincaré, 1888) 曾证明，若假定地球内为流体而密度变化是连续的，则同时满足表面扁率和岁差的观测是不可能的。

3. 达尔文（G. H. Darwin, 1884）定律

这也是带有两个参数的定律，形式比较简单：

$$\rho = Aa^{-n}(0 < n < 3)。 \qquad (12.10)$$

若 $n = 0$，则密度是均匀的；$n = 3$ 导致地球质量为无限；$n > 3$ 导致地球质量为负值。所以都须排除。由(12.10)可得

$$\rho_m = \rho\left(1 - \frac{n}{3}\right)^{-1}$$

故 ρ/ρ_m 是一常数。达氏定律在计算上有许多方便之处，但最重要的缺点是当 a 减小时，ρ 无限增大。

4. 维歇特（E. Wiechert, 1897）定律

以上介绍的定律有一个共同的缺点，即它们都来源于算学上的假定，而没有物理的依据。它们都不是物理定律！首先，将 $\rho = \rho(a)$ 看成一个连续函数就是一个似是而非的假定。最早由地球的实际出发来考虑地球密度问题的是维歇特，他也就是最早提出地球核的地球物理学家。

维歇特假定地球分为两层，每层密度都是均匀的。较密的内层密度是 ρ_0，外层密度是 ρ_1；内层的半径是 a_0，外层的半径是 a_1。令

$$a_0 = \alpha a_1,$$
$$\rho_0 = \rho_1(1 + \mu)。$$

故地球的质量 M 为

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_1 a_1^3(1 + \mu\alpha^3)。$$

转动惯量 C 为

$$C = \frac{8}{15}\pi\rho_1 a_1^5(1 + \mu\alpha^5)。$$

由观测结果知

$$C = 0.334Ma_1^2。$$

将上式代入

$$\frac{2}{5}\,\frac{1 + \mu\alpha^5}{1 + \mu\alpha^3} = 0.334 \approx \frac{1}{3},$$

或

$$\frac{1}{\mu} \approx 5\alpha^3 - 6\alpha^5。$$

知道 α，可以求 μ；知道 μ 和 ρ_m，便可求 ρ_0，ρ_1。根据当时的资料，维氏取 $\alpha = 0.779$，$\rho_m = 5.58$ 克/厘米^3，得 $\mu = 1.63$，$\rho_0 = 8.2$ 克/厘米^3，$\rho_1 = 3.2$ 克/厘米^3。若用以后古登堡的数值 $\alpha = 0.545$ 及 $\rho_m = 5.53$，则可得

$$\mu = 1.821,\ \rho_0 = 12.04\ 克/厘米^3,\ \rho_1 = 4.27\ 克/厘米^3。$$

维歇特的结果现在只有历史意义了，但他的方法在地球密度的探讨中是一个重要的里程碑。

（二）布伦的方法

因为旋转和扁率对于密度的影响不大，此处只考虑一个处于静压力平衡的球对称的地球。布伦的基本出发点是地震纵波和横波随深度的分布。这是由地震观测计算出来的。按定义，

$$V_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{k_s + \frac{4}{3}\mu}{\rho},$$

$$V_S^2 = \frac{\mu}{\rho}。$$

k_s 是绝热的容积弹性模量，

$$k_s = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s。$$

故

$$V_P^2 - \frac{4}{3}V_S^2 = \frac{k_s}{\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \varphi。$$

静压力平衡条件是

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho = -\frac{G\rho m}{r^2} = -\frac{G\rho}{r^2}\int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

在绝热条件下，

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dr} = -\frac{g\rho}{\phi} = -\frac{G\rho}{\phi r^2}\int_0^r 4\pi r^2 \rho dr。 \tag{12.11}$$

若地球不是完全绝热的，则内部的温度梯度 $\frac{dT}{dz}$ 与绝热的温度梯度 $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s$ 略有差别，设其为 τ。则

$$\tau = \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} = -\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dr}。$$

但

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \Big/ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p。$$

式中，

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

是膨胀系数，故

$$\tau = \frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)\frac{ds}{dr},$$

故

$$\frac{d\rho}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dr} = -\frac{g\rho}{\phi} + \alpha\rho\tau。 \tag{12.12}$$

式（12.11）是威廉姆森和阿达姆斯（E. D. Williamson & L. H. Adams, 1923）首先推

出来的。式 (12.12) 是伯奇 (1952) 对威-阿方程的校正。实际上，式 (12.12) 右端的第二项只是在地球上层略有影响，一般是可以忽略的。

除了温度的校正外，布伦(1967)还对式(12.12)作了不均匀性的校正。他假定状态方程中，除了 p, S 外，还包括原子序数 Z。由于化学不均匀性，Z 随 r 而有变化。于是式 (12.12) 需增补为

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\rho}{\phi} + \alpha\rho\tau + \frac{\partial\rho}{\partial Z}\frac{dZ}{dr}$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial r}\left[1 - \frac{\alpha\tau\phi}{g} - \frac{\phi}{g\rho}\frac{\partial\rho}{\partial Z}\frac{dZ}{\partial r}\right] = \eta\frac{\partial\rho}{\partial r}, \tag{12.13}$$

$$\eta = \frac{d\rho}{dr}\bigg/\frac{\partial\rho}{\partial r} = 1 - \frac{\alpha\tau\phi}{g} - \frac{\phi}{g\rho}\frac{d\rho}{dZ}\frac{dZ}{dr}。 \tag{12.14}$$

η 是表明偏离绝热状态与均匀状态的一个指标。当变化是绝热的而介质是化学均匀的时候，τ 及 $\frac{dZ}{dr}$ 皆为零，$\eta = 1$。

η 值可以由观测直接求到。由 $\phi = \frac{k_s}{\rho}$，立得

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\phi}\frac{dk_s}{dp} - \frac{\rho}{\phi}\frac{d\phi}{dp},$$

$$\eta = \frac{d\rho}{dp}\bigg/\frac{\partial\rho}{\partial p} = \frac{k_s}{\rho}\frac{d\rho}{dp} = \frac{dk_s}{dp} - \rho\frac{d\phi}{dp}$$

$$= \frac{dk_s}{dp} + \frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr}。 \tag{12.15}$$

而右端两项全是可以观测的。由(12.15)可得

$$\frac{dk_s}{dp} = \eta - \frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr} = 1 - \frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr} + \phi\frac{\partial\rho}{\partial Z}\frac{dZ}{dp} - \frac{\alpha\tau\phi}{g}。 \tag{12.16}$$

η 对于化学组成的变化相当敏感。布伦指出，在 D 层，若化学变化使在 100 公里厚度内 ρ 增加 1 克/厘米^3，则 $(\partial\rho/\partial Z)dZ/dz \approx 10^{-7}$ 克/厘米^4，而 $(\partial\rho/\partial p)dp/dz$ 仅约为 $10^{-9}\times 5$ 克/厘米^4。此时 η 约为 20。

由于 $\phi = \phi(r)$ 可以由地震观测来确定，所以在化学上均匀的地区，式 (12.11) 可以数值积分。温度的影响不大，初步计算也可忽略。布伦由 1936 年起直到六十年代在这方面做过一系列研究，奠定了地球内部密度分布的基本模式。他在 B, D, E 各层应用 (12.11) 式求积分，在其他各层则用简单的算式来代替。为了确定具体的分布，必须利用一些限制条件，其中最重要的是地球的总质量 M (5.973×10^{27} 克) 和转动惯量 I ($0.3308Ma^2$)。在他的 A'' 模式中，布伦假定 B 层顶部的密度为 3.32 克/厘米^3。在 C 层，由于式 (12.11) 不能应用，假定 $\rho = c_1 + c_2r + c_3r^2$ D 层及 E 层顶部的密度各假定为 c_4 及 c_5。在 B-C 边界，ρ 假定为连续；在 C-D 边界，ρ 及 $\frac{d\rho}{dr}$ 都假定为连续。这样，在五个 c_i 中就有三个条件。于是直到 E 层底部的密度分布中，只有两个独立的待定参数。在 E-F 边界，ρ 假定是连续的。在 F 层中，ρ 随深度的增加假定是线性的，其在 F 中的总增加量设为 Δ_1；在 F-G 边界，ρ 不连续地增加了 Δ_2；设 $\Delta_1 = \Delta_2$。在 G 层内，设密度为若氏分布；在地心，设 $\rho_0 = 12.51$ 克/厘米^3。连同已知的 M 和 I_1 做为限制条件，这个密度

表 12.4　布伦的模型 A″

层	深度（公里）	V_P（公里/秒）	V_S（公里/秒）	ρ（克/厘米³）	p	k（兆巴）	μ	g（10² 伽）	
	0								
A	33	(6.30)	(3.55)	(2.84)		(0.65)	(0.36)	9.822	
B		7.75	4.35	3.32	0.009	1.15	0.63	9.846	
	413	8.97	4.96	3.64	0.141	1.73	0.90	9.960	
C	984	11.42	6.35	4.55	0.379	3.49	1.83	9.966	
	2000	12.79	6.92	5.11	0.87	5.10	2.45	10.01	
D	2898	13.64	7.30	5.56	1.36	6.39	2.97	10.73	
	2898	8.10	0	9.98	1.36	6.55	0	10.73	10.73
E	4000	9.51	0	11.42	2.47	10.33	0	7.88	7.87
	4980	10.44		12.17	3.20	13.26	0	4.78	4.78
F	5120	9.40		12.25	3.26			4.31	
G	5120	11.16		12.25	3.28				
	6371	11.31		12.51	3.61				

分布就完全确定。布伦还讨论过温度和化学不均匀性的影响，由于量级很小，此处就从略了。另一方面，从容积弹性模量 k 及其变化率的考虑，布伦还提出另一类模式，叫做 B 模式。虽然在绝对数值方面，两类模式相差不多，但 B 模式的理论基础略见逊色，未被普遍采用，此处也从略。知道了 ρ 的分布，则从 V_P 和 V_S 的分布立刻可以得到 k 和 μ 的分布。又从 $dp = g\rho dz$ 和 $g = Gm/r^2$，利用数值积分，可以得到 p 和 g 的深度分布。值得注意的是，直到 2400 公里的深度，g 和 990 伽的偏离不到 1%，所以可以几近地看做常数。在地核中，g 单调下降，在地心为零。

（三）地球的自由振荡

在第十章已经推导过地球振荡的理论，此处只讨论它的应用。在大地震时，许多简正振型都会被激发起来，而每一振型的周期都和地球的内部构造有关系，即是说和地球的 (ρ, k, μ) 或 (ρ, V_P, V_S) 的分布有关系，于是每一观测到的周期都给这些参数的分布提出一个限制条件。初看起来，似乎由速度分布反演密度分布这样便可得到精确的解答。其实不然！因为反演的不唯一性并未消除。但是自由振荡的观测至少可起以下的重要作用：①验证已有的密度模式的可靠性；②提示已有的模式应如何修订；③有时对某些特殊现象可提供解释的线索；④对建立标准模式有所帮助。以下就几个特殊问题讨论自由振荡的应用。

1. 横波的模式与地核半径

在 1960 年智利大地震之后，麦唐纳和内斯 (G. J. F. MacDonald & N. F. Ness, 1961) 利用自由振荡资料反演一个地幔中 S 波分布模式。在下地幔中，这个模式和杰弗瑞斯的模式约有 1% 的偏离。这意味着，S 的走时最大可能相差 25 秒。这是不可能的。为了解决这个分歧，或是将地幔底部的 V_S 减低，或是将地核半径 r_c 加大；其实两种影响都存在。杰弗瑞斯采用的 r_c 为 3473±3 公里，地幔底部的 V_S 为7.3 公里/秒。近年来这两个数据都

经过了反复的修订。在安德生和秋旺斯基 (D. L. Anderson & A. M. Dziewonski) 于1981 年提出的地球标准模型中,这两个数据各取为 3480 公里和 6.9 公里/秒。

2. 基 线 问 题

在用地球自由振荡和地震体波资料所得到的地幔模式中, S 的走时可能相差到 4—8 秒,这是使人困惑的。不过大陆和海洋下面的地幔中,波速结构可能有所不同,但体波资料大部来自陆上的台站,所以绝对的地震波走时资料是有偏倚的。在远震距离,这种偏倚表现在时-距关系上,几乎是一个常项,叫做基线误差。为了消除这个误差,走时资料常采用两个震相的差分,例如 P_cP-P, S_cS-S 等等。也有人只采用"纯途径"的地震波以与地球自由振荡的资料相对比,这样他们得到大陆与海洋下面地幔的差别必须延伸到四、五百公里以下。

但另一方面,近年观测表明,地球介质中的能量吸收所产生的频散是不容忽视的。吸收和频散都与频率有关系。体波的走时和振荡的周期现在的观测精度都高于 0.1%,而在地震频率范围内 (10^{-4}—10^{1} 赫),频散的影响可达到 1%。所以由于地球介质非弹性的影响,从地震体波所测得的弹性常数不能直接和面波、自由振荡和超声波相比较,必须加以校正。这种校正和地球内部 Q 值分布的模式有关系,而后者的研究现在还很不够。无论地震波资料或是自由振荡的资料都需要基线校正。从现有的资料出发,校正后所反演的模式要一致多了。

3. 反演问题和密度分布的争论

由地震和其他资料来推导地球内部某些物理性质的分布称为反演。熟知的例子就是根据地面上观测到的地震波走时来推导地球内部地震波速度的分布。如果 $dV/dr < V/r$ 而 V 又是连续变化的,这个问题的解答是确定的(唯一的),但实际的反演问题的解答常常不唯一。利用电子计算机,现在解反演问题常用试-错法以求从大量的模式中找到最满意的答案,不过不同的作者虽用相同的资料也常得到极不一致的结果。这是因为观测资料多少总带有误差而且常不够充分,不同作者在选取和处理这些资料时所用的原则也有不同。除此之外,更重要的是即使给定同样的资料,理论上也不能证明反演的结果必然唯一。事实上,反演问题的解可能唯一,可能不唯一,也可能准唯一,即是说在一定条件下才能唯一,例如在上例中,即使 V 为连续,若 $dV/dr < V/r$,解是唯一的,若这个条件不能满足,解就不唯一。然而这是一个特殊简单的例子,因为所得到的积分方程恰好有一个确定的解,所以它的唯一性的条件容易判断。如果不是这样,解的唯一性是很难证明的。

解地球内部模式的反演问题,现在常用的有两种方法。一种叫模式改进法 (model refinement)。这是先选取一个能满足有限数据的模式,使模式中的参数发生微扰以满足更多的数据,直至模式可以最大限度地满足所有数据为止。这个方法与所选取的初始模式极有关系。地球自由振荡不同振型的周期现在可以识别出一千多个。结合地震波的数据后,现在提出的地球模式为数也很多。可惜的是,即使采用同样的数据,反演的结果有时竟相差不小。原因是地球自由振荡数据虽多,但还是不够完全,特别对上地幔的分辨力较差。这种数据不仅支持局部的解,也支持全局的解 (global or G-far solution)。模式改进法可能导致某一局部解而将较远的其他局部解漏掉。

另一种方法叫蒙特卡洛法（Monte Carlo Method）。它利用一切可以掌握的观测数据，用电子计算机随机地产生大量的可能模式。这些模式必须层层通过事先确定好的某些限制条件的检验。普瑞斯（F. Press, 1968, 1970, 1972）使用这个方法得到引人注目的结果。他的资料包括地球的质量和转动惯量，地震体波的走时，面波的频散，大量的自由振荡周期；他的限制条件包括他对当时地球物理观测的评价，例如 ρ 和 V 必须在一定范围之内，地内间断面的数目，地核半径的变化不超过 3473±25 公里等等。利用大型电子计算机，他随机地产生了几百万个模式，但最后能通过各种检验的只不过 27 个。他的结果证实上地幔必须有横波的低速层，深度为 150—250 公里。地核顶部的密度约为 9.9 －10.2 克/厘米^3。但在普瑞斯所有的模式中，在 70—150 公里深度范围内，地幔的密度不小于 3.4 克/厘米^3。对这个结论许多地球物理学家和地球化学家都表示怀疑。有人觉得也许蒙特卡洛方法本身在此不适用。经过安德生等人（R. S. Anderson et al., 1971,1972）的研究，证明问题不在方法本身，而是在选定的限制条件。普瑞斯在 300—600 公里的深度内，所给予V_S的上、下限太窄了，这就使得 70—150 公里处的密度太高了。

五、状态方程

地球介质中，密度 ρ 与压力 p 或温度 T 的关系叫做状态方程，但 p 和 T 都是不易直接测量的。根据地震观测，各深度的 V_P 和 V_S 是可以计算的(虽然精确度不高)。如果能将地震波速度做为表示状态的参数，而 p, T 的影响只隐函在速度之内，则这样的状态方程应用时将更方便。

（一）伯奇-莫尔那汗状态方程

根据实验的估计，地球内部物质的应变最大可达到 0.3，地幔中可达到 0.13，因此在本构方程中，应变的高次项有时不能忽略。伯奇（F. Birch, 1952）应用莫尔那罕（F. D. Murnaghan, 1937）的有限应变理论提出一个地球介质的状态方程，用以研究地下物质的弹性和不均匀性。

介质发生形变时，介质中各点的相互位置发生变化。设在形变之前，相邻两质点的向径是 dx_i'；形变之后，其向径是 dx_i。若以形变后的坐标为参考，则 $dx_i' = dx_i - du_i$，du_i 是两点的相对位移。设两点的距离在形变前、后各为 dl' 和 dl，则 $dl^2 = dx_i^2$，$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i - du_i)^2$。因 $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$（采用求和约定），故

$$dl'^2 = dl^2 - 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l,$$

式中脚标 i, k 各等于 1，2，3。上式右端第二项因系按 i, k 求和，故 $2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k$ 可以写成 $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k$。第三项的脚标 i, l 可以互换。于是得

$$dl'^2 = dl^2 - 2u_{ik} dx_i dx_k = (\delta_{ik} - 2u_{ik}) dx_i dx_k。$$

张量 u_{ik} 定义为

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)=\varepsilon_{ik},$$

称为应变张量，$\delta_{ik}=1$，当 $i=k$；$\delta_{ik}=0$，当 $i\neq k$。当介质是各向同性并处于流体静压力状态时，切应变等于零(在地球上层，情况并不如此；但在约一百公里深度以下，平均压力远远大于切应力，所以后者便可忽略了)。于是就有 $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon$，

$$dl'^2=(1-2\varepsilon)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)=(1-2\varepsilon)dl^2,$$

在压力下，ε 恒为负值，故用 $f=-\varepsilon$ 较为方便。故

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{v_0}{v}=\frac{dl'^3}{dl^3}=(1-2\varepsilon)^{3/2}=(1+2f)^{3/2}。\tag{12.17}$$

脚标"0"是未加应力时的数值。设 ϕ 为介质形变时的亥姆霍茨自由能，也即是形变能。当形变极小时，形变能是应变的二次多项式。当形变为有限时，莫尔那罕取

$$\phi=af^2+bf^3+cf^4+\cdots。\tag{12.18}$$

$a, b, c\cdots$只是温度的函数。由热力学公式 $P=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)_t$，得

$$p=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial f}\right)_T\frac{df}{dv}=\frac{1}{3v_0}(1+2f)^{5/2}(2af+3bf^2+\cdots)。\tag{12.19a}$$

根据(12.17)、(12.18)和容积弹性模量 $k_T=-v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$，(12.19a) 可以改写成

$$p=3k_0f(1+2f)^{5/2}(1-2\xi f)\tag{12.19b}$$

$$=\frac{3}{2}k_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{7/3}-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}\right]\left\{1-\xi\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}-1\right]+\cdots\right\}。\tag{12.19c}$$

k_0 是 k_T 在 $p\to 0$ 时的值，$\xi=\frac{3}{4}\left[4-\left(\frac{dk}{dp}\right)_{p\to 0}\right]$ 是高次项的校正，二者都只与温度有关。通过较繁但不难的计算还可得到

$$k=k_0(1+2f)^{5/2}[1+7f-2\xi f(2+9f)],$$

$$\left(\frac{dk}{dp}\right)_T=\frac{12+49f-2\xi(2+32f+81f^2)}{3+21f-6\xi f(2+9f)},\tag{12.20}$$

$$\phi=\phi_0(1+2f)[1+7f-2\xi f(2+9f)]。$$

上式中的 k 是指等温的。实验表明，在许多情况下，都可以取 $\xi=0$，这样 (12.19)，(12.20) 中各式都可以大大化简。式(12.19)即是伯奇 莫尔那罕状态方程。

(二) 球层的均匀性

在应用阿-威公式时，须假定球层是均匀的，即是说，密度和弹性的变化只是重力压缩和温度变化的结果，但如何检验均匀性，布伦的讨论只是形式的，但伯奇则由热力学的观点做了较深入的阐述。

根据定义

$$\frac{1}{k_t}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T,\ \alpha=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p。$$

k_t 是等温的容积弹性模量，α 是热膨胀系数，立得

$$\frac{d\rho}{dr}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dr}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dr}=-\frac{g\rho^2}{k_T}-\rho\alpha\frac{dT}{dr}。$$

利用热力学公式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{c_p},\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p=\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{c_p}\cdot\frac{\alpha}{\rho},$$

设 τ 为实际温度梯度与绝热温度梯度之差，则

$$\frac{dT}{dr}=-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dr}-\tau=-\frac{T\alpha g}{c_p}-\tau。$$

但由热力学公式，$k_T/k_S=1-T\alpha^2k_T/\rho c_p$，故

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dr}&=-\frac{g\rho^2}{k_T}\left(1-\frac{Tk_T\alpha^2}{\rho c_p}\right)+\alpha\rho\tau\\&=-\frac{g\rho^2}{k_S}+\alpha\rho\tau=-\frac{g\rho}{\phi}+\alpha\rho\tau。\end{aligned}$$

引入比值 $\gamma=\frac{\alpha k_S}{\rho c_p}$ [称为格林奈森 (Grüneisen)]常数，则上式化为

$$\frac{d\rho}{dr}=-\frac{g\rho}{\phi}(1-\alpha\phi\tau/g)=-\frac{g\rho}{\phi}(1-\gamma c_p\tau/g) \tag{12.21}$$

γ 的数值约为 1—2，取 $c_p\approx10^7$ 尔格/克·度，$g\approx10^3$ 伽，则当温度梯度偏离绝热值约 1°/公里时，则上式第二项约为第一项的 10—20%。所以即使对于均匀层，温度的校正也是可观的。

按照定义 $k_S=\phi\rho$。由此不难得到

$$1-\frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr}=\frac{dk_S}{dp}+\alpha\phi\tau/g。$$

其实右端第一项也隐函着温度的影响，因为

$$\begin{aligned}\frac{dk_S}{dp}&=\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dp}\\&=\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p\left[\frac{T\alpha}{\rho c_p}+\frac{\tau}{\rho g}\right]。\end{aligned}$$

因

$$\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s,$$

故上式可写为

$$\frac{dk_S}{dp}=\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_s+\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p\frac{\tau}{\rho g},$$

故

$$1-\frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr}=\left(\frac{\partial k_S}{\partial p}\right)_s+\frac{\tau\alpha\phi}{g}\left[1+\frac{1}{\alpha k_S}\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p\right]。 \tag{12.22}$$

利用 γ，可将 k_S 与 k_T 的关系写为

$$k_S=k_T(1+T\alpha\gamma),$$

代入上式，得

$$1-\frac{1}{g}\frac{d\phi}{dr}=\left(\frac{dk_T}{dp}\right)_T+T\alpha\gamma A+(T\alpha\gamma)^2B+\frac{\alpha\phi\tau}{g}C。 \tag{12.23}$$

式中

$$A = 2\left(\frac{\partial k_T}{\partial p}\right)_T - 1 + \gamma + \frac{3}{\alpha k_T}\left(\frac{\partial k_T}{\partial T}\right)_p,$$

$$B = \left(\frac{\partial k_T}{\partial p}\right)_T + \frac{3}{\alpha k_T}\left(\frac{\partial k_T}{\partial T}\right)_p + \frac{3}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p + 1 - \frac{1}{\alpha c_p}\left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_p,$$

$$c = 1 + \frac{1}{\alpha k_S}\left(\frac{\partial k_S}{\partial T}\right)_p = 1 + \gamma + \frac{1}{\alpha k_T}\left(\frac{\partial k_T}{\partial T}\right)_p + T\alpha\gamma\left[1 + \frac{1}{\alpha k_T}\left(\frac{\partial k_T}{\partial T}\right)_p + \frac{2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p - \frac{1}{\alpha c_p}\left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_p\right]。$$

$T\alpha\gamma$ 的数值很小，它的平方一般是可以忽略的，于是式(12.23)可以大大化简。上式右端的参数可以由实验结果取得，左端可以由地震观测计算。两端比较，可以对地层的均匀性做一些判断。

在上式中，右端最重要的是第一项。按照式(12.20)，取 $\xi = 0$，得

$$\left(\frac{dk_T}{dp}\right)_T = \frac{12 + 49f}{3(1 + 7f)}。\tag{12.24}$$

所以当压力极小时，$(dk_T/dp)_T$ 趋于 4。 伯奇将此式与 $1-g^{-1}(d\phi/dr)$ 比较，证实在1000—2900 公里深度之间，介质的变化只是一均匀层受到自身压缩的结果。他认为下地幔基本是均匀的，不存在重要的化学变化和相变。这个结论也适用于 $|\xi| < 1/2$。 但在300—900 公里之间，地震数据与均匀层的结果相差甚大，所以这个区域的物质是不均匀的。

设 $\xi = 0$，伯奇由式(12.20)计算 ϕ_0。对于下地幔物质，他得到 $\phi_0 = 60$ (公里/秒)^2。但对于上地幔中常见的矿物如橄榄石和辉石，ϕ_0 只各为 30 和 40 (公里/秒)^2。所以它们不是下地幔的成份。可是有些氧化物的 ϕ_0 值很高，如 Al_2O_3-69，MgO-47，TiO_2-50 等等。这些高 ϕ_0 值主要是由它们的晶体结构。所以伯奇认为下地幔的物质组成主要是一些紧密堆积的氧化矿物。对于过渡层（C 层），他认为这主要是一个相变层，可能还伴随一些化学变化。这些相变过程到了 900 公里的深度时就基本结束了。以下的矿物组合是稳定的，所以下地幔是均匀的。应当指出，伯奇的结论是在 1952 年做的。那时对于氧化物和硅酸盐的高压相变还知道得很少。辉石和橄榄石在高压下还可以有新的和更重的相那时还不知道。另外，在某些情况下，$\xi = 0$ 和略去状态方程中的三次项都可能导致一些误差。不过总的说来，伯奇的工作仍是地球内部研究的一个里程碑。

（三）速度与密度的关系

阿-威公式对于不均匀物质是不适用的，特别是 C 层。 然而这层却占地球总质量的25%，总转动惯量的 40%。 地球密度模式的合理与否在一定程度上取决于如何处理 C 层。可惜的是，以前的处理方法多少带有一些任意性。

伯奇 (1961) 观察了大量的岩石和矿物，发现它们的密度 ρ 和纵波速度 V_P 有一个线性关系：

$$V_P = a(\overline{M}) + b\rho。\tag{12.25}$$

式中的参数 a 只和平均原子量 M（分子量除以分子中的原子数目）有关系，b 是直线的斜

率，约为 3（公里/秒）/（克/厘米³）。对不同 $\bar{M}$ 的介质，得到不同的平行直线。这个关系，不管 ρ 的变化是由于压缩、相变或化学变化，伯奇都假设是适用的。这个假设并未得到严格的证明，但用于地幔却得到比较合理的结果，例如用它得到的 ρ 随 V_P 在下地幔的增加比用阿-威公式的结果要平稳，在地幔底部的密度比布伦模式 A 约小 0.4 克/厘米³。伯奇公式为研究 C 层提供了一个方法。以后其他学者对于横波 V_S 和冲击声波 $V_C\left(V_C^2 = V_P^2 - \frac{4}{3}V_S^2\right)$ 也发现类似的关系。

对于 $\bar{M} = 21—22$ 的岩石、矿物在低温条件下的等温压缩时，b 值约为 2.7—4.0，但有些常见的岩、矿如花岗岩和长石除外。在等压条件下，b 值约为 4—6。以后的试验表明伯奇的直线公式很可能是一个幂函数在有限的密度范围内一种线性化。有些作者从理论上可以证明

$$V = k(\bar{M})\rho^n,\ n = \gamma - \frac{1}{3} \tag{12.26}$$

γ 是格林奈森常数，约等于 1—2。伯奇公式相当于 $n = 1$，但对于许多氧化物的测试表明 n 更近于 1.5。不过由于数据相当分散，式(12.25)仍不失为很好的几近。

有许多理论上的论证可以将状态方程写成以下的形式：

$$p = (N - M)^{-1}k_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^N - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^M\right]。 \tag{12.27}$$

k_0 和 ρ_0 是初始的容积模量和密度。按 ρ 求微商，得

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = (N - M)^{-1}\frac{k_0}{\rho_0}\left[N\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{N-1} - M\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{M-1}\right]。$$

因 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \phi = \frac{k_S}{\rho}$，上式又可写成

$$\phi = \phi_0(N - M)^{-1}\left[N\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{N-1} - M\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{M-1}\right]。$$

若压缩甚小，即 $\Delta\rho \ll \rho_0$，则上式可写为

$$\frac{\partial \ln \phi}{\partial \ln \rho} = N + M - 1,$$

或

$$\rho = A\bar{M}\phi^n, n = 1/(N + M - 1)。 \tag{12.28}$$

安德森（D. L. Anderson）称式(12.28)为地震状态方程，因为 ϕ 或 k_S/ρ 完全可以由地震观测得到。对比式(12.27)和式(12.19)，可见若使 $N = \frac{7}{3}$，$M = \frac{5}{3}$，即得到伯奇-莫那罕状态方程。式(12.28)中的 n 值约为 $\frac{1}{4}—\frac{1}{3}$，与 γ 有关系。安德森证明式(12.28)可以适用于许多岩矿，从 $\bar{M} = 18$ 到 $\bar{M} = 90$。

由于 ϕ 和 k_S 的关系，有时讨论 k 与 ρ 的关系更方便些。由式(12.25)，若 V_P/V_S 和 $\bar{M}$ 等于常数，则

$$V_P \infty \sqrt{k_S/\rho} \infty \rho,$$

故

$$k_S \infty \rho^3。$$

但安德森（O. L. Anderson）总结许多氧化物（$\bar{M}\sim 21—22$）的数据，得到 $k_s\propto\rho^4$。这相当于 $V\propto\rho^{1.5}$。由幂函数定律也可以得到这个结果：

$$\frac{dk_s}{dv}=\frac{dk_s}{dp}\frac{dp}{dv}=-\frac{k_s}{v}\frac{dk_s}{dp}。$$

但 $dk_s/dp\approx$ 常数$=4$。故

$$\ln k_s=-4\ln v+常数。$$

故

$$k_s\propto v^{-4}=\rho^4。$$

由式(12.28)，令 $n=\frac{1}{3}$，也可得到 $k_s\propto\rho^4$。

压力的影响是不能忽视的。按照(12.20)或(12.24)，$\frac{dk_s}{dp}$ 的数值由零压下的4渐渐减低到高压下的3。这就意味着 $k_s\propto\rho^4$ 可以在深处变到 $k_s\propto\rho^5$。所以现在就存在两个定律：$k_s\propto\rho^4$ 和 $k_s\propto\rho^5$。究竟哪一个最适合于地幔还不很确定。前者对于低压低温下的岩石似乎更合适些，但是有不少例外。后者对于高压下的均匀介质比较合适，特别是对于均匀相的热膨胀可以适用。

六、地球的非弹性

地震学的理论发展主要是根据连续介质的弹性力学，然而地球介质的连续性和完全弹性只是两种几近。在有必要时，介质的不连续性和非完全弹性还是可以考虑的，不过计算要复杂多了。有孔介质的力学在勘探地球物理中是一个有意义的课题，此处不拟讨论。以下只讨论非弹性的问题。

地震波的振幅总是随时间或传播距离而有所衰减的，表明能量在介质中有消失。在一个吸收介质中，地震波传播必有频散，即是说，吸收和频散总是伴生的。这两种影响都不大，在早期的地震观测中，一般都忽略了。近年来，测震技术大有改进，时间精度可达到0.1%；但由于频散，波速的变化可达到1%，完全在观测限度之内。所以非弹性的效应就提到议事日程，不但在地震学，而且也在其他一些地球物理现象中也需要考虑。

（一）地球介质的品质因子 Q

实验表明，若介质的应变不超过 10^{-5} 或 10^{-6}，介质的应力，应变关系仍是线性的，不过须包括时间的变化，即是说 σ_{ik}，e_{ik}，$\dot{\sigma}_{ik}$，$\dot{e}_{ik}$ 是线性相关的。此时，迭加原理仍可应用，于是大大简化了计算。因此近一步的近似可以将地球看成一个连续线性体。对于这样的线性体，任一振动可通过富氏分析看成是许多简谐波的迭加并可应用 $\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow i\omega$。本构方程仍保持虎克定律的形式，不过弹性模量则成为复数，其实部相当于波的传播，虚部则相当于吸收。

测量吸收时，可用驻波，也可用行波。位移振幅 A 一般随时间而指数衰减，即 $A=A_0e^{-\gamma t}$，γ 称为衰减系数。在周期 T 时间，相邻两个同方向的振幅比值的自然对数称为对

数减缩△。对于驻波，显然 $\Delta = \gamma T$。对于行波，振幅也因几何扩散而减小，但这与介质的吸收无关，通常是与传播距离的某次方成反比。相当于能量消失的振幅衰减通常是传播距离的指数函数，即 $A = A_0 e^{-\alpha x}$，α 称为振幅的吸收系数。因能量与振幅的平方成比例，故能量的吸收系数为 2α。吸收系数是指空间变化，衰减系数是指时间变化。但这两个概念并不完全对称。测量驻波时，地点不变，但在测量行波时，时间并不固定。实际上是测量最大振幅传播到不同地点时的变化，而不是同一瞬时测量不同地点的振幅。如仍采用对数减缩的概念，也可以定义 Δ' 为在一个波长 λ 的距离，两个最大位移比值的自然对数，即 $\Delta' = \alpha\lambda$。

另一个表示能量消失的参数叫做品质因子，通常以字母 Q 表示，这个量是由电路学借用来的。它的定义是

$$Q^{-1} = \Delta E/2\pi E。\tag{12.29}$$

ΔE 是一定体积的介质经过一周的运动后所消耗的能量，E 是同一体积在一周运动中所存储的最大应变能。在地球物理文献中，Q 值用得越来越普遍，原因是 α 常和频率有关系，而 Q 与频率的关系则不那样显著(早期以为 Q 与 ω 无关，但现在发现并非如此)。

对弹性振动来说，弹性能比例于振幅 A 的平方。设相邻两振幅各为 A_1 和 A_2。则

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2} \approx \frac{2(A_1 - A_2)}{A_1} = 2\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \approx 2\ln\frac{A_1}{A_2} = 2\Delta,$$

即得

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{\gamma T}{\pi} = \frac{2\gamma}{\omega}。\tag{12.30}$$

取行波

$$\xi = Ae^{-\alpha x}\cos(\omega t - kx)。$$

则最大能量密度为

$$D = \omega^2 A^2 \rho e^{-2\alpha x}。$$

ρ 为介质的密度。能量流为

$$\phi = \omega^2 A^2 e^{-2\alpha x}\rho v。$$

v 为波的相速度。当波传播距离 δx 时，能流的消失率为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\delta x$。故每周的消失量为 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\delta x \Big/ \dfrac{\omega}{2\pi}$；存储的能量为 $D\delta x$。故

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4\pi\alpha v}{\omega} = \frac{2\pi}{Q},$$

或

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha v}{\omega} = \frac{\Delta'}{\pi}。\tag{12.31}$$

另一法求 Q 是利用共振。取阻尼振动方程

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f$$

γ 是阻尼常数，ω_0 是无阻尼时自由振动频率。有阻尼时，自由振动的解是

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}。$$

由此可见，γ 即是衰减系数，而自由振动的频率 ω_1 为

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

对数减缩为

$$\Delta = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\omega_1}。$$

若 $f = Ae^{i\omega t}$，则上式的解为

$$\xi = \frac{Ae^{i(\omega t-\varphi)}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\varphi = \tan^{-1} 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)。$$

相当于 ξ 最大值 ξ_m 的频率 ω_m 为

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 = \omega_1^2 - \gamma^2。$$

此时

$$|\xi_m| = \frac{A}{2\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}} = \frac{A}{2\gamma\omega_1}。$$

ξ 与 ω 的关系是一钟形曲线。ξ_m 值相当于 ω_m。 在其两边，ξ 值随 ω 的增减而减小。现求 ξ 减到 ξ_m 的 β 倍时所相应的 ω。由

$$\frac{1}{[(\omega_0 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{1}{\beta}\,\frac{1}{2\gamma\omega_1},$$

得

$$\omega^2 = \omega_m^2 \pm 2\gamma\omega_1(\beta^2 - 1)^{1/2},$$

或

$$\Delta\omega^2 = 4\gamma\omega_1(\beta^2 - 1)^{1/2}。$$

共振时，$\omega = \omega_1$，而 ξ_m 减小 β 倍时的频率宽度为

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\omega^2}{2\omega_1} = 2\gamma(\beta^2 - 1)^{1/2},$$

但 $\gamma = \frac{\omega_1}{2}Q^{-1}$。故

$$Q^{-1} = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}\,\frac{1}{(\beta^2 - 1)^{1/2}}。$$

共振曲线的宽度有不同的定义。若理解为位移曲线的宽度，则 $\beta = 2$，$Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_1}$。若理解为功率曲线的宽度，则 $\beta = \sqrt{2}$，$Q^{-1} = \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$。

在观测方面，由行波所测定的 Q_x 和由驻波所测定的 Q_t 是略有不同的。 用驻波时，对数减缩 Δ 是用相隔一周期的振幅比。 用行波时，对数减缩是用相隔一波长的振幅比。在没有频散时，$\lambda = vT$，v 是相速度，则两种观测方法的结果是一样的。在有频散时，行波所相应的速度是最大振幅的传播速度，即群速度 U。 若使时间上的衰减和空间上的衰减相一致，必须有 $e^{-\gamma t} = e^{-\alpha x} = e^{-\alpha Ut}$。故 $\gamma = \alpha U$。由此便得到

$$Q_x^{-1} : Q_t^{-1} = \frac{\Delta'}{\pi} : \frac{\Delta}{\pi} = \frac{v}{U},$$

或

$$vQ_x = UQ_t。 \tag{12.32}$$

v 是相速度，U 是群速度。

驻波可以看做是两个相反方向传播的行波的迭加，所以它们的衰减应当是一致的。此

处只讨论行波。取 $\xi = f(x - vt)$。与介质有关系的是传播速度 v，而 $v^2 =$ (弹性/密度)。对于频率为 $\omega/2\pi$ 的简谐波来说，弹性变为复数就相应介质有能量吸收。于是 v 也变为复数，其实部表示传播，虚部表示振幅的衰减。但 $v = \omega/k$，故 ω 或 k 均可为复数。由 $\xi = Ae^{i(\omega t - kx)}$，若 $\omega = \omega_r + i\omega_i$，则 $\gamma = \omega_i$；若 $k = k_r + ik_i$，则 $\alpha = -k_i$，故

$$Q^{-1} = \frac{2\omega_i}{\omega_r} \text{ 或 } -\frac{2k_i}{k_r}。\tag{12.33}$$

另一方面，

$$v \propto M^{\frac{1}{2}} = (M_r + iM_i)^{\frac{1}{2}} = |M| e^{i\frac{\phi}{2}}。$$

M 是弹性模量（$M = \lambda + 2\mu$ 或 μ），$\tan\phi = M_i/M_r \ll 1$。故当 $Q^{-1} \ll 1$ 时，立得

$$Q^{-1} = \tan\phi \approx M_i/M_r。\tag{12.34}$$

（二）瑞雷面波的 Q 值

介质中的能量消耗和原子间的距离变化有关系，因此不同类型的波有不同的 Q 值，特别是纵波和横波的 Q 值，Q_P 和 Q_S 是不同的。瑞雷面波包括纵波与横波两种成分，所以 Q_R 和 Q_P 或 Q_S 都不同，但与它们有关系。一般推导这个关系的方法都太复杂，此处采用一个新的方法。

设 h, k, ξ 各为 P, S, R 波的波数，即 $h = \frac{\omega}{V_P}$，$k = \frac{\omega}{V_S}$，$\xi = \frac{\omega}{V_R}$，则它们应满足瑞雷方程，即

$$F(h^2, k^2, \xi^2) = (2\xi^2 - k^2)^4 - 4\xi^2(\xi^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2 - k^2)^{1/2} = 0,$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^2}\Delta\xi^2 + \frac{\partial F}{\partial h^2}\Delta h^2 + \frac{\partial F}{\partial k^2}\Delta k^2 = 0。$$

对于吸收介质，增量 $\Delta h, \Delta k, \Delta\xi$ 按照 (12.33) 应各为 $\Delta h = -ih/2Q_P$，$\Delta k = -ik/2Q_S$，$\Delta\xi = -i\xi/2Q_R$ 或 $\Delta h^2 = -ih/Q_P$，$\Delta k^2 = -ik^2/Q_S \Delta\xi^2 = -i\xi^2/Q_R$。代入上式，得

$$\frac{1}{Q_R} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \xi^2}\right)^{-1}\left[\frac{h^2}{\xi^2}\frac{\partial F}{\partial h^2}\frac{1}{Q_P} + \frac{k^2}{\xi^2}\frac{\partial F}{\partial k^2}\frac{1}{Q_S}\right]。$$

因 F 是 ξ^2, h^2, k^2 的齐次函数，故有

$$\xi^2\frac{\partial F}{\partial \xi^2} + h^2\frac{\partial F}{\partial h^2} + k^2\frac{\partial F}{\partial k^2} = 0。$$

于是上式化简为

$$\frac{1}{Q_R} = m\frac{1}{Q_P} + (1 - m)\frac{1}{Q_S}。$$

式中，

$$m = \frac{2\xi^2 h^2(\xi^2 - k^2)}{2\xi^2(k^2 - h^2)(3\xi^2 - 2k^2) - k^4(2\xi^2 - k^2)},$$

给定了介质的弹性常数，即可以求 h/k。代入瑞雷方程，即可以求 h/ξ 和 k/ξ。令 $h^2/\xi^2 = (V_R/V_P)^2 = a$，$k^2/\xi^2 = (V_R/V_S)^2 = b$，则

$$m = \frac{2a(1 - b)}{2(b - a)(3 - 2b) - b^2(2 - b)}。$$

对于泊松固体，$\lambda=\mu$，$k^2=3h^2$，$\xi^2=1.183k^2$。故得

$$m=0.134,\ (1-m)=0.866,\ Q_R^{-1}=0.134Q_P^{-1}+0.866Q_S^{-1}。$$

地球自由振荡时，振型 ${}_0S_0$ 只和介质的容积变化有关系。这种波称为容积波，其速度为 $V_k=\sqrt{k/\rho}$。由式(12.34)，$Q_k^{-1}=k_i/k_r$。对于泊松固体，$k_r=\frac{5}{3}\mu_r$。故 $Q_P^{-1}=\left(k_i+\frac{4}{3}\mu_i\right)\Big/3\mu_r$，$Q_S^{-1}=\mu_i/\mu_r$，$Q_k^{-1}=k_i/k_r$。故$5Q_k^{-1}=9Q_P^{-1}-4Q_S^{-1}$。

（三）几种线性体的Q值

对于一个线性体，可以应用波尔茨曼（L. Boltzmann）的迭加原理。这个原理有多种形式，其中最简单的一个是这样：若介质表现有弹性后效，则在 t 时刻所表现的应力 $\sigma(t)$ 是 t 以前各时刻 τ 所遗留下来的应力的总和。若在 τ 时刻的应变是 $e(\tau)$，则在 $\delta\tau$ 时间内，这部分 $e(\tau)$ 对于 $\sigma(t)$ 的贡献将等于 $e(\tau)\cdot\delta\tau\cdot f(t-\tau)$。所以总的 $\sigma(t)$ 将等于

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)f(t-\tau)d\tau。$$

$f(\tau)$ 称为记忆函数。换变数，上式可写为

$$\sigma(t)=\int_0^{\infty}e(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

若 $f(\tau)=0$ 当 $\tau<0$，则积分下限可写为$-\infty$，于是积分为一褶积。两端取富氏变换，得

$$\bar{\sigma}(\omega)=\bar{e}(\omega)\bar{m}(\omega)$$

$\bar{m}(\omega)$ 相当于弹性模量，一般是一复数。以下是几种线性体的特例：

1. 麦克斯韦体

$$\dot{e}=\frac{\dot{\sigma}}{\mu}+\frac{\sigma}{\eta}。$$

μ 是刚性系数，η 是滞性。

$$i\omega e=\left(\frac{i\omega}{\mu}+\frac{1}{\eta}\right)\sigma,$$

故

$$\bar{m}(\omega)=\frac{\omega^2}{\mu}+\frac{i\omega}{\eta}。$$

由(12.34)，得

$$Q^{-1}=\mu/\eta\omega。$$

2. 开尔芬体

$$\sigma=\mu e+\eta\dot{e},$$

$$Q^{-1}=\omega\eta/\mu。$$

3. 其他非弹性体

令

$$\bar{m}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}f(t)dt$$

设上式之实部和虚部各为C和S，则有

$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt,$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

各为$f(t)$的余弦变换和正弦变换。

$$V=(\bar{m}/\rho)^{1/2}=[(C+iS)/\rho]^{1/2},$$

$$\frac{1}{v}=\mathrm{Re}\frac{1}{V},\ \alpha=\omega I_m\frac{1}{V},$$

$$Q^{-1}=\frac{2\alpha v}{\omega}=2\left[\frac{(C^2+S^2)^{\frac{1}{2}}-C}{(C^2+S^2)^{\frac{1}{2}}+C}\right]^{1/2}。$$

当 $Q\gg 1$，$C\gg S$，

$$Q^{-1}\approx S/C。$$

洛姆尼茨（C. Lomnitz）提出一个对数蠕变定律，即假定记忆函数为以下形式

$$f(t)=q\ln(1+at)。$$

q和a是两个待定参数。由此可得到

$$Q^{-1}=\frac{q\left[\left(\frac{\pi}{2}-S_i\frac{\omega}{a}\right)\cos\frac{\omega}{a}+C_i\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega}{a}\right]}{1+q\left[\left(\frac{\pi}{2}-S_i\frac{\omega}{a}\right)\sin\frac{\omega}{a}-C_i\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}\right]}。$$

式中C_i和S_i各为余弦和正弦积分。当ω或Q值很大时，$Q^{-1}\to\frac{qa}{\omega}$，即当$\omega$很大时，$\alpha$与$\omega$无关。这与观测不符。

按照线性理论，如介质有吸收，则波速必有频散，但观测表明地震波虽有吸收，频散并不显著。对许多地球物质，在地震频谱范围内，吸收系数α几近地与频率成比例。因此有人认为地震波的传播是非线性的。福特曼（W. I. Futterman）的工作证明情况并非如此。他由线性理论出发，应用因果律的关系（即波未到达，不会有位移），得到频散与吸收的确定关系。他所得到的一个模式是

$$v=c\left[1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln\left(\gamma\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^{-1},$$

$$Q=Q_0\left[1-\frac{1}{\pi Q_0}\ln\left(\gamma\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^{-1},$$

$$\ln\gamma=0.57721。$$

c，Q_0，ω_0都是常数，ω_0是低频方面的截止频率。当$\omega\gg\omega_0$时，v随ω的变化是很弱的，Q也几乎与ω无关。ω_0的选择很有伸缩，约为 $\omega_0\approx 10^{-3}$ 秒$^{-1}$。

（四）能量消耗的机制

1. 散射：在单晶体中，只有当波的频率达到10^9周时才有显著的散射。在多晶体中，散射和λ/d比值有关系，d是颗粒的直径。在地幔中，$\lambda/d\gg 1$，这时发生的散射叫做瑞雷散射。与此相应的Q值是

$$Q^{-1} \approx \frac{1}{\pi} C\tau f^3 S_\circ$$

C 是波速，τ 是颗粒体积，f 是频率，S 是一个散射因子与密度和弹性有关系。在地幔中，因散射而耗失的能量是可以忽略的。

2. 颗粒边界的阻尼：如果颗粒可以互相滑动，则摩擦阻尼将消耗能量，但当压力大于一千巴时，这种滑动将难以发生，所以边界的阻尼作用只能在地壳上层起作用。在更深处，边界的裂隙将被焊合。这时边界阻尼不是由于摩擦，而是由于滞性。当有应力作用，这就产生弛豫，弛豫时间 τ 和温度有关系，$\tau = \tau_0 e^{G^*/kT}$，G^* 是激活能。边界阻尼和频率有关，但与振幅无关。

3. 应力产生的成序效应： 另一种阻尼机制是由应力产生的成序效应（stress-induced ordering），即在应力的作用下，晶体中的原子或缺陷的重新分布。 这种效应也导致阻尼，它也是与频率有关，与振幅无关。

4. 断错阻尼：晶体的断错也产生阻尼。当温度较高时，阻尼是由于断错移动所产生的粘滞力。这与频率有关，与振幅无关。当温度低时，应力可能使断错与原子脱离因而产生阻尼。这与频率无关，但与振幅有关。两种断错阻尼对于地幔岩石的 Q 值都有影响。

5. 部分熔化：以上四种机制都假定地幔岩石为多晶多相的固体。但若在地幔中任一深度发生部分熔化，外加应力可使流体在颗粒间流动，因而产生粘滞阻尼。

在以上各种机制中，其重要性依次为 2，3，4，在地幔中，1 可以忽略，5只在低速层附近有影响。能量吸收主要是由于哪种影响可能在不同深度或不同地区而有所不同，不过可以设想 Q 值与物质强度的关系要比与地震波速度的关系更密切一些，因为前者决定于晶体缺陷，而后者则决定于弹性和密度，它们对于缺陷和断错是不敏感的。

（五）Q 值的测定

最直接的地震测定方法显然是在地面上不同地点对比地震体波的振幅，然而这样做要遇到许多困难，因为震源类型、接收仪器的性能、地震波传播途径都会影响观测结果，而且在地面观测时，地震波振幅沿着同一条射线的衰减一般是量不到的。 然而这些困难常可以用适当的观测方法，或多或少地加以克服。例如，使用长周期面波不但可以减小介质中小尺度的不均匀性的影响，而且几乎等于在相同的射线上取样。使用地球自由振荡最大振幅的衰减或使用环绕地球的长周期瑞雷波或勒夫波通过同一台站时振幅的变化就消除了震源和传播途径的影响。使用地面与地核边界之间返复垂直反射的 S 波 ScS 或 $sScS$ 也可以消除传播途径差异的影响。为简便计，以下只举体波的观测计算为例。

对于一条给定的射线，几何扩散可由下式计算[1]：

$$F = \sqrt{\frac{\sin\theta}{r^2 \sin\Delta \cos\theta_0} \left|\frac{d\theta}{d\Delta}\right|}。$$

r 是地球半径，Δ 是震中距离，θ 是射线离源角，θ_0 是射线在地面的出射角。 设 n 为在地核边界的反射次数。对于垂直入射，n 次与 $n+1$ 次反射振幅比 ScS_{n+1}/ScS_n 为

$$\frac{ScS_{n+1}}{ScS_n} = R\bar{R}e^{-2\alpha_1 h_1} e^{-2\alpha_2 h_2} \frac{F_{n+1}}{F_n}。$$

R 和 $\bar{R}$ 各为地核边界和地面的反射系数，h_1 是震源深度，$h_2 = H - h_1$，H 是地核深度，α_1 和 α_2 是震源以上和以下介质的平均吸收系数，F_n 是 n 次反射的几何扩散因子。对于垂直入射，R 及 $\bar{R}$ 都几近于 1。求地幔的平均衰减，可在上式中设 $\alpha_1 \approx \alpha_2 = \alpha$。于是得到

$$\alpha = -\ln\left(\frac{ScS_{n+1}}{ScS_n} \cdot \frac{F_n}{F_{n+1}}\right) \Big/ 2H,$$

而

$$Q = \pi f / V_s \alpha,\ f\ 表示频率。$$

参 考 书 目

[1] Bullen, K. E., 1963 *An Introduction to the Theory of Seismology*, 3rd edition, Cambridge Univ. Press.

[2] Birch, F., 1952 Elasticity and constitution of the Earth's Interior, *J. Geophys Res*, 57, 227—286.

[3] Birch, F., 1964. Density and compostion of the mantle and the core. *J. Geophys. Res*, 69, 4377—4388.

[4] Anderson, D. L, 1967. A Seismic equation of state, *Geophys J. R Astr. Soc.*, 13, 9—30

[5] Liu, H. P, et al, 1976 Velocity dispersion due to anelasticity, *Geophys J. R Astr Soc*, 47, 41—58

[6] Dziewonski, A, and D L Andemon, 1981. Preliminary reference Earth model, *Phys Earth Planet. Inter*, 25, 297—356.

[7] Ringwood, A. E, 1975. *Composition and Petrology of the Earth's Mantle*, McGraw-Hill, New York.

[8] Liu, L G, 1979 Phase transformation and th constitution of the deep mantle, in· *The Earth, Its Origin, Structure and Evolution*, edited by M.W McElhinney, Acad. Press, New York, 1.7—202.

[9] 傅承义，1976. 《地球十讲》，科学出版社.